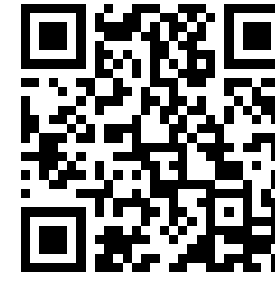
This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

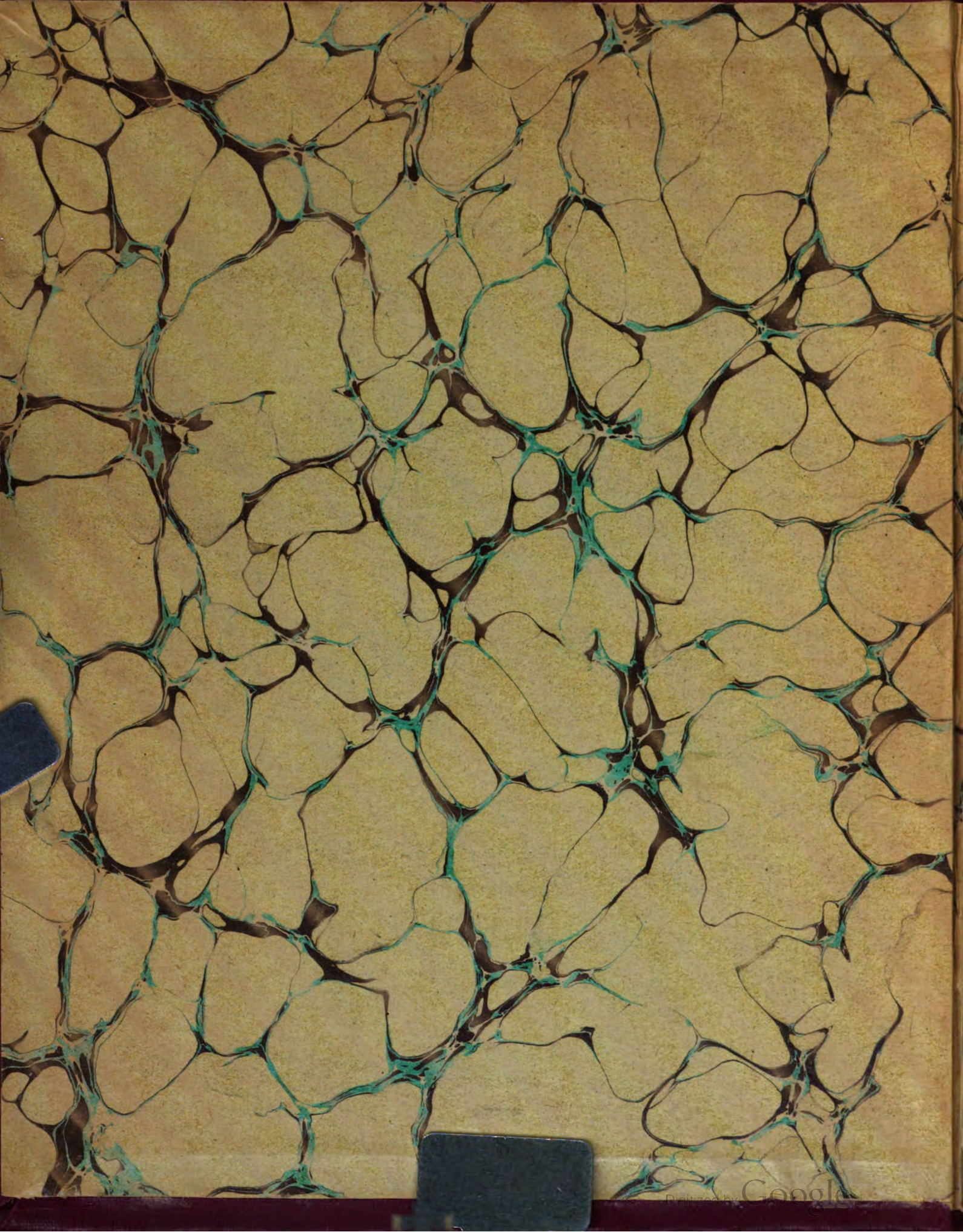
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Stanford University Libraries
3 6105 027 649 412

Digitized by Google


Digitized by Google

Digitized by Google

510.6
P232

Digitized by Google

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Digitized by Google

Digitized by Google

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

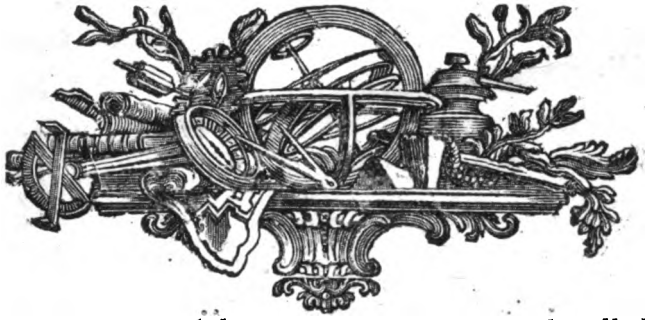
PUBLIÉ

PAR LE CONSEIL D'INSTRUCTION

DE CET ÉTABLISSEMENT.

DIX-SEPTIÈME CAHIER.

TOME X.



STANFORD LIBRARY

A PARIS,

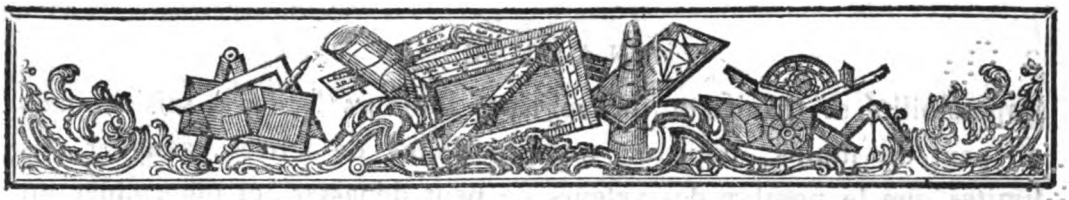
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Janvier 1815.

Digitized by Google

STANFORD LIBRARY

Digitized by Google



JOURNAL
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

MÉMOIRE

Sur le Nombre des Valeurs qu'une Fonction peut acquérir, lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme;

PAR A. L. CAUCHY, INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES.

MM. *LAGRANGE* et *VANDERMONDE* sont, je crois, les premiers qui aient considéré les fonctions de plusieurs variables relativement au nombre de valeurs qu'elles peuvent obtenir, lorsqu'on substitue ces variables à la place les unes des autres. Ils ont donné plusieurs théorèmes intéressans relatifs à ce sujet, dans deux mémoires imprimés en 1771, l'un à Berlin, l'autre à Paris. Depuis ce temps, quelques géomètres italiens se sont occupés avec succès de cette matière, et particulièrement M. *Ruffini*, qui a consigné le résultat de ses recherches dans le tome XII des Mémoires de la Société italienne, et dans sa Théorie des équations numériques. Une des conséquences les plus remarquables des travaux de ces divers géomètres, est qu'avec un nombre donné de lettres on ne peut pas toujours former une fonction qui ait un nombre déterminé de valeurs. Les caractères par lesquels cette

Digitized by Google

impossibilité se manifeste, ne sont pas toujours faciles à saisir ; mais on peut du moins, pour un nombre donné de lettres, assigner des limites que le nombre des valeurs ne peut dépasser, et déterminer en outre un grand nombre de cas d'exclusion. Je vais exposer dans ce mémoire ce qu'on avait déjà trouvé de plus important sur cet objet, et ce que mes propres recherches m'ont permis d'y ajouter. J'examinerai plus particulièrement le cas où le nombre des valeurs d'une fonction est supposé plus petit que le nombre des lettres, parce que les fonctions de cette nature sont celles dont la connaissance est la plus utile en analyse.

Considérons une fonction de plusieurs quantités, et supposons que l'on échange entre elles ces mêmes quantités une ou plusieurs fois de suite. Si la fonction est du genre de celles qu'on appelle *symétriques*, elle ne changera pas de valeur par suite des transpositions opérées entre les quantités qu'elle renferme ; mais si elle n'est pas symétrique, elle pourra obtenir, en vertu de ces mêmes transpositions, plusieurs valeurs différentes les unes des autres, dont le nombre se trouvera déterminé par la nature de la fonction dont il s'agit. Si l'on partage les fonctions en divers ordres, suivant le nombre des quantités qu'elles renferment, en sorte qu'une fonction du second ordre soit celle qui renferme deux quantités, une fonction du troisième ordre celle qui en renferme trois, &c...., il sera facile de reconnaître qu'il existe une liaison nécessaire entre le nombre des valeurs que peut obtenir une fonction non symétrique et l'ordre de cette même fonction. Ainsi, par exemple, une fonction du second ordre ne pourra jamais obtenir que deux valeurs que l'on déduira l'une de l'autre par la transposition des deux quantités qui la composent. De même, une fonction du troisième ordre ne pourra obtenir plus de six valeurs ; une fonction du quatrième ordre plus de vingt-quatre valeurs, &c.... En général, le *maximum* du nombre des valeurs que peut obtenir une fonction de l'ordre n sera

Digitized by Google

évidemment égal au produit

$$1 . 2 . 3 \ldots n ;$$

car ce produit représente le nombre des manières différentes dont on peut disposer à la suite les unes des autres, les quantités dont la fonction se compose. On a donc déjà, par ce moyen, une limite que le nombre des valeurs en question ne peut dépasser : mais il s'en faut de beaucoup que dans chaque ordre on puisse former des fonctions dont le nombre des valeurs soit égal à l'un des nombres entiers situés au-dessous de cette limite. Un peu de réflexion suffit pour faire voir qu'aucun nombre au-dessous de la limite ne peut remplir la condition exigée, à moins qu'il ne soit diviseur de cette limite. On peut s'en assurer facilement à l'aide des considérations suivantes.

Soit K une fonction quelconque de l'ordre n, et désignons par a_1, $a_2 \ldots a_n$ les quantités qu'elle renferme. Si l'on écrit à la suite les unes des autres les quantités dont il s'agit, ou, ce qui revient au même, les indices qui les affectent, dans l'ordre où ils se présentent, lorsqu'on les passe en revue en allant de gauche à droite, et en ayant soin de n'écrire qu'une seule fois chaque indice, on aura une permutation de ces mêmes indices, qui aura une relation nécessaire avec la fonction K. Par exemple, si la fonction K était du quatrième ordre, et égale à

$$a_1 \, a_2^m \cos. a_4 + a_4 \sin. a_3 ,$$

la permutation relative à K serait

$$1 . 2 . 4 . 3 .$$

Si, au-dessous de la permutation relative à K, on écrit une autre permutation formée avec les indices $1, 2, 3 \ldots n$, et que l'on remplace successivement dans la fonction K, chacun des indices qui composent la permutation supérieure par l'indice correspondant de la permutation inférieure, on aura une nouvelle valeur de K qui sera ou ne sera pas équivalente à la première, et la permutation relative à cette nouvelle valeur de K sera évidemment la permutation inférieure dont

Digitized by Google

on vient de parler. On pourra obtenir, par ce moyen, les valeurs de K relatives aux diverses permutations que l'on peut former avec les indices $1, 2, 3 \ldots n$; et si l'on représente par

$$K,\ K',\ K'',\ \&c\ldots.$$

les valeurs dont il s'agit, leur nombre sera égal au produit

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n,$$

et leur ensemble fournira toutes les valeurs possibles de la fonction K. Pour déduire deux de ces valeurs l'une de l'autre, il suffira de former les permutations relatives à ces deux valeurs, et de substituer aux indices de la première permutation les indices correspondans pris dans la seconde. Pour indiquer cette *substitution*, j'écrirai les deux permutations entre parenthèses, en plaçant la première au-dessus de la seconde : ainsi, par exemple, la substitution

$$\begin{pmatrix} 1.2.4.3 \\ 2.4.3.1 \end{pmatrix}$$

indiquera que l'on doit substituer dans K, l'indice 2 à l'indice 1, l'indice 4 à l'indice 2, l'indice 3 à l'indice 4, et l'indice 1 à l'indice 3. Si donc on supposait, comme ci-dessus,

$$K = a_1\, a_2^m \cos. a_4 + a_4 \sin. a_3;$$

en désignant par K' la nouvelle valeur de K obtenue par la substitution

$$\begin{pmatrix} 1.2.4.3 \\ 2.4.3.1 \end{pmatrix},$$

on aurait

$$K' = a_2\, a_4^m \cos. a_3 + a_3 \sin. a_1.$$

Afin d'abréger, je représenterai dans la suite les permutations elles-mêmes par des lettres majuscules. Ainsi, si l'on désigne la permutation

$$1.2.4.3 \quad \text{par} \quad A_1,$$

et la permutation

$$2.4.3.1 \quad \text{par} \quad A_2,$$

Digitized by Google

la substitution

$$\begin{pmatrix} 1.2.4.3 \\ 2.4.3.1 \end{pmatrix}$$

se trouvera indiquée de la manière suivante ;

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}.$$

Cela posé, K étant une fonction quelconque de l'ordre n, désignons par N le produit $1.2.3...n$, et par

$$A_1, A_2, A_3.....A_N,$$

les diverses permutations en nombre égal à N que l'on peut former avec les indices $1, 2, 3...n$, N sera le nombre total des valeurs de la fonction K relatives à ces diverses permutations. Soient

$$K_1, K_2, K_3.....K_N$$

ces mêmes valeurs. Si elles sont toutes différentes les unes des autres, N exprimera le nombre des valeurs différentes de la fonction donnée ; mais dans le cas contraire, le nombre de ces valeurs étant plus petit que N, sera nécessairement un diviseur de N, comme on va le faire voir.

Supposons que, parmi les valeurs possibles

$$K_1, K_2, K_3.....K_N$$

de la fonction donnée, plusieurs deviennent égales entre elles, en sorte qu'on ait, par exemple,

$$K_\alpha = K_\beta = K_\gamma = \&c....$$

Désignons par M le nombre total des valeurs K_α, K_β, K_γ, &c.... que l'on suppose ici égales entre elles. Les permutations relatives à ces valeurs, ou A_α, A_β, A_γ, &c..., seront aussi en nombre égal à M. Pour déduire toutes ces permutations d'une seule, par exemple, de A_α, il suffira d'échanger entre eux, d'une certaine manière, les indices qui, dans cette permutation, occupent certaines places ; et l'on conçoit facilement que si ces changemens n'altèrent en rien la valeur correspondante K_α de la fonction K, cela tient non pas à la valeur même des

Digitized by Google

indices, mais à la place que chacun d'eux occupe dans la permutation dont il s'agit.

Cela posé, soit K_λ une nouvelle valeur de K, qui ne soit pas égale à K_α; et désignons toujours par A_λ la permutation relative à K_λ. Si l'on fait subir simultanément aux indices qui occupent les mêmes places dans les permutations A_α et A_λ les changemens dont on vient de parler, la seconde permutation A_λ se trouvera successivement changée en plusieurs autres A_μ, A_ν, &c...., pendant que la première A_α deviendra successivement A_β, A_γ, &c.... ; et d'après le principe énoncé ci-dessus, il est évident que l'équation

$$K_\alpha = K_\beta = K_\gamma = \&c.....;$$

entraînera celle-ci,

$$K_\lambda = K_\mu = K_\nu = \&c....$$

Il est aisé d'en conclure que, parmi les valeurs de K relatives à toutes les permutations possibles, savoir,

$$K_1, K_2, K_3 .....K_N,$$

le nombre de celles qui seront équivalentes à K_λ, sera le même que le nombre des valeurs équivalentes à K_α. Par suite, si l'on représente par R le nombre total des valeurs essentiellement différentes de la fonction K, M étant le nombre des valeurs équivalentes à K_α, RM sera le nombre total des valeurs relatives aux diverses permutations. On aura donc $RM = N$, et par suite

$$R = \frac{N}{M}.$$

Ainsi R, ou le nombre des valeurs différentes de la fonction K ne peut être qu'un diviseur de N, c'est-à-dire, du produit $1.2.3...n$. Ce théorème, qui se présente dès les premiers pas que l'on veut faire dans la théorie des combinaisons, était déjà connu; mais il était nécessaire de le rappeler ici pour l'intelligence de ce qui va suivre. Afin d'abréger, j'appellerai désormais *indice* de la fonction K, le nombre R qui

Digitized by Google

indique combien cette fonction peut obtenir de valeurs essentiellement différentes, et j'appellerai *diviseur indicatif* le nombre M par lequel on doit diviser N, ou le produit des indices $1, 2, 3 \ldots n$ renfermés dans la fonction, pour obtenir l'indice de la fonction elle-même.

On vient de voir que le nombre des valeurs différentes d'une fonction de l'ordre n, est nécessairement un diviseur du produit,

$$N = 1 . 2 . 3 \ldots n.$$

Le plus petit diviseur de ce produit est toujours égal à 2, et il est facile de s'assurer que dans un ordre quelconque on peut former des fonctions qui n'aient que deux valeurs différentes. *Vandermonde* a donné les moyens de composer des fonctions de cette espèce. En général, pour former avec les quantités

$$a_1, a_2 \ldots a_n$$

une fonction de l'ordre n, dont l'indice soit égal à 2, il suffira de considérer la partie positive ou la partie négative du produit

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \ldots (a_1 - a_n)(a_2 - a_3) \ldots (a_2 - a_n) \ldots\ldots (a_{n-1} - a_n),$$

qui a pour facteurs les différences des quantités $a_1, a_2 \ldots a_n$ prises deux à deux.

En effet, supposons qu'après avoir développé ce produit, on représente par P la somme des termes positifs, et par Q la somme des termes négatifs, le produit dont il s'agit sera représenté par

$$P - Q;$$

et comme ce produit ne peut jamais changer de valeur, mais seulement de signe, en vertu de substitutions quelconques opérées entre les indices des quantités qu'il renferme, les substitutions dont il s'agit pourront seulement transformer $P - Q$ en $Q - P$, c'est-à-dire, changer P en Q, et réciproquement. P et Q seront donc les deux valeurs d'une fonction qui ne pourra en obtenir d'autres. En supposant

Digitized by Google

$n = 3$, on trouve

$$P = a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + a_3^2 a_1,$$
$$Q = a_1 a_2^2 + a_2 a_3^2 + a_3 a_1^2.$$

On serait encore arrivé à de semblables conclusions, si l'on eût multiplié le produit

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\ldots(a_1 - a_n)(a_2 - a_3)\ldots(a_2 - a_n)\ldots\ldots(a_{n-1} - a_n),$$

par une fonction symétrique quelconque des quantités

$$a_1, a_2 \ldots\ldots a_n.$$

Ce qu'on vient de remarquer relativement au diviseur 2 du produit $1.2.3\ldots n$, n'est pas vrai en général relativement à l'un quelconque des diviseurs de ce produit, et il n'est pas toujours possible de former une fonction de l'ordre n, dont les valeurs différentes soient en nombre égal à l'un de ces diviseurs pris à volonté. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de former une fonction K qui ait seulement trois valeurs différentes. Si n est égal à 3, on trouvera une infinité de fonctions qui rempliront la condition exigée, telles que

$$a_1 a_2 + a_3,$$
$$a_1 (a_2 + a_3),$$
&c.....

On pourra encore former des fonctions de cette espèce, si n est égal à 4, par exemple,

$$a_1 a_2 + a_3 a_4,$$
$$(a_1 + a_2)(a_3 + a_4),$$
&c....

Mais si n est égal à 5, ou surpasse 5, on n'en pourra plus former de semblables : on ne peut pas même, dans ce cas, former de fonctions qui n'aient que quatre valeurs. Ces deux propositions ont été démontrées par M. *Paolo Ruffini*, dans les Mémoires de la Société italienne tome XII, et dans sa Théorie des équations. Ayant été conduit par des

Digitized by Google

des recherches sur les nombres, à m'occuper de la théorie des combinaisons, je suis arrivé à la démonstration d'un théorème plus général qui renferme les deux précédens, et qui détermine une limite au-dessous de laquelle le nombre des valeurs d'une fonction non symétrique de l'ordre n, ne peut jamais s'abaisser sans devenir égal à 2. Ce théorème peut s'énoncer ainsi qu'il suit :

Le nombre des valeurs différentes d'une fonction non symétrique de n *quantités, ne peut s'abaisser au-dessous du plus grand nombre premier* p *contenu dans* n, *sans devenir égal à 2.*

1.re PARTIE DE LA DÉMONSTRATION.

On fait voir que si l'on suppose $R < p$, *chaque valeur de* K *ne pourra être changée par aucune substitution du degré* p.

COMME, pour démontrer le théorème précédent, il est nécessaire de bien connaître la nature de l'opération que j'ai désignée sous le nom de *substitution*, je commencerai par donner sur cet objet de nouveaux développemens.

Soit K la fonction donnée de l'ordre n; soit R son indice ou le nombre des valeurs essentiellement différentes qu'elle peut recevoir par des substitutions opérées entre les quantités dont elle se compose. Enfin désignons par N le produit $1.2.3...n$, R sera nécessairement un diviseur de N que je pourrai représenter par

$$\frac{N}{M},$$

M étant ainsi le diviseur indicatif de la fonction K. Cela posé, soient $A_1, A_2 \ldots A_N$ les permutations en nombre égal à N, que l'on peut former avec les indices renfermés dans K, et désignons par

$$K_1, \quad K_2 \ldots K_N$$

les valeurs correspondantes de cette même fonction; pour déduire l'une de l'autre deux de ces valeurs, ou, ce qui revient au même, les permutations qui leur correspondent, par exemple, A_1 et A_2, il suffira de remplacer respectivement les indices compris dans la permutation

Digitized by Google

A_1, par les indices correspondans compris dans la permutation A_2. Cette opération, que j'appelle substitution, sera, d'après les conventions établies, indiquée de la manière suivante,

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}.$$

Les deux permutations A_1 et A_2 seront appelées respectivement premier et second terme de cette substitution. On peut dans le premier terme A_1 de cette substitution intervertir, de telle manière que l'on voudra, l'ordre des indices $1, 2, 3 \ldots n$, pourvu que l'on intervertisse de la même manière l'ordre des indices correspondans compris dans le second terme A_2. On pourra, en conséquence, donner successivement pour premier terme à la substitution proposée chacune des permutations $A_1, A_2, A_3 \ldots A_N$, et la mettre ainsi sous un nombre égal à N de formes différentes qui seront toutes équivalentes entre elles.

Je dirai qu'une substitution est le *produit* de plusieurs autres, lorsqu'elle donnera le même résultat que ces dernières opérées successivement. Par exemple, si en appliquant successivement à la permutation A_1 les deux substitutions $\begin{pmatrix} A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A_4 \\ A_5 \end{pmatrix}$, on obtient pour résultat la permutation A_6; la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_6 \end{pmatrix}$ sera équivalente au produit des deux autres, et j'indiquerai cette équivalence comme il suit :

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_4 \\ A_5 \end{pmatrix}.$$

Une substitution *identique* est celle dont les deux termes sont égaux entre eux. Les substitutions

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_2 \\ A_2 \end{pmatrix} \ldots\ldots \begin{pmatrix} A_N \\ A_N \end{pmatrix}$$

sont toutes identiques.

Je dirai que deux substitutions sont *contiguës*, lorsque le second terme de la première sera égal au premier terme de la seconde. Les

Digitized by Google

deux substitutions contiguës $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$, opérées successivement, donnent le même résultat que la substitution unique $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \end{pmatrix}$: on a donc

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}.$$

On a de même, en général,

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} \cdots\cdots \begin{pmatrix} A_{r-1} \\ A_r \end{pmatrix}.$$

Enfin, je dirai qu'une substitution est dérivée d'une autre, ou est une *puissance* d'une autre, si elle est équivalente à cette autre répétée plusieurs fois de suite. J'indiquerai la puissance r de la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ de la manière suivante,

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}^r.$$

Lorsque les substitutions contiguës

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} \cdots\cdots \begin{pmatrix} A_{r-1} \\ A_r \end{pmatrix}$$

sont toutes équivalentes entre elles, on a

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}^r = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} \cdots\cdots \begin{pmatrix} A_{r-1} \\ A_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_r \end{pmatrix}.$$

Supposons que l'on applique plusieurs fois de suite à la permutation A_1 la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_r \end{pmatrix}$, en sorte que cette substitution étant appliquée à la permutation A_1, donne pour résultat la permutation A_2 ; qu'étant appliquée à la permutation A_2, elle donne pour résultat la permutation A_3, &c..... La série des permutations

$$A_1, A_2, A_3, \text{ \&c.....}$$

sera nécessairement composée d'un nombre fini de termes ; et si l'on représente par m ce même nombre, et par A_m la dernière des permutations obtenues, la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_t \end{pmatrix}$ appliquée à cette dernière

Digitized by Google

permutation reproduira de nouveau le terme A_1. Cela posé, si l'on range en cercle, ou plutôt en polygone régulier, les permutations

$$A_1,\quad A_2,\quad A_3 \ldots\ldots A_{m-1},\quad A_m$$

de la manière suivante,

toutes les substitutions que l'on pourra former avec deux permutations prises à la suite l'une de l'autre et d'orient en occident dans le polygone dont il s'agit, seront équivalentes entre elles et à $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$: et toutes celles que l'on pourra former avec deux permutations séparées l'une de l'autre par un nombre r de côtés dans ce même polygone, seront équivalentes à la puissance r de la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$. On aura de cette manière,

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \&c.\ldots = \begin{pmatrix} A_m \\ A_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \&c.\ldots = \begin{pmatrix} A_m \\ A_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_3 \\ A_5 \end{pmatrix} = \&c.\ldots = \begin{pmatrix} A_m \\ A_3 \end{pmatrix},$$

&c.....

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_3 \\ A_2 \end{pmatrix} = \&c.\ldots = \begin{pmatrix} A_m \\ A_m \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}^{m+1} = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \&c.\ldots = \begin{pmatrix} A_m \\ A_1 \end{pmatrix},$$

&c.....

Il suit de ces considérations, 1.° que la puissance m de la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ est équivalente à la substitution identique $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 \end{pmatrix}$; 2.° que x étant un nombre entier quelconque, $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}^{mx}$ sera encore

Digitized by Google

une substitution identique; 3.° que, dans la même hypothèse, les substitutions $\left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ A_t \end{smallmatrix}\right)^{mx+r}$ et $\left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ A_t \end{smallmatrix}\right)^{r}$ sont équivalentes; 4.° que la notation $\left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ A_t \end{smallmatrix}\right)^{0}$ indique une substitution identique; 5.° que, parmi les substitutions dérivées de $\left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ A_t \end{smallmatrix}\right)$, les seules qui soient différentes entre elles sont les puissances dont l'exposant est plus petit que m, ou, ce qui revient au même, les substitutions équivalentes à ces puissances, savoir;

$$\left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ A_1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ A_2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ A_3 \end{smallmatrix}\right) \ldots\ldots \left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ A_m \end{smallmatrix}\right).$$

Le nombre de ces substitutions est comme celui des permutations $A_1, A_2, A_3 \ldots\ldots A_m$ égal à m. Ce nombre sera appelé le *degré* de la substitution $\left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ A_t \end{smallmatrix}\right)$. Si l'on applique plusieurs fois de suite la substitution $\left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ A_t \end{smallmatrix}\right)$ à la permutation A_1, on commencera par obtenir la suite des permutations $A_1, A_2, A_3 \ldots\ldots A_m$; et lorsqu'on sera parvenu à ce point, les mêmes permutations se reproduiront dans le même ordre d'une manière périodique. C'est pourquoi je dirai que les permutations précédentes forment une période qui correspond à la substitution $\left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ A_t \end{smallmatrix}\right)$. Cela posé, le degré d'une substitution $\left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ A_t \end{smallmatrix}\right)$ indique à-la-fois la plus petite de ses puissances positives qui soit équivalente à une substitution identique, et le nombre des permutations comprises dans la période qui résulte de l'application de la substitution donnée à une permutation déterminée.

La manière la plus simple de représenter une période est de ranger en cercle, ou plutôt en polygone régulier, les permutations qui la composent, ainsi qu'on l'a déjà fait plus haut.

Je dirai que le cercle suivant

formé, comme on vient de le dire, est un des cercles de permutations qui correspondent à la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_t \end{pmatrix}$. Toute substitution qui a pour termes deux permutations comprises dans ce cercle est une des puissances de la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_t \end{pmatrix}$.

Étant donné le cercle ou polygone précédent qui correspond à la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_t \end{pmatrix}$; pour en déduire un polygone qui corresponde à la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_r \end{pmatrix}^r$, il suffit de joindre de r en r, en allant d'orient en occident, les sommets du polygone donné, et d'écrire les permutations que l'on y rencontre dans l'ordre où elles se présentent. Lorsque r et m sont premiers entre eux, on passe de cette manière sur tous les sommets du premier polygone, et le second polygone renferme toutes les permutations comprises dans le premier : par suite, la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_t \end{pmatrix}^r$ est du degré m, ainsi que la substitution donnée $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_t \end{pmatrix}$; et cette seconde substitution peut alors être considérée comme une puissance de l'autre. Cette circonstance a toujours lieu, lorsque m est un nombre premier, quelle que soit d'ailleurs la valeur de r.

Si l'on applique successivement la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_t \end{pmatrix}$ aux différentes valeurs de la fonction K, ou, ce qui revient au même, aux permutations

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3 \ldots\ldots A_N$$

qui leur correspondent, on obtiendra en tout un nombre égal à $\frac{N}{m}$ de polygones ou cercles différens les uns des autres, qui seront composés chacun de m permutations différentes.

Cela posé, désignons sous le nom de *permutations équivalentes* celles qui correspondent à des valeurs équivalentes de la fonction K; les permutations équivalentes à A_1 étant par hypothèse en nombre

Digitized by Google

égal à M, il est visible que si l'on a $M > \frac{N}{m}$, on pourra, parmi les cercles que l'on vient de former, en trouver au moins un qui renferme deux des permutations équivalentes dont il s'agit. Soient A_x, A_y ces deux permutations : la substitution $\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$ sera une des puissances de la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_t \end{pmatrix}$; et si en outre m est un nombre premier, $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_t \end{pmatrix}$ sera encore une puissance de la substitution $\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$. D'ailleurs, les deux permutations A_x, A_y étant équivalentes entre elles et à la permutation A_t, la substitution $\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$ ne changera pas la valeur K_t de la fonction K. Par suite, cette même valeur ne sera pas changée par la substitution $\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$ plusieurs fois répétée ; elle ne sera donc pas changée par la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_t \end{pmatrix}$, si m est un nombre premier. Si l'on représente par p le plus grand des nombres premiers compris dans n, on pourra supposer dans ce qui précéde

$$m = p.$$

Nous sommes donc conduits par les considérations précédentes à ce résultat remarquable, que relativement à la fonction K on ne peut supposer $M > \frac{N}{p}$, ou, ce qui revient au même, $R < p$, à moins de supposer en même temps que la valeur K_1 de cette fonction ne peut être changée par aucune des substitutions du degré p. Il nous reste à faire voir que, pour satisfaire à cette dernière condition, on est obligé de rendre la fonction symétrique ou de supposer

$$R = 2.$$

2.e Partie de la démonstration.

On fait voir que si une valeur de K *ne peut être changée par aucune substitution du degré* p, *elle ne pourra être changée par aucune des substitutions circulaires du 3.e degré.*

Avant d'aller plus loin, il est nécessaire d'examiner avec quelque

Digitized by Google

attention la nature des substitutions du degré p, que l'on peut former avec les indices 1, 2, 3 ... n.

Nous observerons d'abord que, si dans la substitution $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$ formée par deux permutations prises à volonté dans la suite,

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3 \ldots\ldots A_N,$$

les deux termes A_s, A_t renferment des indices correspondans qui soient respectivement égaux, on pourra sans inconvénient supprimer ces mêmes indices, pour ne conserver que ceux des indices correspondans qui sont respectivement inégaux. Ainsi, par exemple, si l'on fait $n = 5$, les deux substitutions

$$\begin{pmatrix} 1.2.3.4.5 \\ 2.3.1.4.5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1.2.3 \\ 2.3.1 \end{pmatrix}$$

seront équivalentes entre elles. Je dirai qu'une substitution aura été réduite à sa plus simple expression, lorsqu'on aura supprimé dans les deux termes tous les indices correspondans égaux.

Soient maintenant α, β, $\gamma \ldots \zeta$, η plusieurs des indices 1, 2, 3 ... n en nombre égal à p; et supposons que la substitution $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$ réduite à sa plus simple expression prenne la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta\gamma \ldots \zeta\eta \\ \beta\gamma\delta \ldots \eta\alpha \end{pmatrix},$$

en sorte que pour déduire le second terme du premier, il suffise de ranger en cercle, ou plutôt en polygone régulier, les indices α, β, γ, δ ..... ζ, η de la manière suivante,

et de remplacer ensuite chaque indice par celui qui le premier vient prendre sa place, lorsqu'on fait tourner d'orient en occident le polygone dont il s'agit. Il est aisé de voir que pour obtenir la puissance r de la substitution donnée, il suffira de remplacer chaque indice du polygone par celui qui le premier vient prendre sa place, après

Digitized by Google

après avoir passé sur un nombre de côtés égal à r, lorsqu'on fait tourner le polygone d'orient en occident. Si l'on veut obtenir de cette manière une substitution identique, il faudra supposer r égal à p, ou à un multiple de p; car chaque indice ne peut revenir à sa place primitive qu'après avoir fait une ou plusieurs fois le tour du polygone. Il suit de là, que le degré de la substitution donnée est égal à p. J'appellerai *polygone indicatif*, ou *cercle indicatif*, le polygone ou cercle formé par les indices compris dans cette substitution, et je la désignerai elle-même sous le nom de *substitution circulaire*. Pour qu'une substitution soit circulaire, il suffit qu'après l'avoir réduite à sa plus simple expression, on puisse passer en revue tous les indices qu'elle comprend, en comparant deux à deux les indices qui se correspondent dans les deux termes. Le degré d'une substitution circulaire est toujours égal au nombre des indices qu'elle renferme.

Soit

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta\gamma\delta\ldots\ldots\zeta\eta \\ \beta\gamma\delta\varepsilon\ldots\ldots\eta\alpha \end{pmatrix}$$

une substitution circulaire du degré p,

$$\begin{pmatrix} \beta\gamma\delta\varepsilon\ldots\ldots\eta\alpha \\ \gamma\alpha\beta\delta\ldots\ldots\zeta\eta \end{pmatrix}$$

sera encore une substitution circulaire du degré p; et comme elle est contiguë à la première, ces deux substitutions opérées successivement seront équivalentes à la substitution unique

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta\gamma\delta\ldots\ldots\zeta\eta \\ \gamma\alpha\beta\delta\ldots\ldots\zeta\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\beta\gamma \\ \gamma\alpha\beta \end{pmatrix}.$$

Si donc les deux premières substitutions ne changent pas la valeur K_1 de la fonction K, cette valeur ne sera pas non plus changée par la substitution circulaire du troisième degré

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta\gamma \\ \gamma\alpha\beta \end{pmatrix}.$$

Il suit de là, que si la valeur K_1 n'est changée par aucune des

Digitized by Google

substitutions circulaires du degré p, elle ne pourra être changée par aucune des substitutions circulaires du troisième degré ; il ne reste plus qu'à développer les conséquences de cette dernière condition.

3.e Partie de la démonstration.

On fait voir que si une valeur de K *n'est changée par aucune des substitutions circulaires du 3.e degré, cette fonction sera symétrique, ou n'aura que deux valeurs.*

Si l'on désigne sous le nom de *transposition* une substitution circulaire du second degré, telle que $\begin{pmatrix} \alpha\beta \\ \beta\alpha \end{pmatrix}$, ou, ce qui revient au même, l'opération qui consiste à échanger l'un contre l'autre deux indices α et β, et que nous indiquerons comme il suit (α, β) : chaque substitution circulaire du troisième degré sera équivalente à deux transpositions successivement opérées. Ainsi, par exemple, la substitution

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta\gamma \\ \gamma\alpha\beta \end{pmatrix}$$

sera équivalente au produit des deux substitutions contiguës,

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta\gamma \\ \beta\alpha\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta\alpha\gamma \\ \gamma\alpha\beta \end{pmatrix},$$

que l'on peut représenter aussi par

$$(\alpha, \beta) \quad (\beta, \gamma).$$

Si donc la valeur K_1 n'est pas changée par la substitution circulaire $\begin{pmatrix} \alpha\beta\gamma \\ \beta\gamma\alpha \end{pmatrix}$, la même valeur ne sera pas changée par les transpositions (α, β), (β, γ) opérées successivement; et par suite la transposition (α, β) ne pourra changer K_1 en K_2, sans que la transposition (β, γ) change réciproquement K_2 en K_1, et par conséquent aussi K_1 en K_2 : ainsi les deux transpositions (α, β), (β, γ), qui ont un indice commun β, étant appliquées à K_1, donneront le même résultat K_2. On fera voir de même que si la valeur K_1 n'est pas changée par la substitution circulaire du troisième degré

$$\begin{pmatrix} \beta\gamma\delta \\ \delta\beta\gamma \end{pmatrix},$$

Digitized by Google

les transpositions (β, γ) et (γ, δ), qui ont un indice commun γ, changeront toutes deux K_1 en K_2. Par suite, les transpositions

$$(\alpha, \beta), \quad (\gamma, \delta),$$

qui n'ont pas d'indices communs, conduiront encore au même résultat.

Il suit de ce qu'on vient de dire, que si la valeur K_1 de la fonction K n'est changée par aucune des substitutions circulaires du troisième degré opérées entre les indices $1, 2, 3 \ldots\ldots n$, et que l'on représente par K_2 la valeur déduite de K_1 par la transposition $(1, 2)$, toutes les autres transpositions changeront encore K_1 en K_2, et par conséquent K_2 en K_1. Par suite, deux transpositions successives ne changeront pas la valeur K_1. Ainsi, dans le cas que l'on considère, le nombre des valeurs différentes de la fonction K, valeurs que l'on peut toujours déduire de K_1 par des transpositions opérées entre les indices $1, 2, 3 \ldots n$, sera tout au plus égal à 2; d'ailleurs, il ne pourrait se réduire à l'unité que dans le cas où cette fonction deviendrait symétrique. Il est donc prouvé par ce qui précède, que si la fonction K n'est pas symétrique, le nombre de ses valeurs ne pourra être inférieur à p, sans devenir égal à 2.

Ainsi, par exemple, en excluant les fonctions symétriques et celles qui ont deux valeurs seulement, on trouvera qu'une fonction du cinquième ou du sixième ordre ne peut obtenir moins de cinq valeurs; une fonction du septième, du huitième, du neuvième ou du dixième ordre, moins de sept valeurs; une fonction du onzième ou du douzième ordre, moins de treize valeurs, &c.... Au reste, comme en supposant $n = 3$ ou $n = 4$ on trouve $p = 3$, on voit que le théorème précédent, dans le troisième et le quatrième ordre, n'exclut pas les fonctions de trois valeurs.

Lorsque l'ordre de la fonction est lui-même un nombre premier, on a $p = n$; ainsi, toute fonction dont l'ordre est un nombre premier ne peut obtenir moins de valeurs qu'elle ne renferme de quantités;

Digitized by Google

pourvu que l'on suppose toujours exclues les fonctions qui n'ont pas plus de deux valeurs.

Au reste, il n'est pas toujours possible d'abaisser l'indice, c'est-à-dire, le nombre des valeurs d'une fonction jusqu'à la limite que nous venons d'assigner; et si l'on en excepte les fonctions du quatrième ordre qui peuvent obtenir trois valeurs, je ne connais pas de fonctions non symétriques dont l'indice soit inférieur à l'ordre, sans être égal à 2. Le théorème ci-dessus démontré prouve du moins qu'il n'en existe pas de semblables, quand l'ordre n de la fonction est un nombre premier, puisqu'alors la limite trouvée se confond avec ce nombre. On peut encore démontrer cette assertion, lorsque n est égal à 6, en faisant voir qu'une fonction de six lettres ne peut obtenir moins de six valeurs, quand elle en a plus de deux. On y parvient, à l'aide des considérations suivantes.

Soit K une fonction du sixième ordre, et désignons toujours par 1, 2, 3, 4, 5, 6, les indices qui affectent les six quantités qu'elle renferme; le nombre total des valeurs possibles de la fonction K sera égal au produit

$$1.2.3.4.5.6 = 720.$$

Soient maintenant α, β, γ, trois des six indices pris à volonté, et K_1 une des valeurs de K. Le nombre des permutations que l'on peut former avec les trois indices α, β, γ, étant égal au produit

$$1.2.3 = 6,$$

on pourra toujours déduire de la valeur K_1 cinq autres valeurs de la fonction K au moyen de transpositions ou de substitutions circulaires du troisième degré opérées entre les indices α, β, γ. Soient

$$K_2,\ K_3,\ K_4,\ K_5,\ K_6,$$

les nouvelles valeurs dont il s'agit; les six valeurs

$$K_1,\ K_2,\ K_3,\ K_4,\ K_5,\ K_6,$$

Digitized by Google

seront toutes différentes les unes des autres, ou bien elles seront égales deux à deux, trois à trois, ou toutes égales entre elles. Dans la première hypothèse, le nombre des valeurs différentes de la fonction donnée, sera au moins égal à 6. Dans les trois autres hypothèses, une au moins des valeurs

$$K_2,\ K_3,\ K_4,\ K_5,\ K_6,$$

sera égale à K_1; et par suite, on pourra, sans altérer la valeur K_1, échanger entre eux dans cette valeur deux ou trois des indices α, β, γ, soit au moyen d'une simple transposition, soit au moyen d'une substitution circulaire du troisième degré.

Supposons maintenant que l'on partage en plusieurs groupes les six indices 1, 2, 3, 4, 5, 6, de manière à renfermer dans un même groupe deux indices qui sont à-la-fois compris, soit dans une transposition, soit dans une substitution circulaire du troisième degré qui ne change pas la valeur K_1. D'après ce qui précède, pour que la fonction donnée puisse obtenir moins de six valeurs, il est nécessaire que, sur trois indices α, β, γ pris à volonté, deux au moins se trouvent compris dans un même groupe; et dans ce cas, on ne pourra évidemment former que deux groupes différens, l'un de ces deux groupes pouvant être composé d'un seul indice. Il reste à savoir combien la fonction K peut obtenir de valeurs différentes, quand le nombre des groupes ainsi formé est égal à 2, et quand ce même nombre se réduit à l'unité; l'ordre établi entre trois indices pris à volonté pouvant être interverti d'une certaine manière, sans que la valeur K_1 soit altérée.

Supposons d'abord que les indices se partagent en deux groupes. Soient α et β deux indices pris dans l'un des groupes, et γ un indice pris dans l'autre groupe. Puisqu'on peut échanger entre eux deux de ces trois indices sans altérer la valeur K_1, et que l'indice γ ne peut être échangé avec l'un des deux autres, il est clair que la valeur K_1 ne sera pas altérée par la transposition (α, β). Par suite, cette

Digitized by Google

valeur ne pourra être changée par aucune substitution opérée entre les indices d'un même groupe ; mais elle sera nécessairement altérée par les transpositions ou substitutions qui feront passer dans un des groupes une partie des indices de l'autre : on peut même assurer que deux valeurs de K, pour lesquelles la composition des deux groupes sera différente, seront nécessairement inégales ; car si cela n'avait pas lieu, les valeurs de K relatives aux diverses manières dont on peut composer les deux groupes dont il s'agit, seraient égales deux à deux, trois à trois, &c.... ou toutes égales entre elles. L'une d'elles serait donc égale à la valeur K, de la fonction K, et relativement à cette même valeur, il y aurait plusieurs manières de composer les deux groupes, ce qui est absurde. Ainsi, pour obtenir les valeurs différentes, il suffira de faire passer successivement tous les indices d'un groupe dans l'autre, ou d'échanger les deux groupes entre eux. Cela posé, on obtiendra les résultats suivans.

Si l'un des groupes est composé de cinq indices, et l'autre d'un seul; comme on pourra faire passer successivement dans ce dernier groupe chacun des indices 1, 2, 3, 4, 5, 6, on obtiendra en tout six valeurs différentes de la fonction K.

Si l'un des groupes est composé de quatre indices, et l'autre de deux; comme on pourra faire passer successivement dans ce dernier groupe toutes les combinaisons des six indices pris deux à deux, on obtiendra en tout quinze valeurs différentes de la fonction.

Enfin, si les deux groupes sont formés chacun de trois indices, et qu'on ne puisse échanger ces deux groupes; en faisant passer successivement dans l'un d'eux toutes les combinaisons des indices pris trois à trois, on obtiendra en tout vingt valeurs différentes de la fonction donnée. Le nombre de ces valeurs deviendrait moitié moindre, et se réduirait à dix, si l'on pouvait échanger entre eux les deux groupes, c'est-à-dire, substituer en même temps tous les indices du premier groupe à ceux du second, et réciproquement.

Digitized by Google

Ainsi, lorsque les indices peuvent être partagés en deux groupes, de telle manière que la transposition de deux indices renfermés dans un même groupe ne change pas la valeur K_1, le nombre des valeurs différentes que la fonction K peut recevoir est nécessairement un de ceux-ci,

$$6, \quad 15, \quad 20, \quad 10.$$

Pour offrir des exemples de ces différens cas, il suffit de citer les quatre fonctions suivantes,

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 + a_6,$$
$$a_1 a_2 a_3 a_4 + a_5 a_6,$$
$$a_1 a_2 a_3 + 2a_4 a_5 a_6,$$
$$a_1 a_2 a_3 + a_4 a_5 a_6.$$

Dans chacune de ces fonctions, les indices se partagent en deux groupes, lorsqu'on rassemble dans un même groupe ceux qui sont à-la-fois compris dans des transpositions ou substitutions circulaires du troisième degré qui ne changent pas la valeur de la fonction. Voyons maintenant ce qui arriverait, si tous les indices se trouvaient alors renfermés dans un seul groupe.

Dans cette dernière hypothèse, étant donnée une substitution circulaire du second ou du troisième degré qui ne change pas la valeur K_1 de la fonction K, on pourra toujours trouver une autre substitution de même espèce qui ne change pas cette valeur, et qui ait un ou deux indices communs avec la première. Cela posé, il est facile de voir que toutes les transpositions opérées sur K_1 entre deux indices pris à volonté dans les deux substitutions dont il s'agit, conduiront à une même valeur de la fonction K. Et en effet, si les deux substitutions dont il s'agit ont deux indices communs α et β, il pourra arriver, ou que l'une d'elles soit du second degré et l'autre du troisième, ou qu'elles soient toutes deux du troisième degré. Dans le premier cas, elles pourront être représentées par

Digitized by Google

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta \\ \beta\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha\beta\gamma \\ \beta\gamma\alpha \end{pmatrix},$$

γ étant un troisième indice; et puisque la seconde ne change pas la valeur $K_{,,}$ on prouvera par un raisonnement semblable à ceux qu'on a déjà faits en pareille circonstance, que les trois substitutions ou transpositions

$$(\alpha, \beta), \quad (\alpha, \gamma), \quad (\beta, \gamma),$$

donnent la même valeur de K. Dans le second cas, les deux substitutions données pourront être représentées par

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta\gamma \\ \beta\gamma\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha\beta\delta \\ \beta\delta\alpha \end{pmatrix},$$

γ et δ étant deux nouveaux indices. En vertu de la première, les trois transpositions

$$(\alpha, \beta), \quad (\alpha, \gamma), \quad (\beta, \gamma)$$

donneront la même valeur de K. En vertu de la seconde, les trois transpositions

$$(\alpha, \beta), \quad (\alpha, \delta), \quad (\beta, \delta)$$

donneront aussi la même valeur de K; et comme la transposition (α, β) ne peut donner qu'une seule valeur de K, il en résulte que les cinq transpositions

$$(\alpha, \beta), \quad (\alpha, \gamma), \quad (\beta, \gamma), \quad (\alpha, \delta), \quad (\beta, \delta)$$

conduiront au même résultat.

Supposons maintenant que les deux substitutions données aient un seul indice commun. Il pourra arriver, ou que ces deux substitutions soient du second degré, ou que l'une soit du second degré et l'autre du troisième, ou que toutes deux soient du troisième degré.

Pour donner un exemple du premier cas, soient

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta \\ \beta\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ \gamma\alpha \end{pmatrix},$$

deux

Digitized by Google

deux substitutions qui ne changent pas la valeur K_1 : ces deux substitutions équivalent aux deux transpositions (α, β), (α, γ); et comme, en vertu de la première, on peut faire passer l'indice β à la place de l'indice α sans déplacer l'indice γ, il est clair que les indices β et γ jouiront respectivement des mêmes propriétés que les indices α et γ, en sorte que la transposition

$$(\beta, \gamma)$$

ne changera pas la valeur K_1.

Soient, dans le second cas,

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta \\ \beta\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha\gamma\delta \\ \gamma\delta\alpha \end{pmatrix},$$

les deux substitutions données : on pourra, en opérant une ou deux fois de suite la seconde substitution, faire passer successivement l'indice γ et l'indice δ à la place de l'indice α, sans déplacer l'indice β. Par suite, les trois transpositions

$$(\alpha, \beta), \quad (\beta, \gamma), \quad (\beta, \delta)$$

ne changeront pas la valeur K_1; et on en conclura, comme dans le cas précédent, que les transpositions

$$(\alpha, \gamma), \quad (\alpha, \delta), \quad (\gamma, \delta)$$

ne la changeront pas non plus.

Enfin, soient, dans le troisième cas,

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta\gamma \\ \beta\gamma\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha\delta\varepsilon \\ \delta\varepsilon\alpha \end{pmatrix},$$

les deux substitutions données : on pourra, en opérant une ou deux fois de suite la seconde substitution, faire passer successivement les indices δ et ε à la place de l'indice α, sans déplacer les indices β et γ; et l'on en conclura que les substitutions

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta\gamma \\ \beta\gamma\alpha \end{pmatrix},$$

Digitized by Google

$$\begin{pmatrix} \delta\beta\gamma \\ \beta\gamma\delta \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon\beta\gamma \\ \beta\gamma\varepsilon \end{pmatrix}$$

ne changent pas la valeur K_1 : par suite, les transpositions opérées entre deux quelconques des indices α, β, γ, δ, ε donneront une même valeur de la fonction K.

Si l'on étend de proche en proche les raisonnemens que l'on vient de faire aux indices compris dans les diverses substitutions, qui, par hypothèse, ne changent pas la valeur K_1 : on en conclura que les transpositions effectuées sur K_1 entre les six indices 1, 2, 3, 4, 5, 6, considérés deux à deux, conduisent toutes à une même valeur de la fonction K, que je désignerai par K_2 ; par suite, K_1 conservera la même valeur après un nombre pair de transpositions successives, et sera changé en K_2 après un nombre impair de transpositions. La fonction aura donc deux valeurs, si K_1 et K_2 sont différens l'un de l'autre ; elle n'en aura qu'une seule, c'est-à-dire, qu'elle deviendra symétrique, si l'on a

$$K_2 = K_1.$$

En résumant ce qui a été dit ci-dessus, on voit qu'une fonction du sixième ordre ne peut avoir moins de six valeurs, à moins que le nombre de ces valeurs ne devienne égal à 2 ou à l'unité.

Tous les théorèmes énoncés dans le présent mémoire subsisteraient encore, si quelques-unes des quantités renfermées dans les fonctions que l'on considère s'y trouvaient multipliées par zéro : mais alors ces dernières quantités venant à disparaître, il faudrait, pour déterminer l'ordre de chaque fonction, avoir égard non pas au nombre des quantités qu'elle renferme, mais au nombre de ces quantités augmenté du nombre de celles qu'on peut substituer à leur place. Ainsi, par exemple, si l'on désigne par a_1, a_2, a_3, a_4 les quatre racines d'une équation du quatrième degré, la quantité

Digitized by Google

$$a_2 + a_4,$$

considérée comme une fonction de ces racines, sera du quatrième ordre, et cette fonction sera susceptible de six valeurs qui seront respectivement

$$a_1 + a_2,\ a_1 + a_3,\ a_1 + a_4,\ a_2 + a_3,\ a_2 + a_4,\ a_3 + a_4.$$

Il ne sera peut-être pas inutile d'indiquer ici les conditions auxquelles une fonction doit satisfaire, pour que le nombre de ses valeurs se réduise à 2. Soit K une fonction de cette nature, et désignons par K_1, K_2 les deux valeurs dont il s'agit. Le nombre de ces valeurs étant égal à 2, et par conséquent inférieur à 6, si l'on partage en plusieurs groupes les indices contenus dans la fonction, de manière à renfermer dans un même groupe deux indices qui sont à-la-fois compris, soit dans une transposition, soit dans une substitution circulaire du troisième degré qui ne change pas la valeur K_1; on fera voir, comme ci-dessus, que sur trois indices pris à volonté, deux au moins seront compris dans un même groupe, d'où il suit qu'on ne pourra former plus de deux groupes différens. D'ailleurs, en appliquant ici les raisonnemens dont nous avons déjà fait usage, on prouvera que le nombre des groupes ne saurait être égal à 2, à moins que les diverses valeurs de la fonction, relatives aux différentes manières dont on peut composer ces deux groupes en faisant passer les indices de l'un dans l'autre, ne soient toutes inégales; et dans ce cas, le nombre des valeurs de la fonction serait nécessairement supérieur à 2, ce qui est contre l'hypothèse. Par suite, pour que cette hypothèse subsiste, il est nécessaire que tous les indices soient renfermés dans un seul groupe; d'où l'on peut conclure, au moyen de la théorie précédemment exposée, que K_1 doit conserver le même signe après un nombre pair de transpositions d'indices, et se changer en K_2 après un nombre impair de transpositions. Ainsi, par exemple, toute fonction qui, comme la la suivante,

Digitized by Google

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)\ldots(a_{n-1}-a_n)$$

ne peut obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires, conservera toujours le même signe après un nombre pair de transpositions d'indices, et changera toujours de signe après un nombre impair de transpositions; d'où il suit que chacun de ses termes soumis aux transpositions que l'on considère, recevra alternativement le signe + et le signe —.

Digitized by Google

MÉMOIRE

Sur les Fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment ;

Lu à l'Institut le 30 Novembre 1812.

Par A. L. CAUCHY, *Ingénieur des Ponts et Chaussées.*

PREMIÈRE PARTIE.

Considérations générales sur les Fonctions symétriques alternées.

§. 1.er APRÈS les fonctions qu'on appelle ordinairement *symétriques*, et qui ne changent ni de valeur ni de signe par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment, les plus remarquables sont celles qui peuvent changer de signe, mais non pas de valeur, en vertu des mêmes transpositions. Lorsqu'on développe ces dernières, on les trouve composées de plusieurs termes alternativement positifs et négatifs ; et pour les transformer en fonctions symétriques ordinaires, il suffirait de changer le signe des termes négatifs. En faveur de cette analogie, je comprendrai sous la dénomination commune de fonctions symétriques toutes les fonctions qui ne changent pas de valeur, mais tout au plus de signe en vertu de transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment ; et pour distinguer les fonctions dont les différens termes conservent le même signe après chaque transposition,

Digitized by Google

de celles dont les termes deviennent alternativement positifs et négatifs, j'appellerai les premières, fonctions *symétriques permanentes*, et les secondes, fonctions *symétriques alternées*. Il suit du précédent mémoire, que ces deux espèces de fonctions sont les seules dont la valeur absolue ne change pas. Je partagerai encore ici les fonctions en plusieurs ordres suivant le nombre des quantités qu'elles renferment, et je désignerai toujours par des lettres affectées d'indices, telles que

$$a_1, \quad a_2 \ldots\ldots a_n,$$

les n variables que renferme une fonction symétrique de l'ordre n.

Cela posé, concevons les diverses suites de quantités

$$a_1, \; a_2 \ldots\ldots a_n,$$
$$b_1, \; b_2 \ldots\ldots b_n,$$
$$c_1, \; c_2 \ldots\ldots c_n,$$
$$\&c.\ldots\ldots$$

tellement liées entre elles, que la transposition de deux indices pris dans l'une des suites, nécessite la même transposition dans toutes les autres ; alors, les quantités

$$b_1, \; c_1 \ldots b_2, \; c_2 \ldots b_3, \; c_3 \ldots$$

pourront être considérées comme des fonctions semblables de

$$a_1, \; a_2, \; a_3 \ldots\ldots;$$

et par suite, les fonctions de

$$a_1, \; b_1, \; c_1 \ldots a_2, \; b_2, \; c_2, \; \&c.\ldots a_n, \; b_n, \; c_n \ldots$$

qui ne changeront pas de valeur, mais tout au plus de signe, en vertu de transpositions opérées entre les indices $1, 2, 3 \ldots n$, devront être rangées parmi les fonctions symétriques de $a_1, a_2 \ldots a_n$, ou, ce qui revient au même, des indices $1, 2, 3 \ldots n$. Ainsi

Digitized by Google

$$a_1^2 + a_2^2 + 4a_1 a_2,$$
$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + 2c_1 c_2 c_3,$$
$$a_1 b_2 + a_2 b_3 + a_3 b_1 + a_2 b_1 + a_1 b_3 + a_3 b_2,$$
$$\cos.(a_1 - a_2) \cos.(a_1 - a_3) \cos.(a_2 - a_3),$$

seront des fonctions symétriques permanentes, la première du second ordre et les autres du troisième; et au contraire,

$$a_1 b_2 + a_2 b_3 + a_3 b_1 - a_2 b_1 - a_1 b_3 - a_3 b_2,$$
$$\sin.(a_1 - a_2) \sin.(a_1 - a_3) \sin.(a_2 - a_3)$$

seront des fonctions symétriques alternées du troisième ordre.

Lorsqu'une fonction n'est pas symétrique, elle peut obtenir un nombre déterminé de valeurs différentes les unes des autres, lorsqu'on échange entre elles les quantités qui la composent : mais alors la somme de ces valeurs est une fonction symétrique permanente; et si en ajoutant ces mêmes valeurs, on leur donne alternativement le signe + et le signe —, suivant une loi que nous déterminerons ci-après, on obtiendra pour l'ordinaire une fonction symétrique alternée.

On peut généraliser cette définition des fonctions symétriques, en supposant que non-seulement on échange entre elles les quantités qui composent la fonction non symétrique dont il s'agit, mais qu'on les échange encore avec d'autres quantités qui ne soient pas comprises dans cette même fonction. Cela posé, on pourra considérer, en général, une fonction symétrique comme formée de plusieurs termes que l'on déduit les uns des autres par des transpositions opérées entre les quantités qu'elle renferme, ou, ce qui revient au même, entre les indices qui affectent ces quantités; et l'on conçoit que pour déterminer une fonction symétrique permanente ou alternée, il suffira de connaître avec l'un de ses termes le nombre d'indices qu'elle doit renfermer, c'est-à-dire, l'ordre de la fonction donnée.

Il suit de ce qui précède, que la théorie des fonctions symétriques doit embrasser deux espèces d'opérations différentes.

Digitized by Google

Les unes ont pour objet de déduire les uns des autres les termes de même espèce qui composent une fonction symétrique donnée. Ce sont les opérations que j'ai désignées dans le précédent mémoire sous le nom de *substitutions* et de *transpositions*.

Les autres ont pour objet de déterminer une fonction symétrique permanente ou alternée, formée de plusieurs termes de même espèce, au moyen de l'un des termes dont il s'agit. J'indiquerai ces dernières opérations par le signe S et de la manière suivante.

Soit K une fonction non symétrique prise à volonté. Désignons par des lettres grecques α, β, γ, &c.... les indices renfermés dans K, et soit m le nombre de ces indices ; enfin soit n un nombre entier quelconque supérieur ou égal au plus grand des indices dont il s'agit. La somme des valeurs différentes que l'on peut déduire de la fonction K par des transpositions opérées entre les indices α, β, γ, &c.... sera désignée par la notation

$$S(K),$$

et la somme des valeurs différentes qu'on déduira de la fonction K, si l'on échange les indices α, β, γ, &c.... non-seulement entre eux, mais encore avec les autres indices compris dans la suite

$$1, 2, 3 \ldots n-1, n,$$

sera désignée par la notation

$$S^n(K).$$

Des deux fonctions symétriques permanentes, $S(K)$, $S^n(K)$, l'une renfermera seulement les indices α, β, γ, &c...., l'autre renfermera tous les indices $1, 2, 3 \ldots n$. La première sera de l'ordre m, et la seconde de l'ordre n : elles deviendraient toutes deux égales entre elles, si l'on supposait $m = n$; mais dans tout autre cas, la première ne sera qu'une partie de la seconde.

Supposons maintenant, ce qui bientôt sera démontré possible, que les

Digitized by Google

les valeurs déduites de la fonction K par un nombre pair de transpositions opérées entre les indices α, β, γ, &c.... soient différentes des valeurs déduites de la même fonction par un nombre impair de transpositions. Désignons les premières valeurs, entre lesquelles la fonction K se trouve comprise, par

$$K_\alpha, \quad K_\beta, \quad K_\gamma, \quad \&c....$$

et les autres valeurs par

$$K_\lambda, \quad K_\mu, \quad K_\nu, \quad \&c....;$$

$$K_\alpha + K_\beta + K_\gamma + ... - K_\lambda - K_\mu - K_\nu, \ \&c....$$

sera une fonction symétrique alternée que je désignerai par

$$S(\pm K),$$

et

$$-K_\alpha - K_\beta - K_\gamma - ... + K_\lambda + K_\mu + K_\nu + \&c...$$

sera encore une fonction symétrique alternée égale mais de signe contraire à la première, et que je désignerai par

$$S(\mp K).$$

De même, si les valeurs déduites de la fonction K par un nombre pair de transpositions opérées entre les indices $1, 2, 3 \ldots n$, sont différentes des valeurs obtenues par un nombre impair de transpositions opérées entre les mêmes indices, et que l'on représente par

$$K_\zeta, \quad K_\eta, \quad K_\theta \ldots \ \&c....,$$

les premières valeurs dont il s'agit, et les secondes par

$$K_\rho, \quad K_\sigma, \quad K_\tau \ldots \ \&c....;$$

$$K_\zeta + K_\eta + K_\theta + ... - K_\rho - K_\sigma - K_\tau \ \&c....$$

et

$$-K_\zeta - K_\eta - K_\theta - ..... + K_\rho + K_\sigma + K_\tau$$

Digitized by Google

seront deux fonctions symétriques égales mais de signes contraires, que je désignerai respectivement par

$$S^n(\pm K),$$
$$S^n(\mp K).$$

Des deux fonctions symétriques alternées $S(\pm K)$, $S^n(\pm K)$, la première est de l'ordre m et la seconde de l'ordre n. Ces deux fonctions deviendraient égales entre elles, si l'on avait $m = n$; mais dans le cas contraire, la première ne sera qu'une partie de la seconde. Quant aux deux notations $S(\mp K)$, $S^n(\mp K)$, on les déduit évidemment des deux précédentes en y changeant le signe de K, d'où il suit que les quatre notations relatives aux fonctions symétriques alternées se réduisent effectivement à 2.

Si dans ce qui précède on suppose, pour abréger,

$$K_\alpha + K_\beta + K_\gamma + \ldots = E,$$
$$K_\lambda + K_\mu + K_\nu + \ldots = F,$$

chacune des fonctions E, F, ne pourra obtenir que deux valeurs par suite des transpositions opérées entre les indices α, β, γ... compris dans la fonction K, et l'on aura

$$S(K) = E + F, \quad S(\pm K) = -S(\mp K) = E - F.$$

De même, si l'on suppose

$$K_\zeta + K_\eta + K_\theta + \ldots = G,$$
$$K_\rho + K_\sigma + K_\tau + \ldots = H,$$

chacune des fonctions G, H, ne pourra obtenir que deux valeurs par suite des transpositions opérées entre les indices 1, 2, 3...n, et l'on aura

$$S^n(K) = G + H, \quad S^n(\pm K) = -S^n(\mp K) = G - H.$$

Pour comprendre dans un seul exemple les quatre notations précé-

Digitized by Google

dentes, supposons

$$K = a_1 b_2,$$

et l'on trouvera dans ce cas,

$$S(a_1b_2)=a_1b_2+a_2b_1,\quad S^3(a_1b_2)=a_1b_2+a_2b_3+a_3b_1+a_2b_1+a_1b_3+a_3b_2,$$
$$S(\pm a_1b_2)=a_1b_2-a_2b_1,\quad S^3(\pm a_1b_2)=a_1b_2+a_2b_3+a_3b_1-a_2b_1-a_1b_3-a_3b_2.$$

Pour représenter au moyen des notations précédentes une fonction symétrique permanente ou alternée, on n'est obligé d'écrire qu'un seul de ses termes. Je désignerai celui-ci sous le nom de terme *indicatif*, parce qu'il suffit pour indiquer la valeur de la fonction toute entière. Dans l'exemple précédent $a_1 b_2$ est le terme indicatif des quatre fonctions symétriques,

$$S(a_1b_2),\quad S^3(a_1b_2),\quad S(\pm a_1b_2),\quad S^3(\pm a_1b_2).$$

Au reste, on peut choisir pour terme indicatif un quelconque de ceux dont la fonction se compose. Seulement lorsqu'il s'agit d'une fonction symétrique alternée, on doit placer le signe $\pm$ devant ce terme s'il se trouve affecté du signe $+$ dans le développement de la fonction donnée, et le signe $\mp$ dans le cas contraire. On trouvera de cette manière,

$$S(a_1 b_2) = S(a_2 b_1),$$
$$S^3(a_1 b_2) = S^3(a_2 b_1) = S^3(a_1 b_3) = \&c.\ldots,$$
$$S(\pm a_1 b_2) = S(\mp a_2 b_1),$$
$$S^3(\pm a_1 b_2) = S^3(\mp a_2 b_1) = S^3(\mp a_1 b_3) = \&c.\ldots.$$

5. 2. Toute fonction K qui n'est pas symétrique, peut devenir le terme indicatif d'une fonction symétrique permanente $S(K)$ ou $S^n(K)$. Si la fonction K est elle-même symétrique et permanente relativement aux indices qu'elle renferme, on aura

$$S(K) = K;$$

Digitized by Google

et si elle est symétrique et permanente relativement aux indices 1, 2, 3...n, on aura

$$S^n(K) = K.$$

La même remarque ne peut pas s'étendre aux fonctions symétriques alternées; et pour qu'une fonction, qui n'est pas symétrique, puisse devenir le terme indicatif d'une fonction symétrique alternée, il est nécessaire qu'elle satisfasse à certaines conditions que nous allons déterminer tout à l'heure.

Soit toujours K une fonction quelconque non symétrique. Soient

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots\ldots \zeta, \eta,$$

les indices qu'elle renferme. Désignons par m le nombre de ces indices, et par Q le produit

$$1 . 2 . 3 \ldots\ldots m.$$

On a fait voir dans le précédent mémoire, comment les diverses valeurs que l'on peut déduire de la fonction K par des transpositions opérées entre les indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots\ldots \zeta, \eta$, correspondaient aux diverses permutations que l'on peut former avec ces mêmes indices, et dont le nombre est égal à Q. Soient

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3 \ldots\ldots A_Q$$

les permutations dont il s'agit, et désignons par

$$K_1, \quad K_2, \quad K_3 \ldots\ldots K_Q$$

la série des valeurs K qui leur correspondent. La somme des valeurs inégales comprises dans cette série sera équivalente à la fonction symétrique permanente $S(K)$. Mais, pour obtenir s'il y a lieu, au moyen des termes de la série, la fonction symétrique alternée $S(\pm K)$, il sera nécessaire d'établir une distinction entre les termes qui devront être considérés comme positifs, et ceux qui devront être considérés comme négatifs. Par suite, on devra faire un partage entre les termes

Digitized by Google

dont il s'agit, ou, ce qui revient au même, entre les permutations

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3 \ldots\ldots A_Q$$

qui leur correspondent. On peut effectuer ce partage à l'aide des considérations suivantes.

Soit A_s une quelconque des permutations formées avec les indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots\ldots \zeta, \eta$, et désignons à l'ordinaire par

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_s \end{pmatrix}$$

la substitution qui sert à déduire la permutation A_s de la permutation A_1. Si cette substitution est du genre de celles que j'ai nommées substitutions circulaires, on pourra passer en revue tous les indices qu'elle renferme, en comparant deux à deux les indices qui se correspondent dans ses deux termes; et dans ce cas l'on pourra ranger en cercle tous les indices donnés α, β, γ, &c...., de manière que deux indices pris dans le cercle à la suite l'un de l'autre, et d'orient en occident, soient toujours ceux qui sont situés l'un au-dessus de l'autre dans la substitution donnée, savoir, le premier dans le terme supérieur, et le second dans le terme inférieur de cette substitution. Dans le cas contraire, si l'on compare deux à deux les indices correspondans en partant d'un indice déterminé pris dans le terme supérieur, on se trouvera ramené à cet indice avant d'avoir passé tous les autres en revue; et l'on sera ainsi conduit à ranger les indices donnés en plusieurs cercles, et à former des cercles d'un seul indice toutes les fois qu'on trouvera dans les deux termes de la substitution des indices correspondans égaux entre eux. Alors la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_s \end{pmatrix}$ sera équivalente au produit des substitutions circulaires correspondantes à ces différens cercles. Ainsi, par exemple, si l'on suppose α, β, γ, &c.... respectivement égaux à 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, et que l'on suppose en outre

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2.3.4.5.6.7 \\ 3.2.6.5.4.1.7 \end{pmatrix},$$

Digitized by Google

on sera conduit, par la comparaison des indices correspondans pris dans les deux termes de la substitution précédente, à former les quatre cercles

dont les deux derniers ne comprennent qu'un seul indice. Par suite, la substitution donnée sera équivalente au produit des quatre substitutions circulaires

$$\begin{pmatrix} 1.3.6 \\ 3.6.1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4.5 \\ 5.4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix},$$

dont les deux dernières sont identiques ; et l'on aura

$$\begin{pmatrix} 1.2.3.4.5.6.7 \\ 3.2.6.5.4.1.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.3.6 \\ 3.6.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.5 \\ 5.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix},$$

ce dont il est facile de s'assurer immédiatement.

Si l'on supposait $A_s = A_1$, la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_s \end{pmatrix}$ deviendrait identique, et par suite serait décomposable en autant de substitutions circulaires identiques qu'elle renferme d'indices. La comparaison des indices correspondans conduirait donc alors à former un nombre égal à m de cercles différens composés chacun d'un seul indice.

Si l'on suppose les deux permutations A_1, A_s différentes l'une de l'autre, le nombre des cercles obtenus par la méthode précédente sera inférieur à m. Désignons par g ce même nombre. Supposons de plus que la transposition de deux indices pris à volonté dans la permutation A_s change celle-ci en A, et soit h le nombre des cercles que l'on obtient par la comparaison des indices correspondans de la substitution

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_s \end{pmatrix};$$

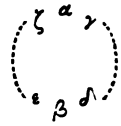
il est facile de prouver que l'on aura toujours

Digitized by Google

$$h = g \pm 1.$$

En effet la transposition (α, β), qui par hypothèse change la permutation A_s en A_t, changera aussi la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_s \end{pmatrix}$ en celle-ci $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_t \end{pmatrix}$: d'ailleurs, cette transposition n'ayant évidemment aucune influence sur les cercles qui ne renferment ni l'indice α ni l'indice β, il suffira de considérer les cercles qui renferment les deux indices en question. Cela posé, il peut arriver, ou que les indices α et β soient tous deux compris dans un des cercles relatifs à la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_s \end{pmatrix}$, ou qu'ils soient compris dans deux cercles différens. Nous allons examiner chacun de ces deux cas séparément.

Supposons d'abord que les indices α et β soient compris dans un seul des cercles que fournit la décomposition de $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_s \end{pmatrix}$ en substitutions circulaires, et soit



le cercle dont il s'agit ; alors $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_s \end{pmatrix}$ sera équivalente au produit de plusieurs substitutions circulaires, dont l'une sera

$$\begin{pmatrix} \alpha\gamma \ldots\ldots\ldots \delta\beta\varepsilon \ldots\ldots \zeta \\ \gamma \ldots\ldots\ldots \delta\beta\varepsilon \ldots\ldots \zeta\alpha \end{pmatrix}.$$

En vertu de la transposition (α, β) effectuée sur le second terme de la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_s \end{pmatrix}$, la substitution circulaire dont il s'agit se changera dans la substitution suivante ;

$$\begin{pmatrix} \alpha\gamma \ldots\ldots\ldots \delta\beta\varepsilon \ldots\ldots \zeta \\ \gamma \ldots\ldots\ldots \delta\alpha\varepsilon \ldots\ldots \zeta\beta \end{pmatrix},$$

qui est elle-même décomposable en deux substitutions circulaires, savoir,

$$\begin{pmatrix} \alpha\gamma \ldots\ldots \delta \\ \gamma \ldots\ldots \delta\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \beta\varepsilon \ldots\ldots \zeta \\ \varepsilon \ldots\ldots \zeta\beta \end{pmatrix}.$$

Digitized by Google

Ainsi, dans le cas que l'on considère, la transposition (α, β) décompose le cercle qui renferme les indices α et β en deux cercles distincts. La valeur de g se trouve donc par ce moyen augmentée d'une unité, et par suite on a

$$h = g + 1.$$

Supposons, en second lieu, que les indices α et β soient compris dans deux cercles différens; et soit

le cercle qui renferme l'indice α, et

le cercle qui renferme l'indice β : alors parmi les diverses substitutions circulaires, dont le produit équivaut à $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_s \end{pmatrix}$, se trouveront comprises les deux suivantes,

$$\begin{pmatrix} \alpha\gamma\ldots\ldots\varepsilon \\ \gamma\ldots\ldots\varepsilon\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \beta\delta\ldots\ldots\zeta \\ \delta\ldots\ldots\zeta\beta \end{pmatrix};$$

mais celles-ci, en vertu de la transposition (α, β) effectuée sur le second terme de la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_s \end{pmatrix}$, se réuniront en une seule substitution circulaire, qui sera

$$\begin{pmatrix} \alpha\gamma\ldots\ldots\varepsilon\beta\delta\ldots\ldots\zeta \\ \gamma\ldots\ldots\varepsilon\beta\delta\ldots\ldots\zeta\alpha \end{pmatrix}.$$

Ainsi, dans le second cas, le nombre des cercles relatifs à la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_t \end{pmatrix}$ sera inférieur d'une unité au nombre des cercles relatifs à la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_s \end{pmatrix}$, et l'on aura

$$h = g - 1.$$

La démonstration précédente subsiste dans le cas même où chacun des

Digitized by Google

des indices α, β formerait à lui seul un cercle. En effet, la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_s \end{pmatrix}$ renfermerait alors les deux substitutions identiques $\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \beta \\ \beta \end{pmatrix}$, qui, en vertu de la transposition (α, β) opérée sur A_s, se trouveraient converties en une seule substitution circulaire, savoir,

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta \\ \beta\alpha \end{pmatrix};$$

on aura donc toujours ou $h = g + 1$, ou $h = g - 1$.

Par suite de la proposition qu'on vient d'établir, h sera nécessairement un nombre pair si g est un nombre impair, et réciproquement. Cela posé, partageons en deux classes toutes les substitutions qui ont pour termes deux permutations prises dans la suite

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3 \ldots\ldots A_s,$$

de manière à renfermer dans l'une des classes toutes les substitutions qui correspondent à un nombre pair de cercles, et dans l'autre classe toutes les substitutions qui correspondent à un nombre impair de cercles. Enfin supposons que la première des deux classes soit celle qui renferme les substitutions identiques

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_2 \\ A_2 \end{pmatrix}, \quad \&c\ldots\ldots$$

La substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_s \end{pmatrix}$ sera de première classe si m et g sont deux nombres pairs ou deux nombres impairs, ou, ce qui revient au même, si

$$m - g$$

est un nombre pair; la même substitution sera de seconde classe dans le cas contraire. Il suit de cette définition et du théorème démontré ci-dessus, que, si l'on effectue sur le second terme d'une substitution de première classe plusieurs transpositions successives, les nouvelles substitutions obtenues par ce moyen seront alternativement de seconde

Digitized by Google

et de première classe; de sorte qu'on obtiendra toujours une substitution de première classe après un nombre pair de transpositions, et une substitution de seconde classe après un nombre impair de transpositions. Supposons, par exemple, que l'on ait déduit la substitution $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$ de la substitution identique $\begin{pmatrix} A_s \\ A_s \end{pmatrix}$ au moyen de plusieurs transpositions opérées sur le second terme de cette dernière : le nombre de ces transpositions sera nécessairement pair, si la substitution $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$ est de première classe; il sera nécessairement impair dans le cas contraire. Ainsi, deux permutations A_s, A_t ne peuvent être déduites l'une de l'autre par un nombre pair de transpositions, que dans le cas où la substitution qui les a pour termes est de première classe; elles ne peuvent être déduites l'une de l'autre par un nombre impair de transpositions que dans le cas où cette substitution est de seconde classe. Il est au reste indifférent de prendre pour premier terme de la substitution l'une ou l'autre des permutations dont il s'agit. En vertu de la remarque qu'on vient de faire, les permutations

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3 \ldots\ldots A_Q,$$

se partageront naturellement en deux classes, dont la première comprendra par exemple la permutation A_1 avec toutes celles que l'on peut en déduire par un nombre pair de transpositions, et dont la seconde renfermera toutes les autres. Le partage étant ainsi fait, on sera toujours obligé d'effectuer un nombre pair de transpositions pour déduire deux permutations l'une de l'autre, si ces permutations sont comprises dans la même classe; et un nombre impair de transpositions, si ces permutations sont respectivement comprises dans les deux classes que l'on considère. De plus, on reconnaîtra facilement si deux permutations données A_1, A_s sont de même classe ou de classes opposées, à l'aide de la règle suivante.

Soit g le nombre des cercles résultans de la comparaison des indices qui se correspondent dans les deux termes de la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_s \end{pmatrix}$.

Digitized by Google

Les deux permutations A_1, A_2 seront de même classe, si $m - g$ est un nombre pair, et de classes opposées dans le cas contraire.

Ainsi, par exemple, si les indices $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ sont respectivement égaux à 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, la substitution

$$\begin{pmatrix} 1.2.3.4.5.6.7 \\ 3.2.6.5.4.1.7 \end{pmatrix}$$

étant équivalente au produit de quatre substitutions circulaires, on aura

$$m = 7, \quad g = 4, \quad m - g = 3,$$

et par suite, les deux permutations

$$1.2.3.4.5.6.7,$$
$$3.2.6.5.4.1.7$$

seront de classes opposées.

Désignons toujours par

$$K_1, \quad K_2 \ldots\ldots K_Q$$

la série des valeurs de K qui correspondent aux diverses permutations des indices donnés, et supposons $K_1 = K$. Les termes de la série précédente se partageront en deux classes distinctes, ainsi que les permutations qui leur correspondent. La première classe renfermera le terme K et tous ceux que l'on peut en déduire par un nombre pair de transpositions; la seconde renfermera tous les termes que l'on peut déduire de K par un nombre impair de transpositions. Soient respectivement

$$K_\alpha, \quad K_\beta, \quad K_\gamma \ldots\ldots$$

les termes inégaux compris dans la première classe, et

$$K_\lambda, \quad K_\mu, \quad K_\nu, \quad \&c. \ldots\ldots$$

les termes inégaux compris dans la seconde classe. Si les deux suites précédentes n'ont pas de termes qui leur soient communs, on aura

Digitized by Google

$$K_\alpha + K_\beta + K_\gamma + \ldots - K_\lambda - K_\mu - K_\nu - \&c. = S(\pm K).$$

Mais si deux termes pris l'un dans la première suite l'autre dans la seconde, par exemple K_α et K_λ, sont égaux entre eux, alors chacun des termes de la première suite deviendra égal à l'un des termes de la seconde. En effet, K_β étant un terme quelconque de la première suite différent de K_α, si l'on effectue simultanément sur les indices correspondans de ces deux termes un nombre impair de transpositions, au moyen desquelles K_α soit changé en K_λ; K_β se trouvera de cette manière changé en un terme K_μ de la seconde suite, et l'équation $K_\lambda = K_\alpha$ entraînera celle-ci $K_\mu = K_\beta$. On démontre aisément cette proposition à l'aide des principes établis dans le précédent mémoire. Cela posé l'expression $S(\pm K)$, qui désignait en général une fonction symétrique alternée, se trouvera, dans l'hypothèse que l'on considère, réduite à zéro. Dans tout autre cas, cette expression aura une valeur algébrique déterminée. Ainsi, la seule condition nécessaire pour que la fonction K puisse devenir le terme indicatif d'une fonction symétrique alternée de la forme

$$S(\pm K),$$

est que deux valeurs de cette fonction obtenues, l'une par un nombre pair et l'autre par un nombre impair de transpositions des indices renfermés dans K, soient toujours différentes l'une de l'autre. Si les indices $\alpha, \beta, \gamma,$ &c.... renfermés dans K deviennent respectivement égaux à

$$1, 2, 3 \ldots\ldots n,$$

et si l'on suppose en outre que les quantités affectées de quelqu'un de ces indices puissent avoir zéro pour coefficient dans la fonction K, l'expression $S(\pm K)$ se trouvera transformée en celle-ci

$$S^n(\pm K);$$

et par conséquent, la seule condition nécessaire pour qu'une fonction

Digitized by Google

non symétrique puisse devenir le terme indicatif d'une fonction symétrique alternée de la forme $S^n(\pm K)$, est que deux valeurs de la fonction obtenues l'une par un nombre pair de transpositions des indices 1, 2, 3 ... n, l'autre par un nombre impair de transpositions des mêmes indices, soient toujours différentes l'une de l'autre. Cette condition exige que le nombre des indices renfermés ostensiblement dans la fonction K soit égal à n ou à $n - 1$. Si donc on représente à l'ordinaire par m le nombre de ces indices, on aura nécessairement

$$m = n - 1,$$

ou

$$m = n.$$

Dans ce dernier cas, les deux expressions $S(\pm K)$, $S^n(\pm K)$ deviennent équivalentes. Au reste on pourra toujours reconnaître si deux termes pris à volonté dans une fonction symétrique alternée y sont affectés de même signe ou de signes contraires, au moyen de la règle qui sert à distinguer entre elles les permutations de première et de seconde classe. Ainsi, l'on pourra obtenir immédiatement le signe de chacun des termes, en le comparant au terme indicatif.

§. 3. D'après la définition que nous avons donnée des fonctions symétriques permanentes ou alternées, il est aisé de voir que le produit ou le quotient de deux fonctions symétriques alternées de l'ordre n est une fonction symétrique permanente de même ordre que les deux premières. Réciproquement, le produit ou le quotient de deux fonctions symétriques l'une permanente et l'autre alternée du même ordre est une fonction symétrique alternée de même ordre qu'elles.

Lorsque dans une fonction symétrique alternée on transpose deux indices α, β pris à volonté ; la fonction changeant alors de signe, il est nécessaire que tous les termes positifs deviennent respectivement égaux à ceux qui étaient négatifs, et réciproquement. Cela posé, concevons que l'on développe cette fonction suivant les puissances et les

Digitized by Google

produits des quantités qu'elle renferme. Il suit de la remarque précédente, 1.° que les termes positifs du développement seront en nombre égal à celui des termes négatifs; 2.° que tous les termes qui ne changent pas de valeur par la transposition de deux indices pris à volonté, disparaîtront nécessairement; 3.° que si l'on remplace dans tous les termes l'indice α par l'indice β, sans remplacer en même temps l'indice β par l'indice α, la fonction symétrique alternée se trouvera réduite à zéro. En effet, de cette manière on rendra équivalens entre eux les termes que l'on déduisait les uns des autres par la transposition (α, β), c'est-à-dire, les termes positifs et les termes négatifs. Ainsi, par exemple, si, dans l'expression

$$S(\pm a_1 b_2) = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

on remplace 2 par 1, cette expression deviendra

$$S(\pm a_1 b_1) = a_1 b_1 - a_1 b_1 = 0.$$

On peut encore déduire des considérations précédentes le théorème suivant.

Soit $S(\pm K)$ une fonction symétrique alternée quelconque. Désignons par α, β, γ, &c.... les indices qu'elle renferme, et par

$$\begin{array}{llll} a_\alpha, & a_\beta, & a_\gamma, & \&c... \\ b_\alpha, & b_\beta, & b_\gamma, & \&c.... \\ c_\alpha, & c_\beta, & c_\gamma, & \&c.... \\ \&c..... & & & \end{array}$$

les quantités qui dans cette fonction se trouvent affectées des indices α, β, γ, &c... Si l'on remplace

$$b_\alpha, c_\alpha, \&c.... \quad b_\beta, c_\beta, \&c.... \quad b_\gamma, c_\gamma, \&c....$$

par des fonctions semblables des quantités $a_\alpha, a_\beta, a_\gamma$, &c....; la fonction symétrique alternée deviendra divisible par chacune des quantités

Digitized by Google

$a_\alpha - a_\beta$,

$a_\alpha - a_\gamma$,

&c....

$a_\beta - a_\gamma$,

&c....

En effet, soient α et β deux indices pris à volonté. En vertu de ce qui précède, la fonction deviendra nulle si l'on suppose

$$a_\alpha = a_\beta.$$

Elle sera donc divisible par

$$a_\alpha - a_\beta.$$

Il suit de ce théorème que toute fonction symétrique alternée, qui ne renferme qu'une seule espèce de quantités telles que

$$a_\alpha, \quad a_\beta, \quad a_\gamma \ldots\ldots,$$

est divisible par les différences respectives des quantités dont il s'agit. Elle est donc aussi divisible par le produit de ces différences. Ainsi, par exemple, si l'on désigne par p, q, r, &c.... des nombres entiers pris à volonté, la fonction symétrique alternée

$$S(\pm a_\alpha{}^p, a_\beta{}^q, a_\gamma{}^r \ldots\ldots)$$

sera toujours divisible par le produit

$$(a_\beta - a_\alpha), (a_\gamma - a_\alpha) \ldots (a_\beta - a_\gamma) \text{ &c.....}$$

Cette même fonction deviendrait nulle, si deux des nombres p, q, r, &c.... étaient égaux entre eux.

De même, p, q, $r \ldots s$, t, désignant des nombres entiers quelconques inégaux,

$$S^n(\pm a_1{}^p a_2{}^q a_3{}^r \ldots\ldots a^s{}_{n-1} a_n{}^t)$$

sera une fonction symétrique alternée divisible par le produit

Digitized by Google

$$A = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\ldots(a_n - a_1)(a_3 - a_2)\ldots(a_n - a_2)\&c.\ldots(a_n - a_{n-1}).$$

Si l'on suppose

$$p = 0, \quad q = 1, \quad r = 2 \ldots s = n - 2, \quad t = n - 1;$$

la somme des exposans des lettres a_1, $a_2 \ldots\ldots a_n$ dans chaque terme de la fonction symétrique alternée

$$S^n(\pm a_1^{\circ}\, a_2^{1}\, a_3^{2} \ldots\ldots a_{n-1}^{n-2}\, a_n^{n-1})$$

sera

$$0 + 1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2};$$

Mais les facteurs du produit A étant aussi en nombre égal à $\frac{n(n-1)}{2}$, la somme des exposans des lettres a_1, $a_2 \ldots a_n$ dans chaque terme du développement de ce produit sera encore égale à ce nombre : par suite, le quotient qu'on obtiendra, en divisant la fonction symétrique alternée par le produit, sera une quantité constante. Soit c la quantité dont il s'agit, on aura

$$S^n(\pm a_1^{\circ}\, a_2^{1}\, a_3^{2} \ldots a_{n-1}^{n-2}\, a_n^{n-1}) = cA.$$

Pour déterminer c, on observera que le terme

$$a_1^{\circ},\ a_2^{1},\ a_3^{2} \ldots a_{n-1}^{n-2},\ a_n^{n-1}$$

a pour coefficient l'unité dans la fonction donnée et dans le produit A; on doit donc avoir $c = 1$, et par suite, a_1° étant égal à 1,

$$(1)\quad S^n(\pm a_2 a_3^{2} \ldots a_{n-1}^{n-2}\, a_n^{n-1}) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\ldots(a_n - a_1)(a_3 - a_2)\ldots \ldots(a_n - a_2)\ldots(a_n - a_{n-1}).$$

Ainsi par exemple si l'on suppose $n = 3$, on trouvera

$$S^3(\pm a_2 a_3^{2}) = a_2 a_3^{2} + a_3 a_1^{2} + a_1 a_2^{2} - a_3 a_2^{2} - a_2 a_1^{2} - a_1 a_3^{2}$$
$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2).$$

Cette

Digitized by Google

Cette dernière équation a été donnée par *Vandermonde* dans son mémoire sur la résolution des équations.

Nous avons fait voir ci-dessus que la fonction symétrique alternée

$$S^n(\pm a_1^p a_2^q a_3^r \ldots a_{n-1}^s a_n^t)$$

était toujours divisible par le produit A. Elle sera donc aussi divisible par la fonction symétrique alternée

$$S^n(\pm a_2 a_3^2 \ldots a_{n-1}^{n-2} a_n^{n-1}).$$

Soit P le quotient, P sera nécessairement une fonction symétrique permanente des quantités $a_1, a_2 \ldots a_n$, et l'on aura en général,

$$(2) \quad \frac{S^n(\pm a_1^p a_2^q a_3^r \ldots a_{n-1}^s a_n^t)}{S^n(\pm a_2 a_3^2 \ldots a_n^{n-1})} = P.$$

Si dans l'équation précédente, on suppose

$$p = 0, \quad q = 1, \quad r = 2 \ldots s = n-2, \quad t = n,$$

la fonction P sera nécessairement du premier degré par rapport aux quantités $a_1, a_2 \ldots a_n$; et comme elle doit être symétrique et permanente par rapport à ces quantités, on sera obligé de supposer P égale à

$$c(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = cS^n(a_1),$$

c étant une constante qui ne peut différer ici de l'unité ; on aura donc en général,

$$(3) \quad S^n(\pm a_2 a_3^2 a_n^3 \ldots a_{n-1}^{n-2} a_n^n) = S^n(a_1) \times S^n(\pm a_2 a_3^2 a_n^3 \ldots a_{n-1}^{n-2} a_n^{n-1}).$$

Ainsi par exemple si l'on suppose $n = 3$, on aura

$$\begin{aligned} &a_2 a_3^3 + a_3 a_1^3 + a_1 a_2^3 - a_3 a_2^3 - a_2 a_1^3 - a_1 a_3^3 \\ &= (a_1 + a_2 + a_3)(a_2 a_3^2 + a_3 a_1^2 + a_1 a_2^2 - a_3 a_2^2 - a_2 a_1^2 - a_1 a_2^2) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3)(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2). \end{aligned}$$

Digitized by Google

Si dans l'équation (2) on suppose

$$p = 1, \quad q = 2, \quad r = 3 \ldots s = n - 1; \quad t = n;$$

on aura évidemment

$$P = a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} a_n.$$

On a donc en général,

$$(4)\ S^n(\pm a_1 a_2^2 a_3^3 \ldots a_{n-1}^{n-1} a_n^n) = S(\pm a_1 a_2^2 a_3^3 \ldots a_{n-1}^{n-1} a_n^n)$$
$$= a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} a_n\, S^n(\pm a_2 a_3^2 \ldots a_{n-1}^{n-2} a_n^{n-1})$$
$$= a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} a_n (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \ldots (a_n - a_1)(a_3 - a_2) \ldots (a_n - a_2) \ldots (a_n - a_{n-1}).$$

Ainsi par exemple en supposant $n = 3$, on trouvera

$$a_1 a_2^2 a_3^3 + a_2 a_3^2 a_1^3 + a_3 a_1^2 a_2^2 - a_1 a_3^2 a_2^3 - a_3 a_2^2 a_1^3 - a_2 a_1^2 a_3^3$$
$$= a_1 a_2 a_3 (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2).$$

Lorsqu'on suppose $p = 0$, $n = 2$, et que l'on remplace les quantités a_1, a_2 par des lettres différentes x et y, l'équation (2) se réduit à

$$\frac{x^q - y^q}{x - y} = P;$$

d'où il suit que $x^q - y^q$ est en général divisible par $x - y$. De même, si l'on suppose $p = 0$, $n = 3$, on trouvera que

$$x^q y^r + y^q z^r + z^q x^r - x^r y^q - y^r z^q - z^r x^q$$

est toujours divisible par le produit

$$(x - y)(x - z)(y - z),$$
&c.....

Pour être certain que deux fonctions symétriques alternées sont égales entre elles, il suffit de s'assurer, 1.° que tous les termes renfermés dans la première sont aussi renfermés dans la seconde, 2.° que ces termes ont les mêmes coefficiens numériques dans l'une et dans

Digitized by Google

l'autre, 3.° qu'un des termes de la première a le même signe que le terme correspondant pris dans la seconde.

Je vais maintenant examiner particulièrement une certaine espèce de fonctions symétriques alternées qui s'offrent d'elles-mêmes dans un grand nombre de recherches analytiques. C'est au moyen de ces fonctions qu'on exprime les valeurs générales des inconnues que renferment plusieurs équations du premier degré. Elles se représentent toutes les fois qu'on a des équations de condition à former, ainsi que dans la théorie générale de l'élimination. MM. *Laplace* et *Vandermonde* les ont considérées sous ce rapport dans les Mémoires de l'Académie des sciences (année 1772), et M. *Bezout* les a encore examinées depuis sous le même point de vue dans sa Théorie des équations. M. *Gauss* s'en est servi avec avantage dans ses Recherches analytiques, pour découvrir les propriétés générales des formes du second degré, c'est-à-dire, des polynomes du second degré à deux ou à plusieurs variables; et il a désigné ces mêmes fonctions sous le nom de *déterminans*. Je conserverai cette dénomination qui fournit un moyen facile d'énoncer les résultats; j'observerai seulement qu'on donne aussi quelquefois aux fonctions dont il s'agit le nom de *résultantes* à deux ou à plusieurs lettres. Ainsi les deux expressions suivantes, déterminant et résultante, devront être regardées comme synonymes.

DEUXIÈME PARTIE.

Des Fonctions symétriques alternées désignées sous le nom de Déterminans.

1.ère SECTION.

Des Déterminans en général et des Systèmes symétriques.

S. 1.er SOIENT $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ plusieurs quantités différentes en nombre égal à n. On a fait voir ci-dessus qu'en multipliant le produit

Digitized by Google

de ces quantités, ou

$$a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_n$$

par le produit de leurs différences respectives, ou par

$$(a_2-a_1)(a_3-a_1)\ldots(a_n-a_1)(a_3-a_2)\ldots(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1}),$$

on obtenait pour résultat la fonction symétrique alternée

$$S(\pm a_1 a_2^2 a_3^3 \ldots\ldots a_n^n),$$

qui par conséquent se trouve toujours égale au produit

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_n (a_2-a_1)(a_3-a_1)\ldots(a_n-a_1)(a_3-a_2)\ldots(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1}).$$

Supposons maintenant que l'on développe ce dernier produit, et que dans chaque terme du développement on remplace l'exposant de chaque lettre par un second indice égal à l'exposant dont il s'agit, en écrivant par exemple $a_{r.s}$ au lieu de a_r^s, et $a_{s.r}$ au lieu de a_s^r, on obtiendra pour résultat une nouvelle fonction symétrique alternée, qui, au lieu d'être représentée par

$$S(\pm a_1^1 a_2^2 a_3^3 \ldots\ldots a_n^n),$$

sera représentée par

$$S(\pm a_{1.1} a_{2.2} a_{3.3} \ldots\ldots a_{n.n}),$$

le signe S étant relatif aux premiers indices de chaque lettre. Telle est la forme la plus générale des fonctions que je désignerai dans la suite sous le nom de *déterminans*. Si l'on suppose successivement

$$n = 1, \quad n = 2, \quad \&c.\ldots\ldots,$$

on trouvera

$$S(\pm a_{1.1} a_{2.2}) = a_{1.1} a_{2.2} - a_{2.1} a_{1.2},$$

$$S(\pm a_{1.1} a_{2.2} a_{3.3}) = a_{1.1} a_{2.2} a_{3.3} + a_{2.1} a_{3.2} a_{1.3} + a_{3.1} a_{1.2} a_{2.3},$$
$$- a_{1.1} a_{3.2} a_{2.3} - a_{3.1} a_{2.2} a_{1.3} - a_{2.1} a_{1.2} a_{3.3},$$

&c.....

Digitized by Google

pour les déterminans du second, du troisième ordre, &c..... Les quantités affectées d'indices différens devant être généralement considérées comme inégales, on voit que le déterminant du second ordre renfermera quatre quantités différentes, savoir,

$$a_{1.1}, \quad a_{1.2};$$
$$a_{2.1}, \quad a_{2.2};$$

que le déterminant du troisième ordre en renfermera neuf, savoir,

$$a_{1.1}, \quad a_{1.2}, \quad a_{1.3};$$
$$a_{2.1}, \quad a_{2.2}, \quad a_{2.3};$$
$$a_{3.1}, \quad a_{3.2}, \quad a_{3.3};$$

&c.....

En général, le déterminant du $n.^{ème}$ ordre, ou

$$S(\pm a_{1.1}\, a_{2.2} \ldots\ldots a_{n.n}),$$

renfermera un nombre égal à n^2 de quantités différentes; qui seront respectivement

$$(1)\quad \begin{cases} a_{1.1}, & a_{1.2}, & a_{1.3} \ldots a_{1.n}, \\ a_{2.1}, & a_{2.2}, & a_{2.3} \ldots a_{2.n}, \\ a_{3.1}, & a_{3.2}, & a_{3.3} \ldots a_{3.n}, \\ \&c..... & & \\ a_{n.1}, & a_{n.2}, & a_{n.3} \ldots a_{n.n}. \end{cases}$$

Supposons ces mêmes quantités disposées en carré, comme on vient de le voir, sur un nombre égal à n de lignes horizontales et sur autant de colonnes verticales, de manière que, des deux indices qui affectent chaque quantité, le premier varie seul dans chaque colonne verticale, et que le second varie seul dans chaque ligne horizontale, l'ensemble des quantités dont il s'agit formera un système que j'appellerai *système symétrique* de l'ordre n. Les quantités $a_{1.1}, a_{1.2} \ldots\ldots a_{2.2} \ldots\ldots a_{n.n}$,

Digitized by Google

seront les différens termes du système, et la lettre a dépouillée d'accens en sera la caractéristique. Enfin les quantités comprises dans une même ligne, soit horizontale, soit verticale, seront en nombre égal à n, et formeront une suite que j'appellerai dans le premier cas *suite horizontale*, et dans le second *suite verticale*. L'indice de chaque suite sera celui qui reste invariable dans tous les termes de la suite. Ainsi, par exemple, les indices des suites horizontales et ceux des suites verticales du système (1) sont respectivement égaux à

$$1, \quad 2, \quad 3 \ldots\ldots n.$$

J'appellerai termes *conjugués*, ceux que l'on peut déduire l'un de l'autre par une transposition opérée entre le premier et le second indice; ainsi $a_{2.3}$ et $a_{3.2}$ sont deux termes conjugués. Il existe des termes qui sont eux-mêmes leurs conjugués. Ce sont les termes dans lesquels les deux indices sont égaux entre eux, savoir,

$$a_{1.1}, \quad a_{2.2} \ldots\ldots a_{n.n};$$

je les appellerai termes *principaux* : ils sont tous situés dans le système (1) sur une diagonale du carré formé par le système.

Pour indiquer la relation qui existe entre le système (1) et le déterminant

$$S(\pm a_{1.1} a_{2.2} \ldots\ldots a_{n.n}),$$

je dirai que ce dernier appartient au système en question, ou, ce qui revient au même, que la fonction symétrique alternée

$$S(\pm a_{1.1} a_{2.2} \ldots\ldots a_{n.n})$$

est le déterminant de ce système.

Pour obtenir le déterminant du système (1), il suffit, comme on l'a dit ci-dessus, de remplacer les exposans des lettres par des indices dans le développement du produit

$$a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_n (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \ldots\ldots (a_n - a_{n-1}).$$

Digitized by Google

On peut aussi former directement le déterminant dont il s'agit, à l'aide des considérations suivantes :

Chaque terme du déterminant

$$S(\pm a_{1.1}\, a_{2.2} \ldots\ldots a_{n.n})$$

est le produit de n quantités différentes. Les seconds indices qui affectent ces quantités sont respectivement égaux aux nombres

$$1,\quad 2,\quad 3 \ldots\ldots n$$

que l'on peut considérer comme étant dans tous les termes disposés suivant l'ordre naturel. Quant aux premiers indices, ils sont encore égaux à ces mêmes nombres; mais l'ordre dans lequel ils se suivent varie d'un terme à l'autre, et présente, dans les différens termes, toutes les permutations possibles des nombres

$$1,\quad 2,\quad 3 \ldots\ldots n.$$

Il suit de ces considérations que, pour former chacun des termes dont il s'agit, il suffira de multiplier entre elles n quantités différentes prises respectivement dans les différentes colonnes verticales du système (1), et situées en même temps dans les diverses lignes horizontales de ce système. Les produits que l'on pourra former de cette manière seront en nombre égal à celui des permutations possibles des indices $1, 2, 3 \ldots n$, c'est-à-dire, en nombre égal au produit

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n;$$

je les appellerai *produits symétriques*. Le produit de tous les termes principaux du système (1), savoir,

$$a_{1.1}\, a_{2.2}\, a_{3.3} \ldots\ldots a_{n.n}$$

est évidemment un produit symétrique : il sera désigné sous le nom de *produit principal*, et employé de préférence comme terme indicatif dans le déterminant du système. D'après la définition que nous avons donnée des notations $S(\pm K)$, $S(\mp K)$, le terme indicatif

Digitized by Google

$$a_{1.1}\, a_{2.2}\, a_{3.3} \ldots\ldots a_{n.n}$$

sera affecté du signe + dans le déterminant

$$S(\pm a_{1.1}\, a_{2.2} \ldots\ldots a_{n.n})$$

et du signe — dans le même déterminant pris en signe contraire, c'est-à-dire, dans la fonction

$$S(\mp a_{1.1}\, a_{2.2} \ldots\ldots a_{n.n}).$$

Étant donné un produit symétrique quelconque, pour obtenir le signe dont il est affecté dans le déterminant

$$S(\pm a_{1.1}\, a_{2.2} \ldots\ldots a_{n.n}),$$

il suffira d'appliquer la règle qui sert à déterminer le signe d'un terme pris à volonté dans une fonction symétrique alternée. Soit

$$a_{\alpha.1}\, a_{\beta.2} \ldots\ldots a_{\zeta.n}$$

le produit symétrique dont il s'agit, et désignons par g le nombre des substitutions circulaires équivalentes à la substitution

$$\begin{pmatrix} 1.2.3.\ldots\ldots n \\ \alpha\ \beta\ \gamma\ldots\ldots\zeta \end{pmatrix}.$$

Ce produit devra être affecté du signe +, si $n - g$ est un nombre pair, et du signe — dans le cas contraire.

Il est aisé de voir que la règle précédente subsisterait dans le cas même où on aurait interverti l'ordre des facteurs

$$a_{\alpha.1},\ a_{\beta.2},\ \&c.\ldots\ a_{\zeta.n},$$

ou, ce qui revient au même, l'ordre des indices compris dans les deux termes de la substitution

$$\begin{pmatrix} 1.2.3.\ldots\ldots n \\ \alpha\ \beta\ \gamma\ldots\ldots\zeta \end{pmatrix},$$

pourvu que dans cette substitution on place toujours l'un au-dessus de l'autre,

Digitized by Google

l'autre les deux indices qui dans le produit symétrique donné affectent la même quantité.

Supposons par exemple $n = 7$, et cherchons quel signe doit avoir, dans le déterminant

$$S(\pm a_{1.1}\, a_{2.2}\, a_{3.3}\, a_{4.4}\, a_{5.5}\, a_{6.6}\, a_{7.7}),$$

le produit symétrique

$$a_{1.3}\, a_{3.6}\, a_{6.1}\, a_{4.5}\, a_{5.4}\, a_{2.2}\, a_{7.7}.$$

La substitution que l'on obtient par la comparaison des indices qui affectent en première et en seconde ligne chacun des facteurs du produit, est

$$\begin{pmatrix} 1.3.6.4.5.2.7 \\ 3.6.1.5.4.2.7 \end{pmatrix},$$

et cette substitution équivaut aux quatre substitutions circulaires

$$\begin{pmatrix} 1.3.6 \\ 3.6.1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4.5 \\ 5.4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix};$$

on a donc ici $g = 4$, $n = 7$, et par suite

$$n - g = 3.$$

Ce dernier nombre étant impair, le produit symétrique donné devra être affecté du signe — dans le déterminant du septième ordre.

La règle précédente suppose que le produit principal $a_{1.1}\, a_{2.2} \ldots a_{n.n}$ est affecté du signe +; dans le cas contraire, il faudrait changer les signes de tous les termes. On peut encore déterminer le signe que doit avoir, dans le déterminant

$$S(\pm a_{1.1}\, a_{2.2} \ldots\ldots a_{n.n}),$$

un produit symétrique pris à volonté, à l'aide d'une règle donnée par *Gabriel Cramer* dans un appendice à l'*Analyse des lignes courbes*, et que l'on peut énoncer de la manière suivante :

Digitized by Google

Soit toujours $a_{\alpha.1}\, a_{\beta.2} \ldots a_{\zeta.n}$ le produit symétrique donné, et

$$\alpha\beta\gamma \ldots\ldots \zeta$$

la permutation formée avec les premiers indices des différens facteurs; enfin soient

$$\beta - \alpha,$$
$$\gamma - \alpha,$$
$$\&c.\ldots\ldots$$
$$\zeta - \alpha,$$
$$\gamma - \beta,$$
$$\&c.\ldots\ldots$$

les différences respectives de ces mêmes indices considérés deux à deux de toutes les manières possibles; et supposons qu'en prenant la différence de deux indices, on donne toujours le signe — à celui qui se présente le premier dans la permutation

$$\alpha\beta\gamma \ldots\ldots \zeta.$$

Le produit symétrique donné aura le même signe que le produit de toutes les différences, savoir,

$$(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)\ldots\ldots(\zeta-\alpha)(\gamma-\beta)\ldots\ldots$$

On démontre facilement cette règle par ce qui précède, attendu qu'une transposition opérée entre deux indices change toujours, comme on l'a fait voir, le signe du produit

$$(a_\beta - a_\alpha)(a_\gamma - a_\alpha)\ldots(a_\zeta - a_\alpha)(a_\gamma - a_\beta)\ldots\ldots,$$

et par conséquent celui du produit

$$(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)\ldots(\zeta-\alpha)(\gamma-\beta)\ldots\&c.\ldots\ldots$$

S. 2.e Si dans chacun des termes du système (1) on remplace le premier indice par le second, et réciproquement, on aura un nouveau système relativement auquel le premier indice restera invariable dans

Digitized by Google

chaque suite verticale, et le second indice dans chaque suite horizontale. Le système ainsi formé sera

$$(2)\quad \begin{cases} a_{1.1}, & a_{2.1}, & a_{3.1} \ldots . a_{n.1}, \\ a_{1.2}, & a_{2.2}, & a_{3.2} \ldots . a_{n.2}, \\ a_{1.3}, & a_{2.3}, & a_{3.3} \ldots . a_{n.3}, \\ \&c. \ldots \ldots \\ a_{1.n}, & a_{2.n}, & a_{3.n} \ldots . a_{n.n}. \end{cases}$$

Je dirai que les systèmes (1) et (2) sont respectivement conjugués l'un à l'autre. Pour abréger, je désignerai dorénavant chacun de ces deux systèmes par le dernier terme de la première suite horizontale renfermé entre deux parenthèses; ainsi le système (1) sera désigné par $(a_{1.n})$, et le système (2) par $(a_{n.1})$.

Les produits symétriques des systèmes $(a_{1.n})$ et $(a_{n.1})$ sont évidemment égaux entre eux. Le produit principal $a_{1.1}\, a_{2.2} \ldots a_{n.n}$ est aussi le même dans ces deux systèmes. Par suite, le déterminant du système $(a_{n.1})$ est égal à celui du système $(a_{1.n})$, ou à

$$S(\pm a_{1.1}\, a_{2.2} \ldots a_{n.n}),$$

le signe S étant toujours relatif aux premiers indices. Mais le déterminant du système $(a_{n.1})$ peut aussi être représenté par

$$S(\pm a_{1.1}\, a_{2.2} \ldots a_{n.n}),$$

le signe S étant relatif aux seconds indices : car on peut déduire le système $(a_{n.1})$ du système $(a_{1.n})$, et par suite le second déterminant du premier, en écrivant les premiers indices à la place des seconds, et réciproquement. En conséquence, dans l'expression $S(\pm a_{1.1}\, a_{2.2} \ldots a_{n.n})$ on peut supposer indifféremment, ou que le signe S se rapporte aux premiers indices, ou qu'il se rapporte aux seconds; ce qui lève toute incertitude sur la valeur de l'expression dont il s'agit.

Si l'on échange entre elles deux suites horizontales ou deux suites

Digitized by Google

verticales du système $(a_{1..n})$, de manière à faire passer dans une des suites tous les termes de l'autre et réciproquement, on obtiendra un nouveau système symétrique, dont le déterminant sera évidemment égal mais de signe contraire à celui du système $(a_{1..n})$. Si l'on répète la même opération plusieurs fois de suite, on obtiendra divers systèmes symétriques dont les déterminans seront égaux entre eux, mais alternativement positifs et négatifs. On peut faire la même remarque à l'égard du système $(a_{n..1})$.

Si, au lieu de faire varier d'une colonne verticale à l'autre les seconds indices qui affectent les termes du système (1), on représentait par des lettres différentes $a, b, c \ldots e, f,$ les termes de ce système situés dans les diverses colonnes verticales, en ne conservant de variable que le premier indice; le système (1) se trouverait transformé dans le suivant,

$$(3)\quad \begin{cases} a_1, \ b_1, \ c_1, \ \&c.... \ e_1, \ f_1, \\ a_2, \ b_2, \ c_2, \ \&c.... \ e_2, \ f_2, \\ \&c..... \\ a_n, \ b_n, \ c_n, \ \&c.... \ e_n, \ f_n. \end{cases}$$

et son déterminant deviendrait égal à

$$S(\pm a_1 b_2 c_3 \ldots\ldots e_{n-1} f_n),$$

ou, ce qui revient au même, au produit

$$abc\ldots ef\,(b-a)(c-a)\ldots(f-a)(c-b)\ldots(f-b)\ldots(f-e),$$

dans le développement duquel on doit toujours remplacer les exposans des lettres par des indices.

S. 3.e Désignons maintenant par D_n le déterminant de l'ordre n, ou celui des deux systèmes $(a_{1..n})$, $(a_{n..1})$, en sorte qu'on ait

$$D_n = S(\pm a_{1..1}\, a_{2..2} \ldots a_{n-1..n-1}\, a_{n..n});$$

Digitized by Google

et supposons, pour fixer les idées, que le signe S soit relatif aux premiers indices. Le déterminant de l'ordre $n-1$, ou D_{n-1}, sera donné par l'équation

$$D_{n-1} = S(\pm a_{1.1}\, a_{2.2} \ldots a_{n-1.n-1}).$$

Si l'on multiplie ce dernier par $a_{n.n}$, on aura la somme algébrique des produits symétriques, qui dans le déterminant D_n ont pour facteur $a_{n.n}$, ces produits étant pris alternativement avec le signe $+$ et avec le signe $-$ dans la somme dont il s'agit. De plus, il est aisé de voir que ces mêmes produits sont affectés des mêmes signes dans le déterminant D_n, et dans le déterminant D_{n-1} multiplié par $a_{n.n}$. En effet, le produit principal

$$a_{1.1}\, a_{2.2}\, a_{3.3} \ldots\ldots a_{n.n}$$

se trouve de part et d'autre affecté du signe $+$; et le signe de l'un quelconque des autres produits est déterminé, dans les deux cas, par le nombre des transpositions qu'on est obligé d'effectuer sur les premiers indices $1, 2, 3 \ldots n-1$, pour le déduire du produit principal. Cela posé l'expression

$$a_{n.n}\, S(\pm a_{1.1}\, a_{2.2} \ldots a_{n-1.n-1}),$$

considérée comme fonction des premiers indices $1, 2, 3 \ldots n$, ne sera plus en général une fonction symétrique alternée. Mais si dans cette même fonction on transpose de toutes les manières possibles les indices dont il s'agit, elle obtiendra une série de valeurs dont plusieurs seront différentes entre elles; et si de la somme des valeurs différentes obtenues par un nombre pair de transpositions, on retranche la somme des valeurs différentes obtenues par un nombre impair de transpositions, on aura une fonction symétrique alternée, que l'on pourra désigner par

$$S[\pm a_{n.n}\, S(\pm a_{1.1}\, a_{2.2}\, a_{3.3} \ldots a_{n-1.n-1})],$$

le nouveau signe S étant toujours relatif aux premiers indices. Pour obtenir les diverses valeurs du produit

$$a_{n.n}\, S(\pm a_{1.1},\ a_{2.2},\ a_{3.3} \ldots a_{n-1.n-1}),$$

Digitized by Google

il suffira évidemment de changer successivement le premier indice n du facteur $a_{n.n}$ contre les indices 1, 2, 3 ... $n-1$ qui affectent en première ligne les quantités renfermées dans le second facteur

$$S(\pm a_{1.1}\, a_{2.2}\, a_{3.3} \ldots a_{n-1.n-1}).$$

Cela posé, le premier facteur deviendra successivement égal à chacune des quantités

$$a_{n.n},\ a_{n-1.n},\ a_{n-2.n},\ \ldots\ldots\ a_{2.n},\ a_{1.n};$$

et si l'on représente respectivement par

$$b_{n.n},\ -b_{n-1.n},\ -b_{n-2.n}\ \ldots\ldots\ -b_{2.n},\ -b_{1.n},$$

les valeurs correspondantes du second facteur, on aura

$$S[\pm a_{n.n} S(\pm a_{1.1}\, a_{2.2} \ldots a_{n-1.n-1})]$$
$$= a_{n\,n} b_{n.n} + a_{n-1.n} b_{n-1.n} + \ldots + a_{2.n} b_{2.n} + a_{1.n} b_{1.n}.$$

On aura d'ailleurs, par ce qui précède,

$$b_{n.n} = S(\pm a_{1.1}\, a_{2.2} \ldots a_{n-1.n-1}) = D_{n-1},$$
$$b_{n-1.n} = S(\mp a_{1.1}\, a_{2.2} \ldots a_{n.n-1}),$$
&c.....
$$b_{2.n} = S(\mp a_{1.1}\, a_{n.2} \ldots a_{n-1.n-1})$$
$$b_{1.n} = S(\mp a_{n.1}\, a_{2.2} \ldots a_{n-1.n-1}),$$

le signe S dans toutes ces équations pouvant être considéré comme relatif, soit aux premiers, soit aux seconds indices.

De ce qu'on vient de dire il est aisé de conclure, que, si l'on développe la fonction symétrique alternée

$$S[\pm a_{n.n} S(\pm a_{1.1}\, a_{2.2} \ldots a_{n-1.n-1})],$$

tous les termes du développement seront des produits symétriques de l'ordre n, qui auront l'unité pour coefficient. Ces termes seront donc

Digitized by Google

respectivement égaux à ceux qu'on obtient en développant le déterminant

$$D_n = S(\pm a_{1.1}\, a_{2.2} \ldots a_{n.n});$$

et comme le produit principal $a_{1.1}\, a_{2.2} \ldots a_{n.n}$ est positif de part et d'autre, on aura nécessairement

$$\begin{aligned} D_n &= S[\pm a_{n.n}\, S(\pm a_{1.1}\, a_{2.2} \ldots a_{n-1.n-1})] \\ &= a_{n.n}\, b_{n.n} + a_{n-1.n}\, b_{n-1.n} + \ldots + a_{2.n}\, b_{2.n} + a_{1.n}\, b_{1.n}. \end{aligned}$$

En général, si l'on désigne par μ l'un des indices 1, 2, 3 ... n, on trouvera de la même manière

$$D_n = S[\pm a_{\mu.\mu}\, S(\pm a_{1.1}\, a_{2.2} \ldots a_{\mu-1.\mu-1}\, a_{\mu+1.\mu+1} \ldots a_{n.n})].$$

Soit ν un autre indice différent de μ. Représentons par $b_{\mu.\mu}$ le coefficient du facteur $a_{\mu.\mu}$ dans le terme indicatif de la fonction symétrique alternée

$$S[\pm a_{\mu.\mu}\, S(\pm a_{1.1}\, a_{2.2} \ldots a_{\mu-1.\mu-1}\, a_{\mu+1.\mu+1} \ldots a_{n.n})],$$

et par $-b_{\nu.\mu}$ ce que devient $b_{\mu.\mu}$, lorsqu'on y remplace le premier indice ν par μ. Si l'on suppose successivement

$$\nu = 1,\ \nu = 2 \ldots \nu = \mu - 1,\ \nu = \mu + 1 \ldots \nu = n,$$

$b_{\mu.\mu}$ deviendra

$$-b_{1.\mu},\ -b_{2.\mu} \ldots -b_{\mu-1.\mu} - b_{\mu+1.\mu} \ldots\ldots -b_{n.\mu},$$

et la valeur de D_n sera donnée par l'équation

$$D_n = a_{1.\mu}\, b_{1.\mu} + a_{2.\mu}\, b_{2.\mu} + \ldots + a_{\mu.\mu}\, b_{\mu.\mu} + \ldots a_{n.\mu}\, b_{n.\mu}.$$

Si dans cette équation on donne successivement à μ toutes les valeurs

$$1,\ 2,\ 3 \ldots\ldots n,$$

on obtiendra les équations suivantes,

Digitized by Google

$$(5)\quad \begin{cases} D_n = a_{1.1}\,b_{1.1} + a_{2.1}\,b_{2.1} + \ldots\ldots + a_{n.1}\,b_{n.1}, \\ D_n = a_{1.2}\,b_{1.2} + a_{2.2}\,b_{2.2} + \ldots\ldots + a_{n.2}\,b_{n.2}, \\ \&c.\ldots\ldots \\ D_n = a_{1.n}\,b_{1.n} + a_{2.n}\,b_{2.n} + \ldots\ldots + a_{n.n}\,b_{n.n}. \end{cases}$$

dans lesquelles on doit supposer en général,

$$(6)\quad \begin{cases} b_{\mu.\mu} = S(\pm a_{1.1}\,a_{2.2}\ldots a_{\mu-1.\mu-1}\,a_{\mu+1.\mu+1}\ldots\ldots a_{n.n}), \\ b_{\nu.\mu} = S(\mp a_{1.1}\,a_{2.2}\ldots a_{\mu-1.\mu-1}\,a_{\mu+1.\mu+1}\ldots a_{\nu-1.\nu-1}\,a_{\mu.\nu}\,a_{\nu+1.\nu+1}\ldots a_{n.n}). \end{cases}$$

Les quantités $b_{1.1}$, $b_{1.2}$ ..... sont, dans les équations précédentes, en nombre égal à celui des quantités $a_{1.1}$, $a_{1.2}$, &c.... qu'elles multiplient, c'est-à-dire, en nombre égal à n^2. Elles peuvent donc être disposées en carré, de manière à former deux nouveaux systèmes de l'ordre n, qui soient respectivement conjugués l'un à l'autre. L'un de ces systèmes sera le suivant,

$$(7)\quad \begin{cases} b_{1.1}\,b_{1.2}\ldots\ldots b_{1.n}, \\ b_{2.1}\,b_{2.2}\ldots\ldots b_{2.n}, \\ \&c.\ldots\ldots \\ b_{n.1}\,b_{n.2}\ldots\ldots b_{n.n}, \end{cases}$$

que je désignerai par $(b_{1.n})$, d'après les conventions établies : en remplaçant dans celui-ci les premiers indices par les seconds, et réciproquement, on obtiendra l'autre système, qui sera représenté par $(b_{n.1})$.

Après avoir désigné sous le nom de *forme ternaire* un polynome homogène du second degré à trois variables, M. *Gauss* a nommé *forme adjointe* un second polynome, dont les coefficiens ont avec ceux du premier les relations qu'on vient de remarquer entre les termes du système $(b_{n.1})$ et ceux du système $(a_{n.1})$. Je suivrai cette dénomination; et lorsque j'aurai à comparer entre elles les quantités

$$a_{1.1},\quad a_{1.2}\ldots\quad \text{et}\quad b_{1.1},\quad b_{1.2}\ldots,\quad \&c.,$$

je

Digitized by Google

je dirai que les secondes sont adjointes aux premières ; de sorte qu'en général la quantité adjointe à $a_{\mu.\mu}$ sera $b_{\mu.\mu}$, et la quantité adjointe à $a_{\mu.\nu}$ sera $b_{\mu.\nu}$. Par la même raison, le système $(b_{1..n})$ sera dit adjoint au système $(a_{1..n})$, et le système $(b_{n.1})$ adjoint au système $(a_{n.1})$. Le système $(b_{n.1})$ sera en même temps adjoint et conjugué au système $(a_{1..n})$.

La quantité $b_{n.n}$ adjointe à $a_{n.n}$ est toujours égale au déterminant de l'ordre $n-1$, ou à

$$S(\pm a_{1.1}\, a_{2.2} \ldots\ldots a_{n-1.n-1}).$$

Pour déduire de cette expression la valeur de $b_{\mu.\mu}$, il suffira de remplacer dans ce déterminant, ou, ce qui revient au même, dans tous les termes du système de l'ordre $n-1$, le premier indice égal à μ par un autre indice égal à n, et le second indice égal à μ par un autre indice égal à n. Enfin, pour transformer $b_{\mu.\mu}$ en $b_{\nu.\mu}$, il suffira de remplacer encore le premier indice égal à ν par un autre indice égal à μ, et de changer le signe du résultat. Il suit de ces considérations, que, pour obtenir au signe près la quantité $b_{\mu.\nu}$ adjointe à $a_{\mu.\nu}$, il suffit de convertir le système $(a_{1..n})$ de l'ordre n en un système de l'ordre $n-1$, par la suppression de tous les termes situés dans la même ligne horizontale ou dans la même ligne verticale que $a_{\mu.\nu}$, et de former le déterminant du nouveau système dont il s'agit. Ce déterminant serait de même valeur et de même signe que $b_{\mu.\mu}$, si l'on supposait $\nu = \mu$.

Dans l'équation

$$D_n = S(\pm a_{1.1}\, a_{2.2} \ldots\ldots a_{n.n})$$

on peut indifféremment considérer le signe S comme relatif, soit aux premiers, soit aux seconds indices ; d'ailleurs on a fait voir dans la première partie de ce mémoire, que toute fonction symétrique alternée devient nulle, lorsqu'on y remplace un indice par un autre indice : D_n se réduira donc à zéro si, dans l'expression de ce déterminant, on

Digitized by Google

remplace un des indices qui occupent la seconde place par un autre indice, par exemple, si l'on remplace les termes

$$a_{1.\mu}, \quad a_{2.\mu} \ldots\ldots a_{n.\mu},$$

par

$$a_{1.\nu}, \quad a_{2.\nu} \ldots\ldots a_{n.\nu},$$

ν étant différent de μ. D'ailleurs, la valeur de D_n, exprimée au moyen des termes $a_{1.\mu}, a_{2.\mu} \ldots a_{n.\mu}$, est par ce qui précède

$$(8) \quad D_n = a_{1.\mu} b_{1.\mu} + a_{2.\mu} b_{2.\mu} + \ldots + a_{n.\mu} b_{n.\mu};$$

on aura donc généralement

$$(9) \quad 0 = a_{1.\nu} b_{1.\mu} + a_{2.\nu} b_{2.\mu} + \ldots + a_{n.\mu} b_{n.\mu}.$$

Cette dernière équation sera satisfaite toutes les fois que ν et μ seront deux nombres différens l'un de l'autre.

Si l'on donne successivement à μ et à ν dans les équations (8) et (9) toutes les valeurs entières, depuis 1 jusqu'à n, on aura le système d'équations suivant :

$$(10) \begin{cases} D_n = a_{1.1} b_{1.1} + a_{2.1} b_{2.1} + \ldots + a_{n.1} b_{n.1}, & 0 = a_{1.1} b_{1.2} + a_{2.1} b_{2.2} + \ldots + a_{n.1} b_{n.2}, \text{ \&c....} \\ & 0 = a_{1.1} b_{1.n} + a_{2.1} b_{2.n} + \ldots + a_{n.1} b_{2.n}, \\ 0 = a_{1.2} b_{1.1} + a_{2.2} b_{2.1} + \ldots + a_{n.2} b_{n.1}, & D_n = a_{1.2} b_{1.2} + a_{2.2} b_{2.2} + \ldots + a_{n.2} b_{n.2}, \text{ \&c....} \\ & 0 = a_{1.2} b_{1.n} + a_{2.2} b_{2.n} + \ldots + a_{n.2} b_{n.n}, \\ \text{\&c.....} & \\ 0 = a_{1.n} b_{1.1} + a_{2.n} b_{2.1} + \ldots + a_{n.n} b_{n.1}, & 0 = a_{1.n} b_{1.2} + a_{2.n} b_{2.2} + \ldots + a_{n.n} b_{n.2}, \text{ \&c.....} \\ & D_n = a_{1.n} b_{1.n} + a_{2.n} b_{2.n} + \ldots + a_{n.n} b_{n.n}. \end{cases}$$

Si l'on désigne en général

$$a_{1.\mu} b_{1.\mu} + a_{2.\mu} b_{2.\mu} + \ldots\ldots + a_{n.\mu} b_{n.\mu}$$

par

$$S^n (a_{1.\mu} b_{1.\mu}),$$

et

$$a_{1.\nu} b_{1.\mu} + a_{2.\nu} b_{2.\mu} + \ldots\ldots + a_{n.\nu} b_{n.\mu}$$

Digitized by Google

par

$$S^n(a_{1,\nu}\, b_{1,\mu}),$$

le signe S étant dans les deux cas relatif aux indices 1 qui occupent la première place, on pourra mettre les équations (10) sous la forme suivante :

$$(11)\begin{cases} D_n = S^n(a_{1,1}\, b_{1,1}),\ 0 = S^n(a_{1,1}\, b_{1,2}),\ \&c.\ldots\ 0 = S^n(a_{1,1}\, b_{1,n}), \\ 0 = S^n(a_{1,2}\, b_{1,1}),\ D_n = S^n(a_{1,2}\, b_{1,2}),\ \&c.\ldots\ 0 = S^n(a_{1,2}\, b_{1,n}), \\ \&c.\ldots\ldots \\ 0 = S^n(a_{1,n}\, b_{1,1}),\ 0 = S^n(a_{1,n}\, b_{1,2}),\ \&c.\ldots,\ D_n = S^n(a_{1,n}\, b_{1,n}), \end{cases}$$

et les formules générales (8) et (9) deviendront

$$(12)\begin{cases} D_n = S^n(_{1,\mu}\, b_{1,\mu}), \\ 0 = S^n(a_{1,\nu}\, b_{1,\mu}). \end{cases}$$

La seconde des équations (6), ou

$$b_{\nu,\mu} = S(\mp a_{1,1}\, a_{2,2}\ldots a_{\mu-1,\mu-1}\, a_{\mu+1,\mu+1}\ldots a_{\nu-1,\nu-1}\, a_{\mu,\nu}\, a_{\nu+1,\nu+1}\ldots a_{n,n}),$$

ayant lieu toutes les fois que μ et ν sont différens l'un de l'autre; elle subsistera encore, si l'on y change μ en ν et ν en μ : on aura donc

$$b_{\mu,\nu} = S(\mp a_{1,1}\, a_{2,2}\ldots a_{\nu-1,\nu-1}\, a_{\nu+1,\nu+1}\ldots a_{\mu-1,\mu-1}\, a_{\nu,\mu}\, a_{\mu+1,\mu+1}\ldots a_{n,n}).$$

Si l'on compare entre elles les deux valeurs précédentes de $b_{\nu,\mu}$ et de $b_{\nu,\mu}$, on trouvera que pour déduire l'une de l'autre il suffit d'échanger entre eux les indices qui occupent la première et la seconde place dans les termes du système $(a_{\nu,n})$. Il en résulte que les relations établies par les équations (8) et (9) entre les termes du système $(a_{1,n})$ et les termes du système adjoint $(b_{1,n})$, subsisteront encore, si l'on échange entre elles dans ces deux équations les deux espèces d'indices : on aura donc aussi

Digitized by Google

$$(13)\quad D_n = a_{\mu.1}\,b_{\mu.1} + a_{\mu.2}\,b_{\mu.2} + \ldots\ldots + a_{\mu.n}\,b_{\mu.n},$$

$$(14)\quad 0 = a_{\nu.1}\,b_{\mu.1} + a_{\nu.2}\,b_{\mu.2} + \ldots\ldots + a_{\nu.n}\,b_{\mu.n},$$

les indices μ et ν étant censés inégaux.

On peut encore mettre ces deux dernières équations sous la forme suivante,

$$(15)\quad \begin{cases} D_n = S^n(a_{\mu.1}\,b_{\mu.1}), \\ 0 = S^n(a_{\nu.1}\,b_{\mu.1}), \end{cases}$$

le signe S étant relatif aux indices 1 qui occupent la seconde place.

En donnant à μ et à ν dans les équations (13) et (14) toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à n, on obtiendrait un système d'équations semblable au système (10). On peut déduire immédiatement ce second système d'équations du premier, en remplaçant dans celui-ci les termes des systèmes symétriques $(a_{1.n})$, $(b_{1.n})$, par les termes correspondans des systèmes conjugués $(a_{n.1})$, $(b_{n.1})$. On pourrait encore donner au nouveau système d'équations dont il s'agit la forme (11), et il suffirait pour cela d'employer les équations (15) au lieu des équations (13) et (14).

Si dans le système de quantités $(a_{1.n})$ on supprime la dernière suite horizontale et la dernière suite verticale, on aura le système suivant,

$$(16)\quad \begin{cases} a_{n.1},\ a_{1.2} \ldots\ldots a_{1.n-1}, \\ a_{2.1},\ a_{2.2} \ldots\ldots a_{2.n-1}, \\ \&c\ldots\ldots \\ a_{n-1.1},\ a_{n-1.2} \ldots a_{n-1.n-1}, \end{cases}$$

que je désignerai à l'ordinaire par $(a_{1.n-1})$.

Soit maintenant $(e_{1.n-1})$ le système adjoint au précédent. Si dans l'équation (13) on change b en e et n en $n-1$, on aura en général

Digitized by Google

$$(17)\quad D_{n-1} = b_{n.n} = a_{\mu.1}\,e_{\mu.1} + a_{\mu.2}\,e_{\mu.2} + \ldots + a_{\mu.n-1}\,e_{\mu.n-1}.$$

Pour déduire de cette dernière équation la valeur de $b_{\mu.n}$, il suffira en vertu des règles établies, de changer $a_{\mu.\nu}$ en $a_{n.\nu}$ dans l'expression précédente de $b_{n.n}$, et de changer en outre le signe du second membre : on aura donc généralement

$$(18)\quad b_{\mu.n} = -(a_{n.1}\,e_{\mu.1} + a_{n.2}\,e_{\mu.2} + \ldots + a_{n.n-1}\,e_{\mu.n-1}).$$

Si dans cette équation on donne successivement à μ toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à $n-1$, et que l'on substitue les valeurs qui en résulteront pour $b_{1.n}$, $b_{2.n}\ldots b_{n-1.n}$ dans l'équation

$$D_n = a_{1.n}\,b_{1.n} + a_{2.n}\,b_{2.n} + \ldots + a_{n.n}\,b_{n.n},$$

on obtiendra la formule suivante,

$$D_n = a_{n.n}\,b_{n.n} - \begin{cases} a_{1.n}\,a_{n.1}\,e_{1.1} + a_{2.n}\,a_{n.2}\,e_{2.2} + \ldots + a_{n-1.n}\,a_{n.n-1}\,e_{n-1.n-1}, \\ + a_{1.n}(a_{n.2}\,e_{1.2} + a_{n.3}\,e_{1.3} + \ldots + a_{n.n-1}\,e_{1.n-1}) \\ + a_{2.n}(a_{n.1}\,e_{2.1} + a_{n.3}\,e_{2.3} + \ldots + a_{n.n-1}\,e_{2.n-1}) \\ + \&c. \ldots\ldots \\ + a_{n-1.n}(a_{n.1}\,e_{n-1.1} + a_{n.2}\,e_{n-1.2} + \ldots + a_{n.n-2}\,e_{n-1.n-2}). \end{cases}$$

Cette équation peut être mise sous la forme

$$(19)\quad D_n = a_{n.n}\,D_{n.1} - S^{n-1}\,S^{n-1}(a_{\nu.n}\,a_{n.\mu}\,e_{\nu.\mu}),$$

les deux signes S étant relatifs le premier à l'indice μ et le second à l'indice ν. M. *Gauss* a employé avec avantage dans ses Recherches arithmétiques une formule qui n'est qu'un cas particulier de celle-ci.

§. 4.e Les principaux théorèmes compris dans le paragraphe précédent ont été démontrés pour la première fois d'une manière générale par M. *Laplace*, dans les Mémoires de l'Académie des sciences de l'année 1772 (seconde partie). Il a fait voir comment on pouvait les appliquer

Digitized by Google

à la recherche des valeurs des inconnues que renferment plusieurs équations du premier degré. Soient

$$x_1, \quad x_2 \ldots\ldots x_n,$$

les inconnues dont il s'agit en nombre égal à n. Supposons que l'on ait entre elles autant d'équations du premier degré, et que les coefficiens des inconnues y soient représentés respectivement par les différens termes du système $(a_{1.n})$. Les équations dont il s'agit seront de la forme

$$(20)\quad \begin{cases} a_{1.1}x_1 + a_{1.2}x_2 + \ldots\ldots + a_{1.n}x_n = m_1, \\ a_{2.1}x_1 + a_{2.2}x_2 + \ldots\ldots + a_{2.n}x_n = m_2, \\ \&c. \ldots\ldots \\ a_{n.1}x_1 + a_{n.2}x_2 + \ldots\ldots + a_{n.n}x_n = m_n. \end{cases}$$

Cela posé, les relations établies par les équations (10) entre les termes du système $(a_{1.n})$ et ceux du système adjoint $(b_{1.n})$ fournissent un moyen facile d'obtenir la valeur d'une inconnue prise à volonté. Ainsi par exemple si l'on multiplie la première des équations (20) par $b_{1.1}$, la seconde par $b_{2.1}$, &c. enfin la dernière par $b_{n.1}$, et qu'on les ajoute entre elles en ayant égard aux équations (10), on aura pour déterminer la valeur de x_1 l'équation suivante

$$D_n x_1 = m_1 b_{1.1} + m_2 b_{2.1} + \ldots\ldots + m_n b_{n.1}.$$

En général, si l'on multiplie la première des équations (20) par $b_{1.\mu}$, la seconde par $b_{2.\mu}$ ..., enfin la dernière par $b_{n.\mu}$, et qu'ensuite on les ajoute entre elles, on aura en vertu des équations (10)

$$(21)\quad D_n x_\mu = m_1 b_{1.\mu} + m_2 b_{2.\mu} + \ldots + m_n b_{n.\mu}.$$

Par suite, la valeur générale de l'une quelconque des inconnues sera

$$x_\mu = \frac{m_1 b_{1.\mu} + m_2 b_{2.\mu} + \ldots + m_n b_{n.\mu}}{D_n} = \frac{m_1 b_{1.\mu} + m_2 b_{2.\mu} + \ldots + m_n b_{n.\mu}}{a_{1.\mu} b_{1.\mu} + a_{2.\mu} b_{2.\mu} + \ldots a_{n.\mu} b_{n.\mu}}.$$

Digitized by Google

Cette valeur se présente donc sous la forme d'une fraction qui a pour dénominateur le déterminant

$$D_n = S(\pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots\ldots a_{n,n}),$$

et pour numérateur ce que devient ce déterminant, quand on y remplace les coefficiens de l'inconnue pris dans les équations (20) par les seconds membres de ces mêmes équations.

Si les coefficiens des diverses inconnues dans les équations (20), au lieu d'être représentés par une seule lettre affectée de deux indices, étaient représentés par diverses lettres a, b, c ..... e, f affectées de l'indice 1 dans la première équation, de l'indice 2 dans la seconde, &c.... ; les équations données étant alors

$$(A)\quad \begin{cases} a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 + \ldots + e_1 x_{n-1} + f_1 x_n = m_1, \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 + \ldots + e_2 x_{n-1} + f_2 x_n = m_2, \\ \text{\&c.....} \\ a_n x_1 + b_n x_2 + c_n x_3 + \ldots + e_n x_{n-1} + f_n x_n = m_n, \end{cases}$$

la valeur d'une inconnue aurait pour dénominateur la fonction symétrique alternée

$$S(\pm a_1 b_2 c_3 \ldots\ldots e_{n-1} f_n),$$

et pour numérateur ce que devient cette fonction, lorsqu'on y substitue la lettre m à celle qui désigne les coefficiens de l'inconnue. Ainsi, par exemple, la valeur de x_1 serait donnée par l'équation

$$(B)\quad x_1 = \frac{S(\pm m_1 b_2 c_3 \ldots e_{n-1} f_n)}{S(\pm a_1 b_2 c_3 \ldots e_{n-1} f_n)}.$$

Tel est le résultat auquel M. *Laplace* est parvenu. Il a fait voir aussi que deux termes déduits l'un de l'autre par un nombre impair de transpositions étaient toujours de signes contraires, et a démontré par ce moyen la règle de *Cramer*, que nous avons rapportée ci-dessus. Enfin il a prouvé qu'une transposition opérée entre deux des

Digitized by Google

lettres a, b, c ..... changeait le signe de la fonction

$$S(\pm a_1 b_2 \ldots . e_{n-1} f_n),$$

et a donné les moyens de la décomposer en d'autres fonctions semblables d'un ordre inférieur. Nous reviendrons plus tard sur ce dernier objet.

On peut encore, en vertu du §. 2.^{e}, mettre la valeur de x_1 sous la forme suivante

$$(C) \quad x_1 = \frac{mbc\ldots ef(h-m)(c-m)\ldots(f-m)(c-b)\ldots(f-b)\ldots(f-e)}{abc\ldots ef(b-a)(c-a)\ldots(f-a)(c-b)\ldots(f-b)\ldots(f-e)},$$

pourvu qu'après avoir développé séparément le numérateur et le dénominateur de la fraction précédente, on remplace les exposans des lettres par des indices.

Si l'on suppose $n=2$, les équations (A) se réduiront à

$$a_1 x_1 + b_1 x_2 = m_1,$$
$$a_2 x_1 + b_2 x_2 = m_2;$$

et l'on aura en vertu de ce qui précède

$$x_1 = \frac{mb(b-m)}{ab(b-a)} = \frac{m_1 b_2 - m_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1},$$
$$x_2 = \frac{am(m-a)}{ab(b-a)} = \frac{a_1 m_2 - a_2 m_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Si l'on suppose $n=3$, les équations (A) se réduiront à

$$a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 = m_1,$$
$$a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = m_2,$$
$$a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3 = m_3;$$

et les valeurs des inconnues seront respectivement .

x_1

Digitized by Google

$$x_1 = \frac{mbc(b-m)(c-m)(c-b)}{abc(b-a)(c-a)(c-b)} = \frac{m_1b_2c_3-m_1b_3c_2+m_2b_3c_1-m_2b_1c_3+m_3b_1c_2-m_3b_2c_1}{a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1},$$

$$x_2 = \frac{amc(m-a)(c-a)(c-m)}{abc(b-a)(c-a)(c-b)} = \frac{a_1m_2c_3-a_1m_3c_2+a_2m_3c_1-a_2m_1c_3+a_3m_1c_2-a_3m_2c_1}{a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1},$$

$$x_3 = \frac{abm(b-a)(m-a)(m-b)}{abc(b-a)(c-a)(c-b)} = \frac{a_1b_2m_3-a_1b_3m_2+a_2b_3m_1-a_2b_1m_3+a_3b_1m_2-a_3b_2m_1}{a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1},$$

et ainsi de suite.

On arriverait aux mêmes résultats en partant de l'équation (B); et dans ce cas, on peut déterminer immédiatement le signe d'un terme pris à volonté, soit dans le numérateur, soit dans le dénominateur de la fraction qui représente la valeur d'une inconnue, au moyen de la règle établie dans le §. 2.e de la première partie de ce mémoire.

Si les équations données étaient de la forme

$$(D)\quad \begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3+\ldots+ex_{n-1}+fx_n=m, \\ a^2x_1+b^2x_2+c^2x_3+\ldots+e^2x_{n-1}+f^2x_n=m^2, \\ \&c.\ldots\ldots \\ a^nx_1+b^nx_2+c^nx_3+\ldots+e^nx_{n-1}+f^nx_n=m^n, \end{cases}$$

l'équation (C) deviendrait exacte, sans qu'il fût besoin de développer le numérateur et le dénominateur de la fraction qui forme le second membre, et l'on pourrait sans aucun inconvénient supprimer les facteurs communs aux deux termes de cette fraction. Ainsi la valeur de x_1, tirée des équations (D), se réduit à

$$x_1 = \frac{m(b-m)(c-m)\ldots(f-m)}{a(b-a)(c-a)\ldots(f-a)} = \frac{m(m-b)(m-c)\ldots(m-f)}{a(a-b)(a-c)\ldots(a-f)}.$$

Les valeurs des autres inconnues, tirées des équations (D), peuvent être présentées sous une forme semblable à celle-ci.

Si les équations données étaient de la forme

Digitized by Google

$$(E)\quad \begin{cases} ax_1 + a^2x_2 + \ldots\ldots + a^nx_n = a^m, \\ bx_1 + b^2x_2 + \ldots\ldots + b^nx_n = b^m, \\ \&c\ldots\ldots \\ fx_1 + f^2x_2 + \ldots\ldots + f^nx_n = f^m, \end{cases}$$

la valeur de x_n serait donnée par l'équation

$$x_n = \frac{S(\pm ab^2c^3\ldots e^{n-1}f^m)}{S(\pm ab^2c^3\ldots e^{n-1}f^n)} = \frac{S(\pm bc^2\ldots e^{m-2}f^{m-1})}{S(\pm bc^2\ldots e^{n-2}f^{n-1})}.$$

Cette valeur deviendrait nulle, si l'on supposait $m < n$. Elle se réduit à l'unité, lorsque $m = n$. Enfin lorsque m surpasse n, le numérateur de la fraction précédente est divisible par le dénominateur, ainsi qu'on l'a prouvé dans le dernier paragraphe de la première partie de ce mémoire, et x_n devient une fonction symétrique permanente des quantités

$$a,\quad b,\quad c\ldots\ldots e,\quad f.$$

On peut faire des remarques analogues relativement aux valeurs des autres inconnues.

Revenons maintenant à l'équation (21). Si l'on y fait successivement

$$\mu = 1,\quad 2,\quad 3\ldots\ldots n,$$

on aura pour déterminer les valeurs des inconnues

$$x_1,\quad x_2\ldots\ldots x_n,$$

les équations suivantes que nous allons comparer aux équations (20).

$$(22)\quad \begin{cases} m_1b_{1.1} + m_2b_{2.1} + \ldots\ldots + m_nb_{n.1} = D_nx_1, \\ m_1b_{1.2} + m_2b_{2.2} + \ldots\ldots + m_nb_{n.2} = D_nx_2, \\ \&c\ldots\ldots \\ m_1b_{1.n} + m_2b_{2.n} + \ldots\ldots + m_nb_{n.n} = D_nx_n. \end{cases}$$

Les équations (20) renferment, 1.° deux suites de quantités, savoir,

$$x_1,\quad x_2\ldots\ldots x_n,$$
$$m_1,\quad m_2\ldots\ldots m_n;$$

Digitized by Google

2.° tous les termes du système $(a_{1..n})$ qui servent de coefficiens aux termes de la première suite. Les termes de la seconde suite étant les seuls qui se présentent isolément dans les équations dont il s'agit, je dirai que les quantités

$$m_1, \quad m_2 \ldots\ldots m_n$$

s'y trouvent dégagées, et qu'au contraire les quantités

$$x_1, \quad x_2 \ldots\ldots x_n$$

s'y trouvent engagées. Je désignerai de plus la suite des équations (20) sous le nom de *suite d'équations symétriques.*

Les équations (22) sont de la même forme que les équations (20), à cette différence près, que la suite engagée dans les équations (20) se trouve dégagée dans les équations (22), et que les termes de cette même suite y sont tous multipliés par D_n. Pour déduire les équations (22) des équations (20), il suffit, 1.° d'échanger entre elles les deux lettres m et x, c'est-à-dire, de dégager la suite engagée, et d'engager celle qui était dégagée; 2.° de multiplier les termes de la suite dégagée par le déterminant D_n du système dont les différens termes servaient de coefficiens à la suite engagée; 3.° de remplacer les termes du système symétrique $(a_{1..n})$ par les termes correspondans du système adjoint et conjugué $(b_{n..1})$. Je dirai pour cette raison que les équations (22) sont *adjointes* aux équations (20).

Les équations (20) se trouvant toutes comprises dans la formule générale

$$m_\mu = a_{\mu.1}x_1 + a_{\mu.2}x_2 + \ldots + a_{\mu.n}x_n = S^n(a_{\mu.1}x_1),$$

dans laquelle le signe S est supposé relatif à l'indice 1, je désignerai l'ensemble de ces mêmes équations par le symbole

$$(23) \quad \Sigma[S^n(a_{\mu.1}x_1) = m_\mu],$$

le signe Σ indiquant ici non pas une somme de quantités mais une suite d'équations semblables à celle que renferment les deux crochets.

Digitized by Google

Je désignerai de même l'ensemble des équations (22) par le symbole

$$(24) \qquad \Sigma\,[S^n(b_{1.\mu}\,m_1) = D_n x_\mu].$$

Ces deux symboles se déduisent l'un de l'autre par les mêmes règles qui servent à déduire l'une de l'autre les deux suites d'équations qu'ils représentent.

Désignons par $(c_{1.n})$ le système de quantités adjoint à $(b_{1.n})$. Je dirai que $(c_{1.n})$ est adjoint du second ordre au système $(a_{1.n})$. Le même système $(c_{1.n})$ sera adjoint et conjugué au système $(b_{n.1})$. Soit encore B_n le déterminant du système $(b_{1.n})$. Si dans les équations (12) et (15) on change a en b, on devra changer aussi b en c et D_n en B_n, et par suite on aura

$$(25) \qquad \begin{cases} B_n = S^n(b_{1.\mu}\,c_{1.\mu}), \\ 0 = S^n(b_{1.\nu}\,c_{1.\mu}), \end{cases}$$

$$(26) \qquad \begin{cases} B_n = S^n(b_{\mu.1}\,c_{\mu.1}), \\ 0 = S^n(b_{\nu.1}\,c_{\mu.1}). \end{cases}$$

Si maintenant on dégage des équations (22) les termes de la suite $m_1, m_2 \ldots m_n$, en suivant les mêmes règles qui ont servi à dégager des équations (20) les termes de la suite $x_1, x_2 \ldots x_n$, on obtiendra les équations suivantes,

$$(27) \qquad \begin{cases} c_{1.1}D_n x_1 + c_{1.2}D_n x_2 + \ldots + c_{1.n}D_n x_n = B_n m_1, \\ c_{2.1}D_n x_1 + c_{2.2}D_n x_2 + \ldots + c_{2.n}D_n x_n = B_n m_2, \\ \&\ldots\ldots \\ c_{n.1}D_n x_1 + c_{n.2}D_n x_2 + \ldots + c_{n.n}D_n x_n = B_n m_n \end{cases}$$

qui pourront être représentées par le symbole

$$(28) \qquad \Sigma[S^n(D_n c_{\mu.1}\,x_1) = B_n m_\mu].$$

Digitized by Google

Les équations (27) peuvent encore être mises sous la forme suivante,

$$(29)\quad \begin{cases} c_{1.1}\frac{D_n}{B_n}x_1 + c_{1.2}\frac{D_n}{B_n}x_2 + \ldots + c_{1.n}\frac{D_n}{B_n}x_n = m_1, \\ c_{2.1}\frac{D_n}{B_n}x_1 + c_{2.2}\frac{D_n}{B_n}x_2 + \ldots + c_{2.n}\frac{D_n}{B_n}x_n = m_2, \\ \&c. \ldots\ldots \\ c_{n.1}\frac{D_n}{B_n}x_1 + c_{n.2}\frac{D_n}{B_n}x_2 + \ldots + c_{n.n}\frac{D_n}{B_n}x_n = m_n : \end{cases}$$

et comme celles-ci doivent avoir lieu en même temps que les équations (20), sans que l'on suppose d'ailleurs entre les termes de la suite $x_1, x_2 \ldots . x_n$ et ceux du système $(a_{1..n})$ aucune relation particulière, il faudra nécessairement que l'on ait, quels que soient μ et ν,

$$c_{\mu.\nu}\frac{D_n}{B_n} = a_{\mu.\nu},$$

ou

$$(30)\quad c_{\mu.\nu} = \frac{B_n}{D_n}a_{\mu.\nu}.$$

Cette équation établit un rapport constant entre les termes du système $(a_{1..n})$ et les termes du système adjoint du second ordre $(c_{1..n})$.

Les équations (27) étant adjointes aux équations (22) et celles-ci aux équations (20), je dirai que les équations (27) sont *adjointes du second ordre* aux équations (20) dont elles ne diffèrent que par un facteur commun à tous leurs termes.

2.e SECTION.

Des Systèmes d'Équations symétriques et de leurs Déterminans.

S. 5.e Considérons maintenant un système d'équations de la forme

Digitized by Google

$$(31)\quad \left\{\begin{array}{ll} a_{1\cdot1}a_{1\cdot1}+a_{1\cdot2}a_{1\cdot2}+\ldots+a_{1\cdot n}a_{1\cdot n}=m_{1\cdot1}, & a_{2\cdot1}a_{1\cdot1}+a_{2\cdot2}a_{1\cdot2}+\ldots+a_{2\cdot n}a_{1\cdot n}=m_{1\cdot2}\ldots \\ & a_{n\cdot1}a_{1\cdot1}+a_{n\cdot2}a_{1\cdot2}+\ldots+a_{n\cdot n}a_{1\cdot n}=m_{1\cdot n}, \\ a_{1\cdot1}a_{2\cdot1}+a_{1\cdot2}a_{2\cdot2}+\ldots+a_{1\cdot n}a_{2\cdot n}=m_{2\cdot1}, & a_{2\cdot1}a_{2\cdot1}+a_{2\cdot2}a_{2\cdot2}+\ldots+a_{2\cdot n}a_{2\cdot n}=m_{2\cdot2}\ldots \\ & a_{n\cdot1}a_{2\cdot1}+a_{n\cdot2}a_{2\cdot2}+\ldots+a_{n\cdot n}a_{2\cdot n}=m_{2\cdot n}, \\ \&c\ldots\ldots & \&c\ldots\ldots \\ a_{1\cdot1}a_{n\cdot1}+a_{1\cdot2}a_{n\cdot2}+\ldots+a_{1\cdot n}a_{n\cdot n}=m_{n\cdot1}, & a_{2\cdot1}a_{n\cdot1}+a_{2\cdot2}a_{n\cdot2}+\ldots+a_{2\cdot n}a_{n\cdot n}=m_{n\cdot2}\ldots \\ & a_{n\cdot1}a_{n\cdot1}+a_{n\cdot2}a_{n\cdot2}+\ldots+a_{n\cdot n}a_{n\cdot n}=m_{n\cdot n}. \end{array}\right.$$

Ce système d'équations renferme trois systèmes de quantités symétriques, savoir,

$$(a_{1\cdot n}),\quad (\alpha_{1\cdot n})\quad \text{et}\quad (m_{1\cdot n}).$$

De plus il est facile de voir que, parmi les équations (31), celles qui se trouvent placées à la suite l'une de l'autre dans une même ligne horizontale forment une suite d'équations symétriques, dans lesquelles les quantités engagées de la forme

$$a_{\mu\cdot1},\quad a_{\mu\cdot2}\ldots\ldots a_{\mu\cdot n}$$

ont pour coefficiens les termes du système $(\alpha_{1\cdot n})$. De même, parmi les équations (31), celles qui se trouvent comprises dans une même colonne verticale forment encore une suite d'équations symétriques dans lesquelles les quantités engagées

$$\alpha_{\mu\cdot1},\quad \alpha_{\mu\cdot2}\ldots\ldots \alpha_{\mu\cdot n}$$

ont pour coefficiens les termes du système $(a_{1\cdot n})$. J'appellerai suite horizontale ou suite verticale une suite d'équations comprises dans une même ligne, soit horizontale, soit verticale, et j'appellerai l'ensemble des équations (31) un *système d'équations symétriques*. Chaque équation de ce système pouvant être mise sous la forme

$$(32)\qquad S^{n}(\alpha_{\nu\cdot1}a_{\mu\cdot1})=m_{\mu\cdot\nu},$$

où le signe S est relatif aux indices 1 qui occupent la seconde place dans $\alpha_{\nu\cdot1}$ et $a_{\mu\cdot1}$; je désignerai le système entier des équations dont il s'agit par le symbole

Digitized by Google

$$(33) \qquad \Sigma[S^n(\alpha_{\nu.1}\, a_{\mu.1}) = m_{\mu.\nu}].$$

J'appellerai systèmes *engagés* les deux systèmes de quantités $(a_{1..n})$, $(\alpha_{1..n})$ dont les termes se trouvent engagés dans les équations dont il s'agit, et système *dégagé* le système de quantités $(m_{1..n})$ dont les termes sont isolés dans les seconds membres. Je désignerai aussi les deux systèmes engagés sous le nom de systèmes *composans*, et le système dégagé sous le nom de systèmes *résultans*. Enfin, je dirai que, dans les équations (31), représentées par le symbole (33), le système résultant $(m_{1..n})$ se trouve déterminé symétriquement au moyen des deux systèmes composans $(a_{1..n})$ et $(\alpha_{1..n})$.

Désignons respectivement par

$$D_n, \quad \delta_n, \quad M_n$$

les déterminans des trois systèmes

$$(a_{1..n}), \quad (\alpha_{1..n}), \quad (m_{1..n}),$$

on aura

$$(34) \quad \begin{cases} D_n = S(\pm a_{1.1}\, a_{2.2} \ldots a_{n.n}), \\ \delta_n = S(\pm \alpha_{1.1}\, \alpha_{2.2} \ldots \alpha_{n.n}), \\ M_n = S(\pm m_{1.1}\, m_{2.2} \ldots m_{n.n}). \end{cases}$$

Dans chacune des trois équations précédentes, le signe S peut être considéré comme relatif, soit aux indices qui occupent la première place, soit à ceux qui occupent la seconde. Ainsi,

$$S(\pm m_{1.1}\, m_{2.2} \ldots . m_{n.n})$$

est une fonction symétrique alternée à l'égard des deux espèces d'indices qui affectent les termes du système $(m_{1..n})$. D'ailleurs, les équations (33) étant toutes comprises dans la formule générale

$$S^n(\alpha_{\nu.1}\, a_{\mu.1}) = m_{\mu.\nu},$$

les deux indices, qui dans chacune de ces équations affectent la lettre

Digitized by Google

m, sont respectivement égaux aux premiers indices qui dans ces mêmes équations affectent les deux lettres a et α, c'est-à-dire, les termes des deux systèmes $(a_{1..n})$ et $(\alpha_{1..n})$. Il suit de cette remarque que, si, dans le second membre de l'équation

$$M_n = S(\pm m_{1.1}\, m_{2.2} \ldots\ldots m_{n.n}),$$

on substitue aux termes du système $(m_{1..n})$ leurs valeurs en a et en α tirées des équations (31), on obtiendra pour résultat une fonction des termes des systèmes $(a_{1..n})$ et $(\alpha_{1..n})$, qui sera symétrique alternée par rapport aux indices qui occupent la première place dans a et par rapport à ceux qui occupent la première place dans α. D'ailleurs, chacune des quantités m étant du premier degré par rapport aux quantités a et par rapport aux quantités α, chaque terme du développement de $S(\pm m_{1.1}, m_{2.2} \ldots m_{n.n})$ sera évidemment de la forme

$$\pm \alpha_{1.\mu}\, \alpha_{2.\nu} \ldots\ldots \alpha_{n.\pi}\, a_{1.\mu'}\, a_{2.\nu'} \ldots\ldots a_{n.\pi'}.$$

Comme ce développement doit être une fonction symétrique alternée par rapport aux indices qui occupent la première place dans a, et par rapport à ceux qui occupent la première place dans α, il ne pourra renfermer le terme qu'on vient de considérer, sans renfermer en même temps le produit

$$\pm S(\pm \alpha_{1.\mu}\, \alpha_{2.\nu} \ldots \alpha_{n.\pi})\, S(\pm a_{1.\mu'}\, a_{2.\nu'} \ldots a_{n.\pi'}).$$

il sera donc équivalent à un ou à plusieurs produits de cette espèce.

Si dans le produit précédent on suppose les indices

$$\mu,\ \nu \ldots\ldots \pi,$$

tous différens les uns des autres, on aura

$$S(\pm \alpha_{1.\mu}\, \alpha_{2.\nu} \ldots\ldots \alpha_{n.\pi}) = \pm S(\pm \alpha_{1.1}\, \alpha_{2.2} \ldots \alpha_{n.n}) = \pm \delta_n.$$

De même, si l'on y suppose les indices

$$\mu',\ \nu' \ldots\ldots \pi',$$

tous

Digitized by Google

tous différens les uns des autres, on aura

$$S(\pm a_{1.\mu'} a_{2.\nu'} \dots a_{n.\pi'}) = \pm S(\pm a_{1.1} a_{2.2} \dots a_{n.n}) = \pm D_n.$$

D'ailleurs, on ne peut supposer deux des indices $\mu, \nu \dots \pi$ égaux entre eux, sans avoir

$$S(\pm a_{1.\mu} a_{2.\nu} \dots a_{n.\pi}) = 0;$$

ni deux des indices $\mu', \nu' \dots \pi'$ égaux entre eux, sans avoir

$$S(\pm a_{1.\mu'} a_{2.\nu'} \dots a_{n.\pi'}) = 0.$$

Le développement de M_n se réduira donc à un ou à plusieurs produits de la forme

$$\pm D_n \delta_n;$$

on a donc

$$M_n = c D_n \delta_n,$$

c étant une quantité constante. Pour déterminer la constante, il suffit d'observer que l'équation précédente étant identique devra encore avoir lieu, si l'on suppose généralement

$$a_{\mu.\mu} = 1, \quad a_{\mu.\mu} = 1, \quad a_{\mu.\nu} = 0, \quad a_{\mu.\nu} = 0:$$

mais alors on a par les équations (31)

$$m_{\mu.\mu} = 1, \quad m_{\mu.\nu} = 0,$$

et par suite

$$M_n = 1, \quad D_n = 1, \quad \delta_n = 1;$$

on doit donc avoir aussi

$$c = 1,$$

et par suite on aura en général

$$(35) \quad M_n = D_n \delta_n.$$

Cette équation renferme un théorème très-remarquable qu'on peut énoncer de la manière suivante :

Digitized by Google

Lorsqu'un système de quantités est déterminé symétriquement au moyen de deux autres systèmes, le déterminant du système résultant est toujours égal au produit des déterminans des deux systèmes composans.

Si dans les équations (31) on remplace les systèmes de quantités $(a_{1..n})$ et $(\alpha_{1..n})$ par les systèmes $(a_{n..1})$ et $(b_{n..1})$, et que l'on suppose généralement

$$m_{\mu.\mu} = D_n, \qquad m_{\mu.\nu} = 0,$$

on obtiendra les équations (10). Dans le même cas, on aura

$$M_n = m_{1.1}\, m_{2.2} \ldots m_{n.n} = D_n^n, \qquad \delta_n = S(\pm b_{1.1}\, b_{2.2} \ldots b_{n.n}) = B_n;$$

et par suite l'équation (35) deviendra

$$D_n^n = B_n D_n,$$

d'où l'on conclut,

$$(36) \qquad B_n = D_n^{n-1}.$$

On voit par cette dernière équation, que *le déterminant du système $(b_{1..n})$ adjoint au système $(a_{1..n})$ est égal à la $(n-1)^{me}$ puissance du déterminant de ce dernier système.*

En vertu de l'équation (36), l'équation (30) devient

$$(37) \qquad c_{\mu.\nu} = D_n^{n-2}\, a_{\mu.\nu}.$$

Ainsi, *étant donné un terme quelconque $a_{\mu.\nu}$ du système $(a_{1..n})$, pour obtenir le terme correspondant du système adjoint du second ordre $(c_{1..n})$, il suffira de multiplier le terme donné par la $(n-2)^{me}$ puissance du déterminant du premier système.*

On a vu que le déterminant d'un système quelconque est toujours égal à celui du système conjugué. Il suit de là, que l'équation (35) subsistera encore, si dans les équations (31) on remplace l'un des systèmes composans $(a_{1..n})$, $(\alpha_{1..n})$, ou tous les deux ensemble, par les systèmes qui leur sont conjugués, savoir, $(a_{n..1})$, $(\alpha_{n..1})$. L'équation (35) convient donc également aux quatre systèmes d'équations symétriques désignés par les quatre symboles suivans,

Digitized by Google

$$(38)\quad \begin{cases} \Sigma\,[S^n(\alpha_{2.1}\,a_{\mu.1}) = m_{\mu.2}], \\ \Sigma\,[S^n(\alpha_{1.2}\,a_{\mu.1}) = m_{\mu.2}], \\ \Sigma\,[S^n(\alpha_{2.1}\,a_{1.\mu}) = m_{\mu.2}], \\ \Sigma\,[S^n(\alpha_{1.2}\,a_{1.\mu}) = m_{\mu.2}], \end{cases}$$

le signe S étant relatif dans tous les cas aux indices de α et de a qui sont égaux à l'unité.

Dans les quatre systèmes d'équations que représentent les quatre symboles précédens, le premier indice de la lettre m est toujours égal à l'indice de a qui reste constant dans chaque équation, et le second indice de m est toujours égal à l'indice de α qui reste constant dans cette même équation. Le contraire aurait lieu, si dans les équations (38) on remplaçait le système $(m_{1..n})$ par son conjugué $(m_{n..1})$; ces équations deviendraient alors

$$(39)\quad \begin{cases} \Sigma\,[S^n(\alpha_{2.1}\,a_{\mu.1}) = m_{2.\mu}], \\ \Sigma\,[S^n(\alpha_{1.2}\,a_{\mu.1}) = m_{2.\mu}], \\ \Sigma\,[S^n(\alpha_{2.1}\,a_{1.\mu}) = m_{2.\mu}], \\ \Sigma\,[S^n(\alpha_{1.2}\,a_{1.\mu}) = m_{2.\mu}]. \end{cases}$$

Pour suivre les dénominations jusqu'à présent adoptées, je dirai que, dans chacun des systèmes d'équations représentés par les symboles (38) et (39), le système $(m_{1..n})$ résulte de la composition des deux systèmes $(a_{1..n})$ et $(\alpha_{1..n})$. J'appellerai *premier système composant* celui dont l'indice constant dans chaque équation détermine le premier indice de m, et *second système composant* celui dont l'indice constant détermine le second indice de m. Ainsi, le système $(a_{1..n})$ est premier composant dans chacune des équations (38), et le système $(\alpha_{1..n})$ est premier composant dans chacune des équations (39). Enfin je dirai que la composition est *directe* par rapport à l'un des systèmes composans, si les indices qui sont constamment égaux dans le système composant et dans le système

Digitized by Google

résultant $(m_{1..n})$ occupent tous deux la première place ou tous deux la seconde ; et je dirai que la composition est *indirecte*, si de ces deux indices l'un occupe la première place et l'autre la seconde.

Cela posé, si l'on examine successivement les quatre systèmes d'équations symétriques représentés par les symboles (38), on reconnaîtra sans peine,

1.° Que, dans le premier système d'équations, la composition est directe par rapport au système $(a_{1..n})$, et indirecte par rapport au système $(\alpha_{1..n})$;

2.° Que, dans le second système d'équations, la composition est directe par rapport aux deux systèmes $(a_{1..n})$, $(\alpha_{1..n})$;

3.° Que, dans le troisième système d'équations, la composition est indirecte par rapport aux deux systèmes $(a_{1..n})$, $(\alpha_{1..n})$;

4.° Que, dans le quatrième système d'équations, la composition est indirecte par rapport au système $(a_{1..n})$, et directe par rapport au système $(\alpha_{1..n})$.

En examinant les systèmes d'équations représentés par les symboles (39), on trouverait des résultats contraires aux précédens. Ainsi par exemple, dans le second des symboles (39), la composition est indirecte par rapport aux deux systèmes de quantités $(a_{1..n})$ et $(\alpha_{1..n})$, tandis qu'elle était directe dans le second des symboles (38).

L'équation (35) n'a pas seulement lieu relativement aux systèmes d'équations représentés par les symboles (38) et (39); mais la valeur de M_n déterminée par cette équation restera encore la même au signe près, si, dans un des systèmes de quantités $(a_{1..n})$, $(\alpha_{1..n})$, ou dans tous les deux à-la-fois, on substitue l'une à l'autre deux suites horizontales ou deux suites verticales; et même si l'on répète cette opération plusieurs fois de suite. En effet, une ou plusieurs substitutions de cette espèce ne changent point la valeur mais tout au plus le signe des déterminans D_n et δ_n.

§. 6.e Si dans l'équation (32) on suppose l'indice ν invariable, et

Digitized by Google

que l'on donne successivement à μ toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à n, on obtiendra une des suites verticales d'équations comprises sous le numéro (31), laquelle pourra être représentée par le symbole

$$\Sigma\,[S^n(a_{\nu,1}\,a_{\mu,1}) = m_{\mu,\nu}],$$

pourvu que l'on y considère l'indice ν comme invariable.

Cela posé, en suivant la méthode qui a servi à passer des équations (23) aux équations (24), on obtiendra une nouvelle suite d'équations adjointes à celles que l'on vient de considérer, et qui seront représentées par le symbole

$$\Sigma\,[S^n(b_{1,\mu}\,m_{1,\nu}) = D_n\,a_{\nu,\mu}],$$

pourvu que l'on y suppose toujours l'indice ν invariable.

Si dans ce dernier symbole on donne successivement à ν toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à n, on obtiendra plusieurs suites d'équations dont l'ensemble formera un nouveau système d'équations symétriques, que l'on pourra représenter par le même symbole

$$(40) \qquad \Sigma\,[S^n(b_{1,\mu}\,m_{1,\nu}) = D_n\,a_{\nu,\mu}],$$

dans lequel on supposera désormais les deux indices μ et ν variables, lorsqu'on passe d'une équation à une autre.

Le symbole (40) représente, ainsi que le symbole (33), un nombre d'équations égal à n^2. Les deux systèmes d'équations symétriques représentés par ces deux symboles étant respectivement composés de plusieurs suites d'équations tellement liées entre elles, que les suites du système (40) sont respectivement adjointes à celles du système (33); je dirai que le système des équations (40) est *adjoint* au système des équations (33). En comparant ces deux systèmes d'équations l'un à l'autre, on trouve que le système de quantités $(a_{1,n})$, qui était engagé dans les équations (33), se trouve dégagé dans les équations (40), tandis que le système de quantités $m_{1,n}$, qui était dégagé dans les premières, se trouve engagé dans les secondes. Ainsi, le passage des équations (33)

Digitized by Google

aux équations (40) sert à dégager le système composant $(\alpha_{1..n})$. La comparaison des symboles (33) et (40) suffit pour établir à ce sujet la règle suivante :

Lorsqu'un système de quantités $(m_{1..n})$ résulte de la composition de deux autres systèmes $(a_{1..n})$ et $(\alpha_{1..n})$; pour dégager l'un des systèmes composans $(\alpha_{1..n})$, il faut,

1.° Échanger entre eux le système composant que l'on veut dégager $(\alpha_{1..n})$ et le système résultant $(m_{1..n})$, en ayant soin de laisser respectivement à leurs places les indices qui étaient communs aux lettres α et m;

2.° Multiplier tous les termes du système composant que l'on dégage par le déterminant du système composant qu'on laisse engagé;

3.° Remplacer ce dernier système $(a_{1..n})$ par le système adjoint et conjugué $(b_{n..1})$.

Si dans l'équation

$$S^n(a_{\nu.1}\, a_{\mu.1}) = m_{\mu.\nu}$$

on suppose l'indice μ invariable, et que l'on donne successivement à ν toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à n; on obtiendra une des suites horizontales d'équations comprises sous le numéro (31), laquelle pourra être représentée par le symbole

$$\Sigma\,[S^n(a_{\nu.1}\, a_{\mu.1}) = m_{\mu.\nu}),$$

pourvu que l'on y considère l'indice μ comme invariable.

Soit maintenant $(\beta_{n..1})$ le système adjoint et conjugué à $(a_{1..n})$. δ_n étant le déterminant de ce dernier système; la suite des équations adjointes à celles que l'on vient de considérer sera représentée par le symbole

$$\Sigma\,[S^n(m_{\mu.1}\, \beta_{1..\nu}) = \delta_n a_{\mu.\nu}],$$

μ étant supposé invariable relativement à une même suite d'équations. Si maintenant on donne successivement à μ dans ce même symbole toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à n, on aura un nouveau

Digitized by Google

système d'équations que l'on pourra représenter par le même symbole

$$(41) \qquad \Sigma\,[S^n(m_{\mu.1}\,\beta_{1.\nu}) = \delta_n\,a_{\mu.\nu}],$$

en y supposant désormais variables les deux indices μ et ν. Ce dernier système d'équations est, ainsi que le système (40), adjoint au système d'équations (33). Les deux systèmes d'équations (40) et (41) seront appelés tous deux adjoints du premier ordre au système d'équations (33). On a vu qu'il suffisait, pour obtenir le premier, de dégager du système d'équations (33) le système composant $(a_{\cdot.n})$. Il suffit de même, pour obtenir le second, de dégager l'autre système composant $(a_{1.n})$: d'ailleurs, pour dégager ce dernier système composant des équations

$$\Sigma\,[S^n(a_{\nu.1}\,a_{\mu.1}) = m_{\mu\,1}],$$

il faut, en suivant la règle établie ci-dessus,

1.° Remplacer $m_{\mu.\nu}$ par $a_{\mu.\nu}$ et $a_{\mu.1}$ par $m_{\mu.1}$,

2.° Multiplier $a_{\mu.\nu}$ par δ_n,

3.° Remplacer $a_{\nu.1}$ par $\beta_{1.\nu}$.

On obtient donc immédiatement par cette règle le système d'équations

$$(41) \qquad \Sigma\,[S^n(m_{\mu.1}\,\beta_{1.\nu}) = \delta_n\,a_{\mu.\nu}].$$

On a vu dans la section précédente, que, si, après avoir dégagé d'une suite d'équations symétriques la suite des quantités engagées, au moyen des équations adjointes du premier ordre, on dégageait de nouveau la suite que la première opération avait engagée, les équations adjointes du second ordre obtenues par cette seconde opération ne différaient des équations primitives que par un facteur commun à tous leurs termes. De même, si, après avoir dégagé du système d'équations (33) les systèmes de quantités $(a_{1.n})$ et $(a_{1.n})$ au moyen des équations (40) et (41), on voulait de nouveau dégager des équations (40) ou des équations (41) le système de quantités $(m_{\cdot.n})$, les équations adjointes du second ordre obtenues par ce moyen ne différeraient des

Digitized by Google

équations (33) que par un facteur commun à tous leurs termes. Mais si l'on dégage des équations (40) le système de quantités $(b_{1..n})$, et des équations (41) le système de quantités $(\beta_{1..n})$, on obtiendra deux nouveaux systèmes d'équations symétriques qui seront *adjoints du second ordre* au système des équations (33), et qui seront différens des trois systèmes d'équations (33), (40) et (41).

Soit $(r_{1..n})$ le système de quantités adjoint au système $(m_{1..n})$. M_n étant toujours le déterminant du système $(m_{1..n})$, on aura en vertu de l'équation (35)

$$M_n = D_n \delta_n.$$

Cela posé, pour dégager des équations

$$(40) \qquad \Sigma\,[S^n(b_{1..\mu}\, m_{1..\nu}) = D_n \alpha_{\nu..\mu}],$$

le système de quantités $(b_{1..n})$, il faudra, d'après la règle établie ci-dessus,

1.° Remplacer $D_n \alpha_{\nu..\mu}$ par $b_{\nu..\mu}$ et $b_{1..\mu}$ par $D_n \alpha_{1..\mu}$,

2.° Multiplier $b_{\nu..\mu}$ par M_n,

3.° Remplacer $m_{1..\nu}$ par $r_{\nu..1}$.

on obtiendra de cette manière le système d'équations représenté par le symbole

$$\Sigma\,[S^n(D_n \alpha_{1..\mu} r_{\nu..1}) = M_n b_{\nu..\mu}].$$

Si dans ce système on divise les deux membres de chaque équation par D_n, en observant que $\frac{M_n}{D_n} = \delta_n$; le symbole précédent deviendra

$$(42) \qquad \Sigma\,[S^n(\alpha_{1..\mu} r_{\nu..1}) = \delta_n b_{\nu..\mu}].$$

Le système d'équations représenté par ce dernier symbole est un des deux systèmes adjoints du second ordre aux équations (33). Pour obtenir l'autre système adjoint, il suffira de dégager le système de quantités $(\beta_{1..\nu})$ des équations

(41)

Digitized by Google

$$(41) \qquad \Sigma[S^n(m_{\mu.1}\beta_{1.\nu}) = \delta_n a_{\mu.\nu}].$$

Pour y parvenir, il faut, en vertu de la règle citée,

1.° Remplacer $\delta_n a_{\mu.\nu}$ par $\beta_{\mu.\nu}$ et $\beta_{1.\nu}$ par $\delta_n a_{1.\nu}$,

2.° Multiplier $\beta_{\mu.\nu}$ par M_n,

3.° Remplacer $m_{\mu.1}$ par $r_{1.\mu}$.

Le symbole qui représente le système d'équations cherché sera donc

$$\Sigma[S^n(r_{1.\mu}\delta_n a_{1.\nu}) = M_n\beta_{\mu\nu}].$$

Si l'on divise les deux membres de chacune des équations comprises dans ce système par δ_n, en observant que $\frac{M_n}{\delta_n} = D_n$, le symbole précédent deviendra

$$(43) \qquad \Sigma[S^n(r_{1.\mu}a_{1.\nu}) = D_n\beta_{\mu.\nu}].$$

Ainsi, le système des équations (33) a pour systèmes adjoints du second ordre ceux qui sont représentés par les symboles (42) et (43).

Si maintenant on voulait dégager des équations (42) le système de quantités $(\alpha_{1.n})$, ou des équations (43) le système de quantités $(a_{1.n})$, on retrouverait les équations (40) et (41) multipliées par un facteur commun à tous leurs termes; mais, si l'on dégage des équations (42) ou des équations (43) le système de quantités $(r_{1.n})$, on obtiendra un nouveau système d'équations symétriques, que j'appellerai *adjoint du troisième ordre* au système des équations (33). Pour obtenir ce nouveau système, il faut dans les équations

$$(42) \qquad \Sigma[S^n(\alpha_{1.\mu}r_{\nu.1}) = \delta_n b_{\nu.\mu}];$$

1.° Remplacer $\delta_n b_{\nu.\mu}$ par $r_{\nu.\mu}$ et $r_{\nu.1}$ par $\delta_n b_{\nu.1}$,

2.° Multiplier $r_{\nu.\mu}$ par δ_n,

3.° Remplacer $\alpha_{1.\mu}$ par $\beta_{\mu.1}$:

on obtient de cette manière le symbole

$$\Sigma[S^n(\beta_{\mu.1}\delta_n b_{\nu.1}) = \delta_n r_{\nu.\mu}].$$

Digitized by Google

En divisant chacune des équations qui s'y trouvent comprises par δ_n, on aura le symbole suivant

$$(44) \qquad \Sigma\,[S^n(\beta_{\mu.1}\, b_{\nu.1}) = r_{\nu.\mu}]$$

qui représente le système des équations adjointes du troisième ordre aux équations (33). Il est à remarquer que, pour déduire les équations (40) des équations (33), il suffit de remplacer dans ces dernières les trois systèmes de quantités

$$(a_{1.n}),\quad (a_{1.n}),\quad (m_{1.n})$$

par les systèmes adjoints du ~~premier ordre~~

$$(\beta_{1.n}),\quad (b_{1.n}),\quad (r_{1.n}).$$

Ainsi, les relations établies par les équations (33) entre les trois premiers systèmes de quantités subsistent encore entre les trois autres.

§. 7.^e Avant de passer à de nouvelles recherches, il ne sera pas inutile de réunir en un seul tableau les principaux résultats que fournit l'analyse précédente relativement à trois systèmes de quantités liés entre eux par un système d'équations symétriques.

Soient respectivement

$$(a_{1.n}),\quad (a_{1.n}),\quad (m_{1.n}),$$

les trois systèmes de quantités dont il s'agit. Désignons par

$$(\beta_{1.n}),\quad (b_{1.n}),\quad (r_{1.n}),$$

les systèmes adjoints du premier ordre aux trois systèmes donnés, et par

$$(\gamma_{1.n}),\quad (c_{1.n}),\quad (t_{1.n}),$$

les trois systèmes adjoints du second ordre.

Enfin représentons, comme ci-dessus, par

$$(33) \qquad \Sigma\,[S^n(a_{\nu.1}\, a_{\mu.1}) = m_{\mu.\nu}]$$

le système d'équations symétriques par lequel les trois systèmes donnés se trouvent liés entre eux, et désignons respectivement les déterminans des systèmes

Digitized by Google

$(\alpha_{1..n})$, $(\beta_{1..n})$, $(\gamma_{1..n})$, $(a_{1..n})$, $(b_{1..n})$, $(c_{1..n})$, $(m_{1..n})$, $(r_{1..n})$, $(t_{1..n})$,

par

$$\delta_n, \quad \zeta_n, \quad \theta_n, \quad D_n, \quad B_n, \quad C_n, \quad M_n, \quad R_n, \quad T_n;$$

on aura entre les termes et les déterminans des systèmes dont il s'agit, les équations suivantes,

$$(45)\quad \left\{\begin{array}{ccc} & M_n = D_n\delta_n, & \\ \zeta_n = \delta_n^{n-1}, & B_n = D_n^{n-1}, & R_n = M_n^{n-1}, \\ & R_n = B_n\zeta_n, & \\ \theta_n = \overline{\delta_n^{n-1}}^2, & C_n = \overline{D_n^{n-1}}^2, & T_n = \overline{M_n^{n-1}}^2, \\ & T_n = C_n\theta_n. & \end{array}\right\}$$

$$(46)\quad \left\{\begin{array}{l} \gamma_{\mu.\nu} = \delta_n^{n-2}a_{\mu.\nu}, \; c_{\mu.\nu} = D_n^{n-2}a_{\mu.\nu}, \; t_{\mu.\nu} = M_n^{n-2}m_{\mu.\nu}, \\ \gamma_{\mu.\nu}\delta_n = \zeta_n a_{\mu.\nu}, \; c_{\mu.\nu}D_n = B_n a_{\mu.\nu}, \; t_{\mu.\nu}M_n = R_n m_{\mu.\nu}. \end{array}\right\}$$

$$(47)\quad \left\{\begin{array}{l} \delta_n = S^n(a_{\mu.1}\beta_{\mu.1}), \; D_n = S^n(a_{\mu.1}b_{\mu.1}), \; M_n = S^n(m_{\mu.1}r_{\mu.1}), \\ \delta_n = S^n(a_{1.\mu}\beta_{1.\mu}), \; D_n = S^n(a_{1.\mu}b_{1.\mu}), \; M_n = S^n(m_{1.\mu}r_{1.\mu}), \\ 0 = S^n(a_{\mu.1}\beta_{\nu.1}), \; 0 = S^n(a_{\mu.1}b_{\nu.1}), \; 0 = S^n(m_{\mu.1}r_{\nu.1}), \\ 0 = S^n(a_{1.\mu}\beta_{1.\nu}), \; 0 = S^n(a_{1.\mu}b_{1.\nu}), \; 0 = S^n(m_{1.\mu}r_{1.\nu}), \\ \zeta_n = S^n(\beta_{\mu.1}\gamma_{\mu.1}), \; C_n = S^n(b_{\mu.1}c_{\mu.1}), \; T_n = S^n(r_{\mu.1}t_{\mu.1}), \\ \zeta_n = S^n(\beta_{1.\mu}\gamma_{1.\mu}), \; C_n = S^n(b_{1.\mu}c_{1.\mu}), \; T_n = S^n(r_{1.\mu}t_{1.\mu}), \\ 0 = S^n(\beta_{\mu.1}\gamma_{\nu.1}), \; 0 = S^n(b_{\mu.1}c_{\nu.1}), \; 0 = S^n(r_{\mu.1}t_{\nu.1}), \\ 0 = S^n(\beta_{1.\mu}\gamma_{1.\nu}), \; 0 = S^n(b_{1.\mu}c_{1.\nu}), \; 0 = S^n(r_{1.\mu}t_{1.\nu}). \end{array}\right\}$$

$$(48)\quad \left\{\begin{array}{c} \Sigma[S^n(a_{\nu.1}a_{\mu.1}) = m_{\mu.\nu}]; \\ \Sigma[S^n(b_{1.\mu}m_{1.\nu}) = D_n a_{\nu.\mu}], \; \Sigma[S^n(m_{\mu.1}\beta_{1.\nu}) = \delta_n a_{\mu.\nu}], \\ \Sigma[S^n(a_{1.\mu}r_{\nu.1}) = \delta_n b_{\nu\mu}], \; \Sigma[S^n(r_{1.\mu}a_{1.\nu}) = D_n\beta_{\mu.\nu}], \\ \Sigma[S^n(\beta_{\mu.1}b_{\nu.1}) = r_{\mu.\nu}]. \end{array}\right\}$$

Digitized by Google

Lorsque dans ces équations on suppose successivement

$$n = 2 \quad \text{et} \quad n = 3,$$

on obtient diverses formules qui ont été données par M. *Gauss* et appliquées par ce géomètre à la théorie des formes binaires et trinaires du second degré.

Les systèmes d'équations (48) sont les mêmes que les systèmes (33), (40), (41), (42), (43) et (44). Les cinq derniers sont adjoints du premier, du second et du troisième ordre au système (33). Pour les obtenir tous les cinq, il suffit de dégager successivement des équations (33)

1.° Les deux systèmes de quantités $(\alpha_{1..n})$ et $(a_{1..n})$,

2.° Les deux systèmes adjoints aux précédens, savoir, $(\beta_{1..n})$ et $(b_{1..n})$,

3.° Le système de quantités $(r_{1..n})$ adjoint au système $(m_{1..n})$.

Si l'on voulait des équations (44) dégager l'un des systèmes $(\beta_{1..n})$, $(b_{1..n})$; en ayant égard aux relations établies par les équations (46), on retrouverait les équations (42) et (43). Ainsi, d'un système d'équations symétriques de l'ordre n, on peut toujours déduire cinq autres systèmes semblables, savoir, deux systèmes adjoints du premier ordre, deux systèmes adjoints du second ordre, un seul système adjoint du troisième ordre; mais on n'en saurait déduire un plus grand nombre.

§. 8.e Je reviens maintenant aux équations (31) qui se trouvent représentées par le symbole (33). Lorsqu'on les ajoute entre elles, on a l'équation suivante,

$$(49)\quad \begin{cases} (a_{1..1}+a_{2..1}+\ldots+a_{n..1})\,(a_{1..1}+a_{2..1}+\ldots+a_{n..1}), \\ +\,(a_{1..2}+a_{2..2}+\ldots+a_{n..2})\,(a_{1..2}+a_{2..2}+\ldots+a_{n..2}), \\ +\,\&c.\ldots\ldots \\ +\,(a_{1..n}+a_{2..n}+\ldots+a_{n..n})\,(a_{1..n}+a_{2..n}+\ldots+a_{n..n}), \\ =m_{1..1}+m_{2..1}+\ldots+m_{n..1}+m_{1..2}+\ldots+m_{n..2}+\ldots+m_{n..n}. \end{cases}$$

On peut mettre cette équation sous la forme suivante,

Digitized by Google

$$S^n(\alpha_{\mu.1})\,S^n(a_{\mu.1}) + S^n(\alpha_{\mu.2})\,S^n(a_{\mu.2}) + \ldots + S^n(\alpha_{\mu.n})\,S^n(a_{\mu.n})$$
$$= S^n(m_{\mu.1}) + S^n(m_{\mu.2}) + \ldots + S^n(m_{\mu.n}),$$

le signe S étant ici relatif aux indices μ qui occupent la première place dans les termes des systèmes

$$(\alpha_{1..n}),\quad (a_{1..n}),\quad (m_{1..n}).$$

On peut encore mettre la même équation sous la forme

$$(50)\qquad S^{\nu}\{S^n(\alpha_{\mu.\nu})\,S^n(a_{\mu.\nu})\} = S^{\nu}S^n(m_{\mu.\nu}),$$

le premier signe S dans chaque membre étant relatif à l'indice ν et les autres à l'indice μ.

Si au lieu d'ajouter entre elles les équations (33) on ajoute les équations (44), on obtiendra une équation semblable à l'équation (50), et qui pourra être mise sous la forme

$$(51)\qquad S^n\{S^n(\beta_{\mu.\nu})\,S^n(b_{\mu.\nu})\} = S^nS^n(r_{\mu.\nu}),$$

pourvu que les opérations indiquées par le signe S dans

$$S^n(\beta_{\mu.\nu}),\quad S^n(b_{\mu.\nu}),\quad S^n(r_{\mu.\nu})$$

soient relatives aux indices μ qui occupent la première place, et que les deux autres signes S employés dans l'équation (51) soient relatifs aux indices ν qui occupent la seconde place.

On obtiendrait de la même manière, par l'addition des équations (40), (41), (42), (43), les valeurs de

$$S^nS^n(\alpha_{\nu.\mu}),\quad S^nS^n(a_{\mu.\nu}),\quad S^nS^n(b_{\nu.\mu}),\quad S^nS^n(\beta_{\mu.\nu}).$$

3.e SECTION.

Des Systèmes de Quantités dérivées et de leurs Déterminans.

5. 9.e Soit $(a_{1..n})$ un système quelconque de l'ordre n. Les indices qui affectent les différens termes de ce système étant respectivement

Digitized by Google

égaux aux nombres 1, 2, 3 ... n; supposons qu'on les assemble p à p de toutes les manières possibles : le nombre des combinaisons que l'on pourra former par ce moyen sera égal à la fraction

$$\frac{n(n-1)\ldots.(n-p+1)}{1.2.3\ldots.p}$$

que je désignerai par P.

Supposons maintenant qu'après avoir écrit ces combinaisons à la suite les unes des autres, en commençant par celles où le produit des indices est le plus petit possible, et finissant par celles où le produit des indices est le plus grand possible, on leur fasse correspondre les numéros (1), (2), (3) ... $(P-1)$, (P). Le numéro (1) correspondra à la combinaison

$$1.2.3\ldots p,$$

et le numéro (P) à la combinaison

$$n-p+1.n-p+2\ldots.n-1.n,$$

dans laquelle le produit des indices est évidemment plus grand que dans toutes les autres.

Soient maintenant (μ) et (ν) deux des numéros affectés aux combinaisons dont il s'agit. Si dans le système donné $(a_{1..n})$ on supprime tous les termes à l'exception de ceux qui ont leur premier indice compris dans la combinaison (μ) et leur second indice compris dans la combinaison (ν), les termes restans formeront un système de quantités symétriques de l'ordre p. Ainsi, par exemple, si $\mu = \nu = 1$, les combinaisons (μ) et (ν) se réduiront à une seule combinaison formée des indices

$$1, 2, 3\ldots p,$$

et dans ce cas, les termes conservés du système $(a_{1..n})$ formeront le système $(a_{1..p})$ de l'ordre p, savoir

Digitized by Google

$$(52)\quad \begin{cases} a_{1.1}, & a_{1.2} \ldots\ldots a_{1.p}, \\ a_{2.1}, & a_{2.2} \ldots\ldots a_{2.p}, \\ \&c.\ldots\ldots \\ a_{p.1}, & a_{p.2} \ldots\ldots a_{p.p}, \end{cases}$$

dont le déterminant sera D_p.

Si l'on n'a pas $\mu = 1$; $\nu = 1$, alors au lieu du système (52) on aura un autre système de l'ordre (p), dans lequel les indices des suites horizontales seront égaux à ceux que renferme la combinaison (μ), et les indices des suites verticales égaux à ceux que renferme la combinaison (ν). Je désignerai le déterminant de ce dernier système par $a^{(p)}_{\mu.\nu}$. Sa valeur absolue dépend uniquement des indices compris dans les combinaisons (μ) et (ν); mais son signe reste arbitraire, à moins que l'on n'introduise de nouvelles conditions dans le calcul.

Si dans $a^{(p)}_{\mu.\nu}$ on donne successivement à μ et à ν toutes les valeurs possibles depuis 1 jusqu'à P, on aura en tout un nombre de déterminans égal à P^2. Ces déterminans rangés en carré de la manière suivante

$$(53)\quad \begin{cases} a^{(p)}_{1.1}, & a^{(p)}_{1.2} \ldots\ldots a^{(p)}_{1.P}, \\ a^{(p)}_{2.1}, & a^{(p)}_{2.2} \ldots\ldots a^{(p)}_{2.P}, \\ \&c.\ldots\ldots \\ a^{(p)}_{P.1}, & a^{(p)}_{P.2} \ldots\ldots a^{(p)}_{P.P}, \end{cases}$$

formeront un système symétrique de l'ordre P, dont le premier terme $a^{(p)}_{1.1}$ sera égal à D_p, et dont les autres termes pourront être déduits du premier à l'aide de substitutions opérées entre les indices qui affectent les termes du système $(a_{1.n})$. Pour suivre la notation précédemment adoptée, je désignerai le système (53) par

Digitized by Google

$$\left(a^{(p)}_{1.P}\right).$$

Si l'on donne successivement à p toutes les valeurs

$$1,\quad 2,\quad 3 \ldots\ldots n-3,\quad n-2,\quad n-1,$$

P prendra les valeurs suivantes,

$$n,\quad \frac{n(n-1)}{1.2},\quad \frac{n.(n-1)\,(n-2)}{1.2.3} \ldots \frac{n(n-1)\,(n-2)}{1.2.3},\quad \frac{n(n-1)}{1.2},\quad n,$$

et l'on obtiendra par suite un nombre ~~égal à~~ $n-1$ de systèmes symétriques différens les uns des autres, dont le premier sera le système donné $(a_{1.n})$. Ces différens systèmes seront désignés respectivement par

$$(a_{1.n}),\quad \left[a^{(2)}_{1.\frac{n(n-1)}{2}}\right],\quad \left[a^{(3)}_{1.\frac{n(n-1)\,(n-2)}{1.2.3}}\right]\quad \&c.\ldots\ldots,$$

$$\left[a^{(n-3)}_{1.\frac{n(n-1)\,(n-2)}{1.2.3}}\right],\quad \left[a^{(n-2)}_{1.\frac{n(n-1)}{1.2}}\right],\quad \left(a^{(n-1)}_{1.n}\right);$$

je les appellerai *systèmes dérivés* de $(a_{1.n})$. Parmi ces systèmes, ceux qui correspondent à des valeurs de p dont la somme est égale à n sont toujours de même ordre ; je les appellerai *systèmes dérivés complémentaires*. Ainsi en général

$$\left(a^{(p)}_{1.P}\right)\quad \text{et}\quad \left(a^{(n-p)}_{1.P}\right)$$

sont deux systèmes dérivés complémentaires l'un de l'autre, dont l'ordre est égal à

$$P = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots\ldots p}.$$

Les différens termes du système (53) représentant autant de déterminans de l'ordre p, on peut supposer à volonté chacun de ces termes positif ou négatif. De plus, les numéros correspondans aux diverses combinaisons

Digitized by Google

combinaisons des indices 1, 2, 3 .... n ne sont pas entièrement déterminés par cette seule condition, que l'on donne de moindres numéros aux combinaisons dans lesquelles les produits des indices sont plus petits. Quoi qu'il en soit, on pourra, sans détruire les propositions que nous allons démontrer, régler à volonté ce qu'il y a d'arbitraire dans la détermination des signes et des numéros dont il s'agit; pourvu qu'après avoir fixé d'une certaine manière les signes et les numéros relatifs aux termes du système dérivé $\left(a^{(p)}_{1.P}\right)$, on fixe de la manière suivante les signes et les numéros relatifs aux termes du système dérivé complémentaire $\left(a^{(n-p)}_{1.P}\right)$:

1.° Soit (μ) le numéro correspondant à l'une des combinaisons formées avec un nombre égal à p d'indices pris dans la suite

$$1,\quad 2,\quad 3 \ldots\ldots n;$$

on désignera par $(P-\mu+1)$ le numéro qui correspond à la combinaison formée avec ceux des indices 1, 2, 3 ... n qui sont exclus de la combinaison μ, en nombre égal à $(n-p)$. Par suite, si l'on compare entre eux les deux termes

$$a^{(p)}_{\mu.\pi};\quad a^{(n-p)}_{P-\mu+1.P-\pi+1};$$

dont l'un est pris dans le système $\left(a^{(p)}_{1.P}\right)$ et l'autre dans le système complémentaire $\left(a^{(n-p)}_{1.P}\right)$, et que l'on examine les indices qui dans ces deux déterminans affectent les termes du système $(a_{1.n})$, on trouvera que les indices compris dans le déterminant $a^{(p)}_{\mu.\pi}$ sont exclus du déterminant $a^{(n-p)}_{P-\mu+1.P-\pi+1}$, et réciproquement. Je désignerai les deux quantités

$$a^{(p)}_{\mu.\pi},\quad a^{(n-p)}_{P-\mu+1.P-\pi+1}$$

Digitized by Google

sous le nom de *termes complementaires* des deux systèmes

$$\left(a^{(p)}_{1.P}\right), \quad \left(a^{(n-p)}_{1.P}\right).$$

Le premier terme du système (53) étant

$$a^{(p)}_{1.1} = D_p = \pm S(\pm a_{1.1}\, a_{2.2} \ldots a_{p.p}),$$

le terme complémentaire pris dans le système $\left(a^{(n-p)}_{1.P}\right)$ sera

$$a^{(n-p)}_{P.P} = \pm S(\pm a_{p+1.p+1}\, a_{p+2.p+2} \ldots a_{n.n}).$$

2.° Le produit des deux termes précédens, ou

$$\pm S(\pm a_{1.1}\, a_{2.2} \ldots a_{p.p}).S(\pm a_{p+1.p+1}\, a_{p+2.p+2} \ldots a_{n.n})$$

est, abstraction faite du signe, évidemment égal à la somme de plusieurs produits symétriques affectés des mêmes signes que dans le déterminant D_n; c'est-à-dire, à une portion de ce déterminant. En général, il est facile de voir que le produit de deux termes complémentaires pris à volonté est toujours, au signe près, une portion de ce même déterminant. Cela posé, étant donné le signe de l'un de ces deux termes, on déterminera celui de l'autre par la condition que leur produit soit affecté du même signe que la portion correspondante du déterminant D_n.

Si l'on suppose $p = 1$, on aura $P = n$, et la quantité $a^{(p)}_{\mu.\pi}$ deviendra généralement égale à

$$a_{\mu.\pi}.$$

Dans le même cas, la quantité complémentaire $a^{(n-p)}_{P-\mu+1.P-\pi+1}$ deviendra égale à

$$b_{\mu.\pi}.$$

Digitized by Google

§. 10.e On a fait voir dans le §. 3.e, que la fonction symétrique alternée

$$S(\pm a_{1.1}\, a_{2.2}\, a_{3.3} \ldots a_{n.n}) = D_n$$

était équivalente à celle-ci

$$S[\pm S(\pm a_{1.1}\, a_{2.2} \ldots . a_{n-1.n-1}) . a_{n.n}].$$

On fera voir de même qu'elle est encore équivalente à

$$S[\pm S(\pm a_{1.1}\, a_{2.2} \ldots a_{p.p}) . S(\pm a_{p+1.p+1} \ldots a_{n-1.n-1}\, a_{n.n})],$$

les opérations indiquées par le signe S pouvant être considérées comme relatives, soit aux premiers, soit aux seconds indices. On a d'ailleurs par ce qui précède

$$S(\pm a_{1.1}\, a_{2.2} \ldots . a_{p.p}) = \pm a^{(p)}_{1.1},$$

$$S(\pm a_{p+1}\, a_{p+1} \ldots . a_{n.n}) = \pm a^{(n-p)}_{P.P}.$$

Enfin les signes des quantités de la forme $a^{(p)}_{1.1}$, $a^{(n-p)}_{P.P}$ doivent être tels que les produits semblables à $a^{(p)}_{1.1}\, a^{(n-p)}_{P.P}$ soient dans le déterminant D_n affectés du signe $+$. Cela posé, il résulte de l'équation

$$D_n = S[\pm S(\pm a_{1.1}\, a_{2.2} \ldots a_{p.p}) . S(\pm a_{p+1.p+1} \ldots a_{n-1.n-1}\, a_{n.n})],$$

que D_n est la somme de plusieurs produits de la forme

$$a^{(p)}_{1.1}\, a^{(n-p)}_{P.P}.$$

Selon que pour obtenir ces différens produits on échangera entre eux les premiers ou les seconds indices du système $(a_{1.n})$, on trouvera ou l'équation

$$D_n = a^{(p)}_{1.1}\, a^{(n-p)}_{P.P} + a^{(p)}_{2.1}\, a^{(n-p)}_{P-1.P} + \ldots + a^{(p)}_{P.1}\, a^{(n-p)}_{1.P},$$

ou celle-ci

$$D_n = a^{(p)}_{1.1}\, a^{(n-p)}_{P.P} + a^{(p)}_{1.2}\, a^{(n-p)}_{P.P-1} + \ldots + a^{(p)}_{1.P}\, a^{(n-p)}_{P.1},$$

Digitized by Google

On aura de même en général les deux équations

$$D_n = a^{(p)}_{1.\pi}\, a^{(n-p)}_{P.P-\pi+1} + a^{(p)}_{2.\pi}\, a^{(n-p)}_{P-1.P-\pi+1} + \ldots + a^{(p)}_{P.\pi}\, a^{(n-p)}_{1.P-\pi+1},$$

$$D_n = a^{(p)}_{\mu.1}\, a^{(n-p)}_{P-\mu+1.P} + a^{(p)}_{\mu.2}\, a^{(n-p)}_{P-\mu+1.P} + \ldots + a^{(p)}_{\mu.P}\, a^{(n-p)}_{P-\mu+1.1}.$$

Ces deux équations sont comprises dans la suivante

$$(54) \qquad D_n = S^p\left(a^{(p)}_{\mu.\pi}\, a^{(n-p)}_{P-\mu+1.P-\pi+1}\right)$$

qui a lieu également, soit que l'on considère le signe S comme relatif à l'indice μ, soit qu'on le considère comme relatif à l'indice π.

Si dans l'équation (54) on suppose $p = 1$, elle deviendra

$$D_n = S^n(a_{\mu.\pi}\, b_{\mu.\pi}).$$

Suivant que l'on suppose dans cette dernière le signe S relatif à l'indice π ou à l'indice μ, on obtient l'une ou l'autre des deux équations

$$D_n = S^n(a_{\mu.1}\, b_{\mu.1}),$$

$$D_n = S^n(a_{1.\pi}\, b_{1.\pi}) = S^n(a_{1.\mu}\, b_{1.\mu}),$$

qui ont déjà été trouvées dans le §. 3.e

D_n étant une fonction symétrique alternée des indices du système $(a_{1..n})$ doit se réduire à zéro, lorsqu'on y remplace un de ces indices par un autre. Si l'on opère de semblables remplacemens à l'égard des indices qui occupent la première place dans le système $(a_{1..n})$, et qui entrent dans la combinaison (μ); cette même combinaison se trouvera transformée en une autre que je désignerai par (ν), et $a^{(p)}_{\mu.\pi}$ sera changé en $a^{(p)}_{\nu.\pi}$. D'ailleurs, en supposant le signe S relatif à π, on a

$$(54) \qquad D_n = S^p\left(a^{(p)}_{\mu.\pi}\, a^{(n-p)}_{P-\mu+1.P-\pi+1}\right).$$

Digitized by Google

on aura donc par suite

$$(55) \qquad o = S^p \left(a^{(p)}_{\nu.\pi} \, a^{(n-p)}_{P-\mu+1.P-\pi+1} \right).$$

On aurait de même, en supposant le signe S relatif à l'indice μ, et en désignant par (τ) une nouvelle combinaison différente de (π),

$$(56) \qquad o = S^p \left(a^{(p)}_{\mu.\tau} \, a^{(n-p)}_{P-\mu+1.P-\pi+1} \right).$$

Si dans les équations (55) et (56) on suppose $p = 1$, on retrouvera les équations

$$o = S^n (a_{\nu.1} \, b_{\mu.1}),$$
$$o = S^n (a_{1.\tau} \, b_{1.\pi}) = S^n (a_{1.\nu} \, b_{1.\mu}),$$

que nous avons déjà obtenues dans le §. 3.e

Si dans les équations (54) et (56) on suppose le signe S relatif à l'indice μ, et que l'on donne successivement à π et à τ toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à P, on obtiendra le système d'équations suivant dont l'ordre est égal à P :

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_n = a^{(p)}_{1.1} a^{(n-p)}_{P.P} + a^{(p)}_{2.1} a^{(n-p)}_{P-1.P} + \ldots + a^{(p)}_{P.1} a^{(n-p)}_{1.P}, \; o = a^{(p)}_{1.1} a^{(n-p)}_{P.P-1} + \ldots + a^{(p)}_{P.1} a^{(n-p)}_{1.P-1}, \\ \qquad\qquad\qquad\

Ce système d'équations peut être représenté par le symbole

$$\Sigma\left\{S^{P}\left(a^{(p)}_{\mu.\tau}\,a^{(n-p)}_{P-\mu+1.P-\pi+1}\right)=D_{\pi.\tau}\right\},$$

pourvu que l'on suppose généralement

$$D_{\pi.\tau}=0,$$

lorsque π et τ sont inégaux, et

$$D_{\pi.\pi}=D_{\tau.\tau}=D_{n},$$

dans le cas contraire.

Cela posé, désignons généralement par

$$D^{(p)}_{P}$$

le déterminant du système $\left(a^{(p)}_{1.P}\right)$;

$$D^{(n-p)}_{P}$$

sera le déterminant du système complémentaire $\left(a^{(n-p)}_{1.P}\right)$. D'ailleurs dans les équations (57) le déterminant du système dégagé doit être égal au produit des déterminans des deux systèmes engagés, et comme le système dégagé a pour déterminant

$$D^{P}_{n},$$

on aura

$$(58)\qquad D^{P}_{n}=D^{(p)}_{P}\,D^{(n-p)}_{P}.$$

Lorsqu'on suppose $p=1$, les équations (57) se confondent avec les équations (10) obtenues dans le §. 3.e, et l'équation (58) se change en la suivante

$$D^{n}_{n}=D_{n}B_{n},$$

qui était déjà connue.

Digitized by Google

Si n est un nombre pair, et que l'on suppose $p = \frac{n}{2}$, on aura

$$D_P^{(p)} = D_P^{(n-p)} = D_P^{\left(\frac{n}{2}\right)},$$

P étant égal à

$$\frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\frac{n}{2}}.$$

L'équation (58) deviendra donc alors

$$D_n^p = \left\{D_P^{\left(\frac{n}{2}\right)}\right\}^2;$$

ou

$$(59) \qquad D_P^{\left(\frac{n}{2}\right)} = D_n^{\frac{p}{2}}.$$

Elle fera ainsi connaître la valeur du déterminant $D_P^{\left(\frac{n}{2}\right)}$.

4.e SECTION.

Des Systèmes d'Équations dérivées et de leurs Déterminans.

§. 11.e Les trois systèmes de quantités $(\alpha_{1.n})$, $(a_{1.n})$, $(m_{1.n})$ étant supposés liés entre eux par les équations

$$(33) \qquad \Sigma\left[S^n(\alpha_{\nu.1}\, a_{\mu.1}) = m_{\mu.\nu}\right),$$

les systèmes de même ordre dérivés des trois premiers, par exemple,

$$\left(\alpha_{1.P}^{(p)}\right), \quad \left(a_{1.P}^{(p)}\right), \quad \left(m_{1.P}^{(p)}\right)$$

seront liés entre eux par des équations semblables, ainsi qu'on va le faire voir.

Soient π, ρ ..... τ plusieurs indices pris à volonté parmi ceux qui occupent la première place dans le système $(a_{1.n})$. Soit p le nombre de ces mêmes indices, et désignons par

(μ)

la combinaison qui les renferme tous. Soient de même π', $\rho' \ldots \tau'$ des indices en nombre égal à p pris parmi ceux qui occupent la première place dans le système $(\alpha_{1.n})$, et désignons par

$$(\nu)$$

la combinaison qui renferme ces derniers. On aura en général

$$(60) \qquad m^{(p)}_{\mu.\nu} = \pm S(\pm m_{\pi.\pi'} m_{\rho.\rho'} \ldots m_{\tau.\tau'}).$$

Si l'on développe le second membre de l'équation précédente, après y avoir substitué pour

$$m_{\pi.\pi'}, \quad m_{\rho.\rho'} \ldots\ldots m_{\tau.\tau'}$$

leurs valeurs données par les équations

$$(61) \begin{cases} m_{\pi.\pi'} = \alpha_{\pi'.1}\alpha_{\pi.1} + \alpha_{\pi'.2}\alpha_{\pi.2} + \ldots + \alpha_{\pi'.n}\alpha_{\pi.n}, \\ m_{\rho.\rho'} = \alpha_{\rho'.1}\alpha_{\rho.1} + \alpha_{\rho'.2}\alpha_{\rho.2} + \ldots + \alpha_{\rho'.n}\alpha_{\rho.n}, \\ \&c. \ldots\ldots \\ m_{\tau.\tau'} = \alpha_{\tau'.1}\alpha_{\tau.1} + \alpha_{\tau'.2}\alpha_{\tau.2} + \ldots + \alpha_{\tau'.n}\alpha_{\tau.n}, \end{cases}$$

on trouvera que le développement ainsi formé renferme avec le produit

$$\alpha_{\pi'.1}\alpha_{\rho'.2} \ldots\ldots \alpha_{\tau'.p}\alpha_{\pi.1}\alpha_{\rho.2} \ldots \alpha_{\tau.p}$$

1.° tous les produits que l'on peut déduire de celui-ci par des transpositions opérées entre les indices

$$\pi, \quad \rho \ldots\ldots \tau$$

qui occupent la première place dans a, et par des transpositions opérées entre les indices

$$\pi', \quad \rho' \ldots\ldots \tau'$$

qui occupent la première place dans α; 2.° tous les produits que l'on peut en déduire par des transpositions opérées entre les indices

Digitized by Google

$$1,\quad 2,\quad 3 \ldots\ldots p \ldots\ldots n-1, n$$

qui occupent la seconde place dans les deux systèmes $(a_{1.n})$ et $(\alpha_{1.n})$.

Cela posé, le développement de

$$S(\pm m_{\pi.\pi'} m_{\rho.\rho'} \ldots\ldots m_{\tau.\tau'})$$

devant être une fonction symétrique alternée relativement aux indices $\pi, \rho \ldots \tau$ qui occupent la première place dans a, et relativement aux indices $\pi', \rho' \ldots \tau'$ qui occupent la première place dans α, ne pourra renfermer le produit

$$\alpha_{\pi'.1}\, \alpha_{\rho'.2} \ldots \alpha_{\tau'.p}\; a_{\pi.1}\, a_{\rho.2} \ldots a_{\tau.p},$$

sans renfermer en même temps le produit

$$S(\pm \alpha_{\pi'.1}\, \alpha_{\rho'.2} \ldots \alpha_{\tau'.p})\, S(\pm a_{\pi.1}\, a_{\rho.2} \ldots a_{\tau.p}),$$

qui d'après les conventions établies doit être désigné par

$$\pm\, \alpha^{(p)}_{\nu.1}\, a^{(p)}_{\mu.1},$$

puisque les trois combinaisons

$$\pi'.\rho' \ldots \tau', \qquad \pi.\rho \ldots \tau, \qquad 1.2.3 \ldots p$$

correspondent aux trois numéros

$$(\nu), \qquad (\mu), \qquad (1).$$

Le même développement, devant être une fonction symétrique permanente relativement aux indices toujours égaux qui affectent en seconde ligne a et α dans chacune des équations (61), ne pourra renfermer le produit

$$\alpha^{(p)}_{\nu.1}\, a^{(p)}_{\mu.1} = \pm S(\pm \alpha_{\pi'.1}\, \alpha_{\rho'.2} \ldots \alpha_{\tau'.p})\, S(\pm a_{\pi.1}\, a_{\rho.2} \ldots a_{\tau.p}),$$

sans renfermer la somme de tous ceux que l'on peut déduire du précédent par des transpositions opérées entre les seconds indices des deux systèmes $(a_{1.n})$ et $(\alpha_{1.n})$: et comme pour opérer ces diverses

Digitized by Google

transpositions il suffit de remplacer successivement la combinaison (1) par les suivantes (2), (3) ..... (P), ou, ce qui revient au même, le produit $a^{(p)}_{\nu.1}\, a^{(p)}_{\mu.1}$ par les produits

$$a^{(p)}_{\nu.2}\, a^{(p)}_{\mu.2}, \quad a^{(p)}_{\nu.3}\, a^{(p)}_{\mu.3} \text{ \&c.} \ldots\ldots a^{(p)}_{\nu.P}\, a^{(p)}_{\mu.P};$$

le développement cherché sera nécessairement de la forme

$$c\left(a^{(p)}_{\nu..}\, a^{(p)}_{\mu.1} + a^{(p)}_{\nu.2}\, a^{(p)}_{\mu.2} + \ldots + a^{(p)}_{\nu.P}\, a^{(p)}_{\mu.P}\right) = c\, S^{p}\left(a^{(p)}_{\nu.1}\, a^{(p)}_{\mu.1}\right),$$

et par suite on aura

$$m^{(p)}_{\mu.\nu} = c\, S^{p}\left(a^{(p)}_{\nu.1}\, a^{(p)}_{\mu.1}\right),$$

le signe S étant relatif à l'indice 1, et c désignant une constante arbitraire que l'on déterminera de la manière suivante. Si l'on développe le produit

$$a^{(p)}_{\nu.1}\, a^{(p)}_{\mu.1} = \pm S(\pm a_{\pi'.1}\, a_{\rho'.2} \ldots a_{\tau'.p})\, S(\pm a_{\pi.1}\, a_{\rho.2} \ldots a_{\tau.p}),$$

on trouvera pour premier terme le produit suivant

$$\pm a_{\pi'.1}\, a_{\rho'.2} \ldots a_{\tau'.p}\, a_{\pi.1}\, a_{\rho.2} \ldots a_{\tau.p}.$$

D'ailleurs l'inspection des équations (61) suffit pour faire voir que ce dernier produit doit être compris une seule fois dans le développement de

$$m^{(p)}_{\mu.\nu} = \pm S(\pm m_{\pi.\pi'}\, m_{\rho.\rho'} \ldots m_{\tau.\tau'}).$$

On a donc nécessairement $c = \pm 1$. Le choix que l'on doit faire ici entre les deux signes $+$ et $-$ dépend de la manière dont on aura déterminé les signes respectifs des trois quantités

$$m^{(p)}_{\mu.\nu}, \quad a^{(p)}_{\mu.1}, \quad a^{(p)}_{\nu.1},$$

ou, ce qui revient au même, les signes des trois suivantes

Digitized by Google

$$a^{(p)}_{\mu.\nu} = \pm S(a_{\pi.\pi'}\, a_{\rho.\rho'} \ldots\ldots a_{\tau.\tau'}),$$

$$a^{(p)}_{\mu.1} = \pm S(\pm a_{\pi.1}\, a_{\rho.2} \ldots\ldots a_{\tau.p}),$$

$$a^{(p)}_{\nu.1} = \pm S(\pm a_{\pi'.1}\, a_{\rho'.2} \ldots\ldots a_{\tau'.p}).$$

Il est facile de voir que l'on aura $c = 1$, si l'on suppose que le signe du produit

$$a_{\pi.\pi'}\, a_{\rho.\rho'} \ldots\ldots a_{\tau.\tau'}$$

dans $a^{(p)}_{\mu.\nu}$ soit égal au produit du signe de

$$a_{\pi.1}\, a_{\rho.2} \ldots\ldots a_{\tau.p}$$

dans $a^{(p)}_{\mu.1}$ par le signe de

$$a_{\pi'.1}\, a_{\rho'.2} \ldots\ldots a_{\tau'.p}$$

dans $a^{(p)}_{\nu.1}$. Si l'on admet cette hypothèse, l'équation rapportée plus haut deviendra

$$(62) \qquad m^{(p)}_{\mu.\nu} = S^p\left(a^{(p)}_{\nu.1}\, a^{(p)}_{\mu.1}\right).$$

Si dans cette équation on donne successivement à μ et à ν toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à P, on aura un système d'équations symétriques de l'ordre P, que l'on pourra représenter par le symbole

$$(63) \qquad \Sigma\left\{S^p\left(a^{(p)}_{\nu.1}\, a^{(p)}_{\mu.1}\right) = m^{(p)}_{\mu.\nu}\right\},$$

P étant toujours égal à

$$\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots\ldots p}.$$

Pour déduire des équations (33) les équations (63), il suffit évidemment de remplacer les trois systèmes de quantités

Digitized by Google

$$(a_{1.n}),\quad (\alpha_{1.n}),\quad (m_{1.n}),$$

par les systèmes dérivés de même ordre

$$\left(a^{(p)}_{1.P}\right),\quad \left(\alpha^{(p)}_{1.P}\right),\quad \left(m^{(p)}_{1.P}\right).$$

Je dirai pour cette raison que le second système d'équations est dérivé du premier.

Si dans le symbole précédent on suppose $p=1$, on retrouvera les équations (33). Si dans le même symbole on change

$$\mu \text{ en } P-\mu+1,\quad \nu \text{ en } P-\nu+1,\quad 1 \text{ en } P,$$

et que l'on fasse ensuite $p=n-1$, on aura

$$P=n,\quad \alpha^{(p)}_{P-\nu+1.P}=\beta_{\nu.1},\quad a^{(p)}_{P-\mu+1.P}=b_{\mu.1},\quad m^{(p)}_{P-\mu+1.P-\nu+1}=r_{\mu.\nu},$$

et par suite le symbole (63) se changera dans le suivant

$$\Sigma\left[S^n(\beta_{\nu.1}\, b_{\mu.1})=m_{\mu.\nu}\right],$$

auquel on était déjà parvenu directement.

Si dans les équations (63) on change p en $n-p$, on aura

$$(64)\qquad \Sigma\left[S^p\left(\alpha^{(n-p)}_{\nu.1}\, a^{(n-p)}_{\mu.1}\right)=m^{(n-p)}_{\mu.\nu}\right].$$

Désignons par

$$\delta^{(p)}_P,\quad D^{(p)}_P,\quad M^{(p)}_P$$

les déterminans des trois systèmes

$$\left(\alpha^{(p)}_{1.P}\right),\quad \left(a^{(p)}_{1.P}\right),\quad \left(m^{(p)}_{1.P}\right);$$

on aura en vertu des équations (63),

$$(65)\qquad M^{(p)}_P=D^{(p)}_P\,\delta^{(p)}_P.$$

Digitized by Google

On aura de même

$$M_P^{(n-p)} = D_P^{(n-p)} \delta_P^{(n-p)}.$$

Si l'on multiplie ces deux équations l'une par l'autre, on aura en vertu de l'équation (58)

$$M_n^P = D_n^P \delta_n^P,$$

et par suite

$$M_n = D_n \delta_n.$$

On obtient aussi ce dernier résultat, en supposant dans l'équation (65) $p = 1$.

Si l'on ajoute entre elles les équations (63), on aura la suivante,

$$(66) \quad S^P\left\{S^P\left(\alpha_{\mu.\nu}^{(p)}\right) S^P\left(a_{\mu.\nu}^{(p)}\right)\right\} = S^P S^P\left(m_{\mu.\nu}^{(p)}\right),$$

le premier signe S, c'est-à-dire le signe extérieur, étant relatif à l'indice ν, et les autres, c'est-à-dire les signes intérieurs, étant relatifs à l'indice μ.

§. 12. En réunissant ce que la théorie précédente offre de plus remarquable relativement aux systèmes d'équations dérivées, on formera le tableau suivant.

Soient toujours $(\alpha_{1.n})$, $(a_{1.n})$, $(m_{1.n})$ trois systèmes de quantités liés entre eux par les équations symétriques

$$(33) \quad \Sigma\left[S^n(\alpha_{\nu.1}\, a_{\mu.1}) = m_{\mu.\nu}\right].$$

Faisons à l'ordinaire

$$P = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots p},$$

et désignons par

$$\left(\alpha_{1.P}^{(p)}\right), \left(\alpha_{1.P}^{(n-p)}\right), \left(a_{1.P}^{(p)}\right), \left(a_{1.P}^{(n-p)}\right), \left(m_{1.P}^{(p)}\right), \left(m_{1.P}^{(n-p)}\right)$$

Digitized by Google

les systèmes de l'ordre P, dérivés des trois systèmes donnés, et qui deux à deux sont complémentaires l'un de l'autre. Enfin soient respectivement

$$\Delta_P^{(p)},\quad \Delta_P^{(n-p)},\quad D_P^{(p)},\quad D_P^{(n-p)},\quad M_P^{(p)},\quad M_P^{(n-p)},$$

les déterminans de ces différens systèmes ; on aura les équations suivantes

$$(67)\quad \left\{\begin{array}{c} M_P^{(p)} = D_P^{(p)}\,\Delta_P^{(p)} \\ M_P^{(n-p)} = D_P^{(n-p)}\,\Delta_P^{(n-p)} \\ \Delta_n^P = \Delta_P^{(p)}\,\Delta_P^{(n-p)}\quad D_n^P = D_P^{(p)}\,D_P^{(n-p)}\quad M_n^P = M_P^{(p)}\,M_P^{(n-p)}. \end{array}\right\}$$

$$(68)\quad \left\{\begin{array}{ll} \Delta_n = S^P\left(a_{\mu.\pi}^{(p)}\,a_{P-\mu+1.P-\pi+1}^{(n-p)}\right) & D_n = S^P\left(a_{\mu.\pi}^{(p)}\,a_{P-\mu+1.P-\pi+1}^{(n-p)}\right) \\ & M_n = S^P\left(m_{\mu.\pi}^{(p)}\,m_{P-\mu+1.P-\pi+1}^{(n-p)}\right) \\ 0 = S^P\left(a_{\mu.\pi}^{(p)}\,a_{P-\gamma+1.P-\pi+1}^{(n-p)}\right) & 0 = S^P\left(a_{\mu.\pi}^{(p)}\,a_{P-\gamma+1.P-\pi+1}^{(n-p)}\right) \\ & 0 = S^P\left(m_{\mu.\pi}^{(p)}\,m_{P-\gamma+1.P-\pi+1}^{(n-p)}\right) \\ 0 = S^P\left(a_{\mu.\pi}^{(p)}\,a_{P-\mu+1.P-\gamma+1}^{(n-p)}\right) & 0 = S^P\left(a_{\mu.\pi}^{(p)}\,a_{P-\mu+1.P-\gamma+1}^{(n-p)}\right) \\ & 0 = S^P\left(m_{\mu.\pi}^{(p)}\,m_{P-\mu+1.P-\gamma+1}^{(n-p)}\right). \end{array}\right\}$$

$$(69)\quad \left\{\begin{array}{c} \Sigma\left[S^P\left(a_{\gamma.1}^{(p)}\,a_{\mu.1}^{(p)}\right) = m_{\mu.\gamma}^{(p)}\right] \\ \Sigma\left[S^P\left(a_{\gamma.1}^{(n-p)}\,a_{\mu.1}^{(n-p)}\right) = m_{\mu.\gamma}^{(n-p)}\right]. \end{array}\right\}$$

$$(70)\quad \left\{\begin{array}{c} S^P\left[S^P\left(a_{\mu.\gamma}^{(p)}\right)\,S^P\left(a_{\mu.\gamma}^{(p)}\right)\right] = S^P\,S^P\left(m_{\mu.\gamma}^{(p)}\right) \\ S^P\left[S^P\left(a_{\mu.\gamma}^{(n-p)}\right)\,S^P\left(a_{\mu.\gamma}^{(n-p)}\right)\right] = S^P\,S^P\left(m_{\mu.\gamma}^{(n-p)}\right). \end{array}\right\}$$

Si l'on suppose n pair et $p = \frac{n}{2}$, alors on aura.

Digitized by Google

$$p = n - p = \frac{n}{2},$$

$$P = \frac{n(n-1)\ldots(\frac{n}{2}+1)}{1.2.3\ldots\frac{n}{2}},$$

$$\Delta_P^{(p)} = \Delta_P^{(n-p)}, \quad D_P^{(p)} = D_P^{(n-p)}, \quad M_P^{(p)} = M_P^{(n-p)},$$

et par suite, les équations (67) donneront pour

$$\Delta_P^{(p)}, \quad D_P^{(p)}, \quad M_P^{(p)}$$

les valeurs suivantes :

$$(71) \quad \left\{ \Delta_P^{(\frac{n}{2})} = \Delta_n^{\frac{p}{2}}, \quad D_P^{(\frac{n}{2})} = D_n^{\frac{p}{2}}, \quad M_P^{(\frac{n}{2})} = M_n^{\frac{p}{2}} \right\}.$$

On vient de voir combien de transformations analytiques différentes peuvent se déduire de la considération des systèmes d'équations symétriques. On doit sur-tout remarquer le théorème renfermé dans l'équation

$$M_n = D_n \Delta_n,$$

en vertu duquel le produit de deux déterminans est encore un déterminant, et dont les recherches faites par M. *Gauss* sur les polynomes du second degré à deux et à trois variables offrent de nombreuses applications. J'avais rencontré l'été dernier, à Cherbourg, où j'étais fixé par les travaux de mon état, ce théorème et quelques autres du même genre, en cherchant à généraliser les formules de M. *Gauss*. M. *Binet*, dont je me félicite d'être l'ami, avait été conduit aux mêmes résultats par des recherches différentes. De retour à Paris, j'étais occupé de poursuivre mon travail, lorsque j'allai le voir. Il me montra son théorème qui était semblable au mien. Seulement il désignait sous le nom de *résultante* ce que j'avais appelé *déterminant*. Il me dit en outre qu'il avait généralisé le théorème dont il s'agit, en substituant au produit de deux résultantes des sommes de produits de même espèce. J'avais dès-lors déjà démontré le théorème suivant :

Digitized by Google

D'un système quelconque d'équations symétriques on peut déduire cinq autres systèmes du même ordre; mais on n'en saurait déduire un plus grand nombre.

J'ai démontré depuis à l'aide des méthodes précédentes cet autre théorème :

D'un système quelconque d'équations symétriques de l'ordre n, *on peut toujours déduire deux systèmes d'équations symétriques de l'ordre*

$$\frac{n(n-1)}{2},$$

deux systèmes d'équations symétriques de l'ordre

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}, \quad \&c.....$$

En ajoutant entre elles les équations symétriques comprises dans un même système, on obtient, comme on l'a vu, les formules (50), (51) et (70) qui me paraissent devoir être semblables à celles dont M. *Binet* m'a parlé.

D'après le rapport fait à l'Institut par MM. *Legendre*, *Carnot* et *Poisson*, les deux précédens Mémoires doivent être imprimés dans le *Recueil des Savans étrangers*.

SUR

Digitized by Google

SUR LA DÉTERMINATION ANALYTIQUE D'UNE SPHÈRE TANGENTE A QUATRE AUTRES;

PAR M. J. BINET.

ON sait que *Fermat* a enseigné à construire ce problème, en employant la règle et le compas; mais il n'a été résolu algébriquement que dans ces derniers temps, par M. *Poisson*, qui a fait voir que sa solution ne dépendait, en effet, que d'équations du second degré. Depuis, M. *Français* a prouvé la même chose dans les Annales de mathématiques de Nîmes, en complétant sous le rapport analytique, une solution d'abord insérée dans le deuxième volume de la Correspondance sur l'École polytechnique. Ce qui distingue la solution que je présente ici de celles de MM. *Poisson* et *Français*, ce sont les données que je choisis : elles semblent plus immédiatement liées à la nature et à la simplicité de cette question. Je prends pour déterminer la situation des centres des quatre sphères, leurs distances mutuelles; pour les sphères elles-mêmes, leurs rayons, et le rayon de la sphère cherchée est l'inconnue du problème.

M. *Lagrange*, dans son Mémoire sur la pyramide triangulaire, est parvenu à une relation entre les distances d'un point à quatre autres et les élémens quelconques propres à déterminer la position respective de ces quatre points; élémens pour lesquels on peut, si l'on veut, prendre leurs six mutuelles distances. Il en a tiré la solution de divers problèmes, entre autres la détermination de la sphère qui passe par quatre points, de celle tangente à quatre plans : ces problèmes

Digitized by Google

sont des cas particuliers de celui que nous traitons ; et l'on peut néanmoins, pour le résoudre, lui appliquer cette même relation. En effet, les distances du centre de la sphère cherchée à ceux des quatre sphères proposées, sont exprimées par le rayon inconnu plus ou moins les rayons donnés, et l'on connaît la situation des centres des sphères proposées. M. *Carnot* est arrivé à la formule que fournit cette relation de M. *Lagrange*, lorsqu'on y introduit les distances mutuelles des quatre premiers points, dans un mémoire dont elle est l'objet spécial. Sa composition symétrique, au moyen des distances mutuelles des cinq points, devient alors évidente ; c'est la forme sous laquelle M. *Carnot* a proposé d'employer cette relation pour la solution du problème des sphères tangentes, dans le mémoire que nous citons, et antérieurement dans sa géométrie de position. Mais la substitution qui reste à faire serait tellement compliquée, que M. *Carnot* s'est borné à l'indiquer, présumant cependant que le résultat dût être une équation du second degré. La marche que je suis fait arriver d'une manière facile et simple à cette équation, qui, par des changemens de signes des rayons des sphères proposées, donne successivement toutes les solutions que comporte ce problème.

Avant de traiter la question des sphères tangentes, je vais m'occuper de celle des cercles tangens à trois autres, afin de faire dépendre ces deux problèmes analogues des mêmes moyens de solution ; car la méthode qui me conduit à la relation des distances d'un point à quatre autres, me fournit aussi celle qui existe entre les distances d'un point à trois autres, dont on connaît la situation respective, en supposant ces quatre points dans le même plan. M. *Carnot* avait encore indiqué cette autre relation comme devant servir à la solution du problème des cercles tangens ; mais c'est sur-tout la forme sous laquelle je présente ces relations qui paraît leur donner quelque avantage sur les autres moyens connus pour résoudre ces problèmes.

Digitized by Google

Du Cercle tangent à trois autres situés dans un même Plan.

Désignons par α, β, γ, les rayons de ces cercles, et par les mêmes lettres les positions de leurs centres sur le plan. Soient a, b, c les distances de ces points, a étant celle de α et γ, b celle de β et γ, c de β et α; x le rayon de la circonférence cherchée tangente aux circonférences α, β, γ. En supposant que ces trois dernières soient extérieurement tangentes au cercle x, et en nommant $d. e. f$ les distances $x\alpha$, $x\beta$, $x\gamma$, on aura

$$d = \alpha + x, \quad e = \beta + x, \quad f = \gamma + x.$$

Au centre γ, concevons deux perpendiculaires a', b' aux côtés a, b du triangle $\alpha\beta\gamma$, formé par les centres des circonférences données, et conduisons par le centre x deux autres droites parallèles à a', b'. On formera ainsi un parallélogramme dont f sera une diagonale. Représentons par a' et b' les longueurs des deux côtés de ce parallélogramme qui sont perpendiculaires à a et b; d'après cela, on aura

$$f^2 = a'^2 + b'^2 + 2a'b' \cos. \widehat{a'b'},$$

où l'on désigne par $\cos. \widehat{a'b'}$ le cosinus de l'angle que la droite a' forme avec b', angle qui est le supplément de celui de a et b, ou de $\widehat{ab}$. Cette notation de M. *Carnot*, sera employée dans ce qui va suivre, pour indiquer les angles que forment des lignes et des plans entre eux.

Il est d'ailleurs facile de voir que

$$a' : \sin. \widehat{b'f} = b' : \sin. \widehat{a'f} = f : \sin. \widehat{a'b'},$$

et que

$$\sin. \widehat{a'f} = \cos. \widehat{af} = \frac{a^2+f^2-d^2}{2af}, \quad \sin. \widehat{b'f} = \cos. \widehat{bf} = \frac{b^2+f^2-e^2}{2bf},$$

$$\sin. \widehat{a'b'} = \sin. \widehat{ab}, \qquad \cos. \widehat{a'b'} = -\cos. \widehat{ab};$$

Digitized by Google

on sait encore que le quadruple de la surface du triangle $\alpha\beta\gamma$ est

$$\sqrt{(2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4)};$$

nommons p cette quantité : elle égale $2ab$ sin. $\widehat{ab}$. Remplaçant dans l'expression de f^2, a' et b' par les valeurs tirées de ce qui précède, savoir,

$$a' = \frac{a}{p}(b^2 + f^2 - e^2), \quad b' = \frac{b}{p}(a^2 + f^2 - d^2),$$

on aura entre d, e, f la relation

$$(a^2 + f^2 - d^2)^2\, b^2 + (b^2 + f^2 - e^2)^2\, a^2$$
$$- 2(a^2 + f^2 - d^2)(b^2 + f^2 - e^2)\, ab \cos.\widehat{ab} = f^2 . p^2, \qquad (1)$$

où l'on pourra ne faire entrer que a, b, c, d, e, f, en remplaçant

$$2ab \cos.\widehat{ab} \quad \text{par} \quad a^2 + b^2 - c^2,$$

et p^2 par la valeur ci-dessus. Cette relation exprime que le point x est dans le plan des trois autres α, β, γ; il ne reste plus pour avoir l'équation qui doit déterminer le rayon x, qu'à y substituer

$$\alpha + x, \quad \beta + x, \quad \gamma + x \quad \text{pour} \quad d, \; e, \; f.$$

Nommons, à cet effet, L la fonction

$$(a^2 + \gamma^2 - \alpha^2)^2\, b^2 + (b^2 + \gamma^2 - \beta^2)^2\, a^2$$
$$- 2(a^2 + \gamma^2 - \alpha^2)(b^2 + \gamma^2 - \beta^2)\, ab \cos.\widehat{ab} - \gamma^2 . p^2,$$

et faisons, de plus,

$$L_{,} = \frac{dL}{d\alpha} + \frac{dL}{d\beta} + \frac{dL}{d\gamma},$$
$$L_{,,} = \frac{dL_{,}}{d\alpha} + \frac{dL_{,}}{d\beta} + \frac{dL_{,}}{d\gamma},$$
$$L_{,,,} = \text{\&c.},$$

Digitized by Google

le résultat de la substitution sera, d'après la formule de *Taylor*, étendue aux fonctions de plusieurs variables α, β, γ, qui reçoivent ici le même accroissement x,

$$o = L + xL_{,} + \frac{x^2}{2} L_{,,} + \frac{x^3}{2.3} L_{,,,} + \&c.$$

Mais en exécutant les différenciations

$$L_{,} = 4\left\{\begin{array}{l}(a^2+\gamma^2-\alpha^2)\,[(\gamma-\alpha)b^2-(\gamma-\beta)\,ab\cos.\widehat{ab}] \\ +(b^2+\gamma^2-\beta^2)[(\gamma-\beta)a^2-(\gamma-\alpha)\,ab\cos.\widehat{ab}]\end{array}\right\} - 2\gamma p^2,$$

$$L_{,,} = 8\left\{(\gamma-\alpha)^2b^2+(\gamma-\beta)^2a^2-2(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\,ab\cos.\widehat{ab}\right\} - 2p^2,$$

$$L_{,,,} = o = \&c.$$

ainsi l'équation dont dépend le rayon de la circonférence tangente aux trois autres, sera

$$o = L + xL_{,} + \frac{x^2}{2} L_{,,}. \qquad (x)$$

On voit qu'elle est du second degré, et c'est ce qu'on pouvait immédiatement apercevoir dans l'équation (r), puisque les quantités $f^2 - d^2$, $f^2 - e^2$, savoir,

$$\gamma^2 - \alpha^2 + 2(\gamma-\alpha)x, \quad \gamma^2 - \beta^2 + 2(\gamma-\beta)x,$$

ne sont que du premier degré en x.

Dans cette équation, $L_{,}$ seul change de signe quand α, β, γ deviennent

$$-\alpha, \quad -\beta, \quad -\gamma;$$

ainsi l'équation (x) qu'on obtient par ce changement, aura les mêmes racines, aux signes près, que celle que nous venons de trouver; mais ce changement répond à la substitution de

Digitized by Google

$$-\alpha+x, \quad -\beta+x, \quad -\gamma+x,$$

pour d, e, f dans l'équation (r), c'est-à-dire au cercle qui toucherait les circonférences proposées, en les enveloppant toutes trois, et cela ne pourra avoir lieu que si les deux racines de l'équation (x) sont de signes contraires : dans le cas où elles seraient de mêmes signes, les circonférences dont cette équation détermine les rayons seraient toutes deux ou extérieures ou enveloppantes, selon que ces racines seraient positives ou négatives.

Si, dans les expressions de $L_{,}$, $L_{,,}$, on change le signe d'un seul des rayons α, β, γ, de γ par exemple, l'équation (x) aura pour ses racines les rayons des deux circonférences, dont l'une laissera les deux cercles α, β extérieurs, en enveloppant le cercle γ, et l'autre enveloppera les deux cercles α, β, en laissant γ extérieur : ces cas ayant lieu, si les racines de l'équation (x) sont de signes différens, lorsqu'elles seront positives, les deux circonférences tangentes envelopperont γ et toucheront extérieurement α, β ; enfin si elles étaient négatives, le cercle γ serait extérieur, et les deux autres α, β intérieurs aux deux circonférences décrites des rayons fournis par les valeurs de x.

Ce changement du signe d'un seul des rayons pouvant avoir lieu de trois manières, donnera donc lieu à six solutions, qui, avec les deux premières, fournissent toutes celles dont le problème est en général susceptible.

On aura un exemple du cas où les solutions sont deux à deux de même espèce, si l'on suppose les trois centres α, β, γ en ligne droite. Posons donc que γ soit entre α et β, on aura

$$\cos.\widehat{ab} = -1,$$

et le triangle $\alpha\beta\gamma$ étant réduit à l'un de ses côtés, sa surface est nulle ; ainsi on a $p^2 = 0$, condition qui d'ailleurs est une suite de la précédente. C'est par cette dernière équation que l'on exprime, au moyen des

Digitized by Google

distances mutuelles de trois points, qu'ils sont en ligne droite, comme c'est par l'équation (r) que l'on dit que quatre points sont dans un même plan, ou que le volume du tétraèdre, dont ces points sont les sommets, est nul. Pour le cas particulier que nous examinons, on aura

$$L = (a^2+\gamma^2-\alpha^2)^2 b^2 + (b^2+\gamma^2-\beta^2)^2 a^2 + 2(a^2+\gamma^2-\alpha^2)(b^2+\gamma^2-\beta^2)ab$$
$$= [(a^2+\gamma^2-\alpha^2)\, b + (b^2+\gamma^2-\beta^2)\, a]^2 ,$$
$$L_{,} = 4[(a^2+\gamma^2-\alpha^2)b + (b^2+\gamma^2-\beta^2)a]\,[(\gamma-\alpha)b + (\gamma-\beta)\,a],$$
$$L_{,,} = 8[(\gamma-\alpha)b + (\gamma-\beta)\,a]^2 .$$

Ces valeurs mises dans l'équation

$$o = L + x L_{,} + \frac{x^2}{2} L_{,,} ,$$

rendent son second membre le carré de

$$(a^2+\gamma^2-\alpha^2)\, b + (b^2+\gamma^2-\beta^2)\, a + 2x\,[(\gamma-\alpha)\, b + (\gamma-\beta)\, a] ,$$

on aura donc

$$x = -\frac{\alpha^2 b + \beta^2 a - \gamma^2(a+b) - (a^2 b + a b^2)}{\alpha b + \beta a - \gamma(a+b)} ,$$

formule facile à construire, et qui présente également huit solutions par les variations des signes de α, β, γ. Elle déterminera le rayon x d'une manière réelle, quels que soient les rayons des cercles α, β, γ, et leur position respective; cependant il y a des cas d'une impossibilité manifeste. L'un des cercles, par exemple, comprenant un seul des deux autres; alors, quoique x soit réel, la construction des triangles $x\beta\gamma$, $x\gamma x$, $x\alpha\beta$, deviendrait impossible, à raison de ce qu'un de leurs côtés surpasserait la somme des deux autres; et si l'on voulait calculer les cosinus de l'un des angles de ces triangles, on trouverait ce cosinus plus grand que l'unité; par-là se montrerait analytiquement cette impossibilité.

Digitized by Google

De la Sphère tangente à quatre autres.

Prenons encore les lettres α, β, γ, δ pour représenter les rayons de ces sphères et les positions de leurs centres. Pour déterminer la situation respective de ces points, nous emploierons leurs distances mutuelles représentées par a, b, c, d, e, f, pour

$$\delta\alpha, \quad \delta\beta, \quad \delta\gamma, \quad \beta\gamma, \quad \gamma\alpha, \quad \alpha\beta;$$

en sorte que dans la pyramide triangulaire $\alpha\beta\gamma\delta$, les arêtes a, b, c qui partent du sommet δ, ont pour opposées d, e, f. Nous indiquerons les bases triangulaires

$$\beta\gamma\delta, \quad \gamma\alpha\delta, \quad \alpha\beta\gamma$$

relatives aux sommets α, β, γ, par les lettres $a_{,}$, $b_{,}$, $c_{,}$, qui serviront aussi à désigner les plans de ces faces.

Supposons d'abord que la sphère cherchée doive toucher les sphères données α, β, γ, δ, de manière que celles-ci lui soient extérieures; x étant le rayon cherché, et g, h, i, k les distances

$$x\alpha, \quad x\beta, \quad x\gamma, \quad x\delta$$

de son centre à ceux des quatre sphères données, on aura

$$g = \alpha + x, \quad h = \beta + x, \quad i = \gamma + x, \quad k = \delta + x.$$

Il existe évidemment entre g, h, i, k et les quantités données a, b, c, d, e, f une relation facile à trouver par les considérations suivantes.

Au point δ, concevons trois perpendiculaires a', b', c' aux plans $a_{,}$, $b_{,}$, $c_{,}$, et sur ces lignes comme directions d'arêtes contiguës, construisons un parallélipipède dont la ligne k, qui aboutit de δ à x, soit la diagonale. Employons les lettres a', b', c' pour désigner les longueurs de ses trois arêtes, nous aurons

a'

Digitized by Google

$$a' = k \sin. \widehat{k,b'c'} : \sin. \widehat{a,b'c'}, \quad b' = k \sin. \widehat{k,c'a'} : \sin. \widehat{b,c'a'},$$
$$c' = k \sin. \widehat{k,a'b'} : \sin. \widehat{c,a'b'},$$

expressions dans lesquelles on représente par $\sin. \widehat{k,b'c'}$ le sinus de l'angle qu'une ligne k forme avec le plan de deux autres $b'c'$.

Or il est visible, d'après la construction de ce parallélipipède, que l'angle $\widehat{k,b'c'}$ est le complément de l'angle $\widehat{ka}$, puisque le plan $b'c'$ est perpendiculaire à la direction de a; ainsi, pour cet angle et pour les autres, on aura

$$\sin. \widehat{k,b'c'} = \cos. \widehat{ka}, \quad \sin. \widehat{k,c'a'} = \cos. \widehat{kb}, \quad \sin. \widehat{k,a'b'} = \cos. \widehat{kc};$$

et comme, en outre, l'angle $\widehat{a,b'c'}$ est le supplément de l'angle $\widehat{a,bc}$ ou de $\widehat{aa_{,}}$, et qu'il en est de même pour les deux autres $\widehat{b',c'a'}$, $\widehat{c',a'b'}$ à l'égard des angles $\widehat{bb_{,}}$, $\widehat{cc_{,}}$,

$$\sin. \widehat{a',b'c'} = \sin. \widehat{aa_{,}}, \quad \sin. \widehat{b',c'a'} = \sin. \widehat{bb_{,}}, \quad \sin. \widehat{c',a'b'} = \sin. \widehat{cc_{,}};$$

il en résulte pour a', b', c',

$$a' = k \frac{\cos. \widehat{ak}}{\sin. \widehat{aa_{,}}} = \frac{a^2+k^2-g^2}{2a \sin. \widehat{aa_{,}}}, \quad b' = \frac{b^2+k^2-h^2}{2b \sin. \widehat{bb_{,}}}, \quad c' = \frac{c^2+k^2-i^2}{2c \sin. \widehat{cc_{,}}};$$

mais si l'on représente par p^2 la fonction

$$\begin{aligned} & b^2c^2(e^2+f^2) + c^2a^2(f^2+d^2) + a^2b^2(d^2+e^2) \\ & + e^2f^2(b^2+c^2) + f^2d^2(c^2+a^2) + d^2e^2(a^2+b^2) \\ & - a^2d^2(a^2+d^2) - b^2e^2(b^2+e^2) - c^2f^2(c^2+f^2) \\ & - b^2c^2d^2 - c^2a^2e^2 - a^2b^2f^2 - d^2e^2f^2, \end{aligned}$$

Digitized by Google

on sait que le volume de la pyramide $\alpha\beta\gamma\delta$ est $\frac{1}{12}p$; d'ailleurs il a encore pour expression

$$\tfrac{1}{3}aa_{,}\sin.\widehat{aa_{,}} \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{3}bb_{,}\sin.\widehat{bb_{,}} \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{3}cc_{,}\sin.\widehat{cc_{,}};$$

on peut tirer de là les valeurs

$$\sin.\widehat{aa_{,}}=\frac{p}{4aa_{,}}, \quad \sin.\widehat{bb_{,}}=\frac{p}{4bb_{,}}, \quad \sin.\widehat{cc_{,}}=\frac{p}{4cc_{,}};$$

et après les avoir substituées dans celles de a', b', c', il vient

$$a'=2(a^2+k^2-g^2)\frac{a_{,}}{p}, \quad b'=2(b^2+k^2-h^2)\frac{b_{,}}{p}, \quad c'=2(c^2+k^2-i^2)\frac{c_{,}}{p}.$$

L'expression de la diagonale k, au moyen des arêtes a', b', c', du parallélipipède et des angles de ces arêtes, qui sont supplémens de ceux que comprennent les faces $a_{,}$, $b_{,}$, $c_{,}$ de la pyramide $\alpha\beta\gamma\delta$, donne

$$k^2=a'^2+b'^2+c'^2-2b'c'\cos.\widehat{b_{,}c_{,}}-2c'a'\cos.\widehat{c_{,}a_{,}}-2a'b'\cos.\widehat{a_{,}b_{,}},$$

ou bien en mettant pour a', b', c' leurs valeurs ci-dessus,

$$\text{(R)} \quad \left.\begin{array}{l}(a^2+k^2-g^2)^2a_{,}^2-2(b^2+k^2-h^2)(c^2+k^2-i^2)b_{,}c_{,}\cos.\widehat{b_{,}c_{,}} \\ +(b^2+k^2-h^2)^2b_{,}^2-2(c^2+k^2-i^2)(a^2+k^2-g^2)c_{,}a_{,}\cos.\widehat{c_{,}a_{,}} \\ +(c^2+k^2-i^2)^2c_{,}^2-2(a^2+k^2-g^2)(b^2+k^2-h^2)a_{,}b_{,}\cos.\widehat{a_{,}b_{,}}\end{array}\right\}=k^2\frac{p^2}{4}.$$

Cette équation ne diffère que par les dénominations de celle que M. *Lagrange* donne dans son Mémoire sur la pyramide, pour calculer la distance des sommets de deux pyramides triangulaires, ayant une base commune. Il convient à notre objet d'y conserver les quantités $a_{,}$, $b_{,}$, $c_{,}$, et les angles $\widehat{b_{,}c_{,}}$, $\widehat{c_{,}a_{,}}$, $\widehat{a_{,}b_{,}}$ qui sont des élémens du

Digitized by Google

tétraèdre $\alpha\beta\gamma\delta$, d'ailleurs faciles à évaluer en a, b, c, d, e, f, arêtes de cette pyramide.

Pour $a_{,}$, par exemple, qui est un triangle dont les côtés sont b, c, d, on aura

$$a_{,}^{2} = \tfrac{1}{16}[2c^2d^2 + 2d^2b^2 + 2b^2c^2 - b^4 - c^4 - d^4],$$

et pour $b_{,}c_{,}$ cos. $\widehat{b_{,}c_{,}}$, il égale

$$\frac{ca}{2} \cdot \frac{ab}{2} \sin.\widehat{ca} \sin.\widehat{ab} \cos.\widehat{b_{,}c_{,}},$$

ou bien

$$\frac{a^2bc}{4}(\cos.\widehat{bc} - \cos.\widehat{ca} \cos.\widehat{ab});$$

et cette dernière valeur donnera

$$b_{,}c_{,} \cos.\widehat{b_{,}c_{,}} = \frac{a^2bc}{4}\left[\frac{b^2+c^2-d^2}{2bc} - \frac{(c^2+a^2-e^2)(a^2+b^2-f^2)}{4a^2bc}\right]$$
$$= \tfrac{1}{16}[2a^2(b^2+c^2-d^2) - (c^2+a^2-e^2)(a^2+b^2-f^2)].$$

Il ne reste plus qu'à effectuer dans l'équation (R) la substitution de

$$\alpha + x, \quad \beta + x, \quad \gamma + x, \quad \delta + x,$$

à la place de g, h, i, k; et pour cela, nommons, comme ci-dessus, L la fonction

$$(a^2+\delta^2-\alpha^2)^2a_{,}^2 - 2(b^2+\delta^2-\beta^2)(c^2+\delta^2-\gamma^2)b_{,}c_{,} \cos.\widehat{b_{,}c_{,}}$$
$$+ (b^2+\delta^2-\beta^2)^2b_{,}^2 - 2(c^2+\delta^2-\gamma^2)(a^2+\delta^2-\alpha^2)c_{,}a_{,} \cos.\widehat{c_{,}a_{,}} - \delta^2\frac{P^2}{4};$$
$$+ (c^2+\delta^2-\gamma^2)^2c_{,}^2 - 2(a^2+\delta^2-\alpha^2)(b^2+\delta^2-\beta^2)a_{,}b_{,} \cos.\widehat{a_{,}b_{,}},$$

et faisons

Digitized by Google

$$L_{,} = \frac{dL}{d\alpha} + \frac{dL}{d\beta} + \frac{dL}{d\gamma} + \frac{dL}{d\delta} =$$

$$4(a^2+\delta^2-\alpha^2)[(\delta-\alpha)a_{,}^2-(\delta-\gamma)c_{,}a_{,}\cos.\widehat{c_{,}a_{,}}-(\delta-\beta)a_{,}b_{,}\cos.\widehat{a_{,}b_{,}}]$$
$$+4(b^2+\delta^2-\beta^2)[(\delta-\beta)b_{,}^2-(\delta-\alpha)a_{,}b_{,}\cos.\widehat{a_{,}b_{,}}-(\delta-\gamma)b_{,}c_{,}\cos.\widehat{b_{,}c_{,}}] - \delta\frac{p^2}{2},$$
$$+4(c^2+\delta^2-\gamma^2)[(\delta-\gamma)c_{,}^2-(\delta-\beta)b_{,}c_{,}\cos.\widehat{b_{,}c_{,}}-(\delta-\alpha)c_{,}a_{,}\cos.\widehat{c_{,}a_{,}}]$$

$$L_{,,} = \frac{dL_{,}}{d\alpha} + \frac{dL_{,}}{d\beta} + \frac{dL_{,}}{d\gamma} + \frac{dL_{,}}{d\delta} =$$

$$8.\left\{\begin{array}{c}(\delta-\alpha)^2a_{,}^2-2(\delta-\beta)(\delta-\gamma)b_{,}c_{,}\cos.\widehat{b_{,}c_{,}}\\+(\delta-\beta)^2b_{,}^2-2(\delta-\gamma)(\delta-\alpha)c_{,}a_{,}\cos.\widehat{c_{,}a_{,}}\\+(\delta-\gamma)^2c_{,}^2-2(\delta-\alpha)(\delta-\beta)a_{,}b_{,}\cos.\widehat{a_{,}b_{,}}\end{array}\right\}-\frac{p^2}{2},$$

il devient évident que

$$L_{,,,} = \frac{dL_{,,}}{d\alpha} + \&c. = 0;$$

ainsi l'équation qui détermine le rayon x de la sphère tangente aux quatre sphères α, β, γ, δ, sera

$$0 = L + xL_{,} + \frac{x^2}{2}L_{,,}. \qquad (X)$$

Cette équation est du second degré, comme celle relative au cercle tangent à trois autres; et on pouvait encore apercevoir d'avance ce résultat, en observant que les quantités de l'équation (R),

$$k^2-g^2, \quad k^2-h^2, \quad k^2-i^2,$$

ou bien

$$\delta^2-\alpha^2+2x(\delta-\alpha), \quad \delta^2-\beta^2+2x(\delta-\beta), \quad \delta^2-\gamma^2+2x(\delta-\gamma),$$

sont du premier degré en x.

Tout ce que nous avons dit sur la discussion des cas que présente

Digitized by Google

le cercle tangent à trois autres a lieu pour la sphère tangente à quatre sphères. On peut en exprimer ainsi le résultat : quelque changement qu'éprouve l'équation (X) par les mutations des signes des rayons $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, la sphère dont elle déterminera le rayon, sera tangente extérieurement à celles des sphères proposées, dont les signes des rayons employés dans la formation de l'équation (X), seront les mêmes que le signe de la racine de (X) considérée; et cette sphère tangente enveloppera celles des sphères données, dont les signes des rayons employés dans l'équation (X) seront contraires au signe de la racine de cette équation qui répond à la sphère en question. Quant au nombre de ces solutions distinctes, en général il sera seize; deux proviennent de l'équation (X), en y supposant les quatre rayons donnés, comme on l'a fait d'abord, avec le signe plus; que l'on rende négatif un seul des rayons, on aura deux autres solutions, et comme cela peut avoir lieu de quatre manières, ces changemens successifs produiront huit solutions. En faisant négatifs deux des rayons, on aura deux autres solutions, et l'on peut faire cela de six manières, dont trois ne donneront que ce que les trois autres auront déjà produit; de là les six dernières solutions.

Lorsque les centres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont dans un même plan, on parvient, comme pour le cercle tangent à trois autres, à une équation du premier degré pour déterminer le rayon de la sphère cherchée; car, dans ce cas $p = 0$, puisque, selon ce que nous avons remarqué ci-dessus, le volume de la pyramide déterminée par ces quatre points est $\frac{1}{12} p$, et que ce volume doit être nul. En supposant que, dans l'abaissement des faces de la pyramide sur l'une d'elles, les arêtes a, b, c se disposent autour du centre δ, de manière que chacune de ces arêtes doive être prolongée vers δ pour rencontrer l'arête qui, dans la pyramide lui était opposée, entre les extrémités de cette dernière arête, ce qui revient à dire que le point δ se trouve dans l'intérieur du triangle $\alpha\beta\gamma$; on aura

$$\cos. \widehat{b,c,} = \cos. \widehat{c,a,} = \cos. \widehat{a,b,} = -1.$$

Digitized by Google

Si tout cela se passait autrement, les conséquences suivantes ne seraient que peu changées.

D'après ces valeurs des cosinus et de $p = 0$, on aura

$$L = [(a^2+\delta^2-\alpha^2)a_1+(b^2+\delta^2-\beta^2)b_1+(c^2+\delta^2-\gamma^2)c_1]^2 ;$$

et partant, l'équation (X) devient

$$0 = \begin{cases} (a^2+\delta^2-\alpha^2)a_1+(b^2+\delta^2-\beta^2)b_1+(c^2+\delta^2-\gamma^2)c_1 \\ +2x[(\delta-\alpha)a_1+(\delta-\beta)b_1+(\delta-\gamma)c_1] \end{cases}^2 ,$$

d'où l'on tire

$$x = -\frac{1}{2}\frac{(a^2+\delta^2-\alpha^2)a_1+(b^2+\delta^2-\beta^2)b_1+(c^2+\delta^2-\gamma^2)c_1}{(\delta-\alpha)a_1+(\delta-\beta)b_1+(\delta-\gamma)c_1} ;$$

équation qui, par la combinaison des changemens de signes de α, β, γ, δ, présentera encore les seize solutions du problème. On a ici la même remarque à faire que dans le cas des cercles tangens, sur le rayon qui est toujours réel, quels que soient la situation des sphères proposées et leurs rayons.

Nous ferons observer en finissant, que l'équation

$$k^2 = a'^2+b'^2+c'^2-2b'c'\cos.\widehat{b_1c_1}-2c'a'\cos.\widehat{c_1a_1}-2a'b'\cos.\widehat{a_1b_1},$$

au moyen de laquelle nous avons trouvé l'équation (R), devient, après l'avoir divisée par k^2, et y avoir mis pour

$$\frac{a'}{k}, \quad \frac{b'}{k}, \quad \frac{c'}{k},$$

les valeurs

$$\cos.\widehat{ak} : \sin.\widehat{aa_1}, \quad \cos.\widehat{bk} : \sin.\widehat{bb_1}, \quad \cos.\widehat{ck} : \sin.\widehat{cc_1},$$

Digitized by Google

$$1 = \frac{\cos.^2 \widehat{ak}}{\sin.^2 \widehat{aa_1}} - 2\frac{\cos. \widehat{bk}}{\sin. \widehat{bb_1}} \cdot \frac{\cos. \widehat{ck}}{\sin \widehat{cc_1}} \cos. \widehat{b_1 c_1}$$

$$+ \frac{\cos.^2 \widehat{bk}}{\sin.^2 \widehat{bb_1}} - 2\frac{\cos. \widehat{ck}}{\sin. \widehat{cc_1}} \cdot \frac{\cos. \widehat{ak}}{\sin. \widehat{aa_1}} \cos. \widehat{c_1 a_1}$$

$$+ \frac{\cos.^2 \widehat{ck}}{\sin.^2 \widehat{cc_1}} - 2\frac{\cos. \widehat{ak}}{\sin. \widehat{aa_1}} \cdot \frac{\cos. \widehat{bk}}{\sin. \widehat{bb_1}} \cos. \widehat{a_1 b_1};$$

équation dont M. *Français* s'est servi pour compléter sa solution, dans les Annales de mathématiques. Elle n'est d'ailleurs que celle employée par M. *Carnot,* dans son Mémoire sur la relation des distances de cinq points, pour parvenir à cette relation, et qu'il considère comme ayant pour objet de déterminer l'un des six arcs de grands cercles qui joignent quatre points deux à deux sur la surface d'une sphère, les cinq autres étant donnés. Pour s'en assurer, il suffit d'y substituer à sin. $\widehat{aa_1}$ la valeur

$$[1 + 2\cos. \widehat{bc} \cos. \widehat{ca} \cos. \widehat{ab} - \cos.^2 \widehat{bc} - \cos.^2 \widehat{ca} - \cos.^2 \widehat{ab}]^{\frac{1}{2}} : \sin. \widehat{bc},$$

et les valeurs analogues pour sin. $\widehat{bb_1}$, sin. $\widehat{cc_1}$; pour cos. $\widehat{b_1 c_1}$, la valeur

$$[\cos. \widehat{bc} - \cos. \widehat{ca} \cos. \widehat{ab}] : \sin. \widehat{ca} \sin. \widehat{ab},$$

et de même pour cos. $\widehat{c_1 a_1}$, cos. $\widehat{a_1 b_1}$; on obtient, après avoir remplacé les sin.^{2} par des cos.^{2} et chassé le dénominateur, et après avoir tout fait passer dans un membre

$$0 = 1 - \cos.^2 \widehat{bc} - \cos.^2 \widehat{ca} - \cos.^2 \widehat{ab} - \cos.^2 \widehat{ak} - \cos.^2 \widehat{bk} - \cos.^2 \widehat{ck}$$
$$+ \cos.^2 \widehat{bc} \cos.^2 \widehat{ak} + 2\cos. \widehat{bc} \cos. \widehat{bk} \cos. \widehat{ck} - 2\cos. \widehat{ca} \cos. \widehat{ab} \cos. \widehat{bk} \cos. \widehat{ck}$$
$$+ \cos.^2 \widehat{ca} \cos.^2 \widehat{bk} + 2\cos. \widehat{ca} \cos. \widehat{ck} \cos. \widehat{ak} - 2\cos. \widehat{ab} \cos. \widehat{bc} \cos. \widehat{ck} \cos. \widehat{ak}$$
$$+ \cos.^2 \widehat{ab} \cos.^2 \widehat{ck} + 2\cos. \widehat{ab} \cos. \widehat{ak} \cos. \widehat{bk} - 2\cos. \widehat{bc} \cos. \widehat{ca} \cos. \widehat{ak} \cos. \widehat{bk},$$

Digitized by Google

les quatre points sur la surface de la sphère, dont le rayon est l'unité, sont ici désignés par a, b, c, k, et leurs distances ou les six arcs de grands cercles qui les joignent deux à deux, sont

$$\widehat{ak},\ \widehat{bk},\ \widehat{ck},\ \widehat{bc},\ \widehat{ca},\ \widehat{ab}.$$

Cette équation est précisément celle dont M. *Carnot* déduit la relation des distances de cinq points : observation qui peut faire encore mieux sentir ce qu'il y a de commun entre diverses routes qui concourent au même but.

SOLUTION

Digitized by Google

SOLUTION ANALYTIQUE DE CE PROBLÈME :

Déterminer le Centre et le Rayon d'une Sphère qui touche quatre Sphères données.

PAR M. HACHETTE.

POUR résoudre cette question par la synthèse (*voyez* la Correspondance sur l'École polytechnique, I.er volume, *page 19*, et le Supplément de la Géométrie descriptive, *page*), on démontre d'abord qu'une sphère dont le centre et le rayon varient, et qui est tangente dans toutes ses positions à trois sphères fixes, touche l'une quelconque de ces sphères, en une suite de points situés sur un petit cercle, et que le plan de ce petit cercle est perpendiculaire à celui qui contient les centres des trois sphères touchées. Soient A, B, C, D les quatre sphères données ; considérant les trois sphères A, B, C, on détermine sur la sphère A, le petit cercle c, lieu des points de contact de cette sphère et de la sphère variable tangente dans toutes ses positions aux sphères A, B, C. Considérant ensuite les trois sphères A, B, D, on détermine sur la même sphère A, le petit cercle c', lieu des points de contact de cette sphère, et de la sphère variable, tangente dans toutes ses positions aux trois sphères A, B, D. Les deux petits cercles c et c' de la sphère A se coupent en deux points. La droite qui joint l'un de ces points et le centre de la sphère A, contient le centre d'une cinquième sphère tangente aux quatre sphères A, B, C, D, et comme le centre est à égale distance de la surface A et de l'une quelconque des trois surfaces sphériques B, C, D, sa position est déterminée.

Pour appliquer l'analyse à cette solution synthétique, nous allons démontrer la proposition qui lui sert de base.

THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE.

Étant données trois sphères fixes, on suppose qu'une sphère dont le

Digitized by Google

centre et le rayon varient, touche constamment les trois sphères données : *Le lieu des points de contact de la sphère variable et de l'une quelconque des sphères fixes, est un petit cercle de cette dernière sphère*, dont le plan est perpendiculaire à celui qui passe par les centres des trois sphères données.

En rapportant l'espace aux trois axes rectangulaires des x, des y, des z, je suppose que le plan mené par les centres des trois sphères données, soit le plan des xy, et que les centres de ces sphères soient, le premier à l'origine des coordonnées, le second sur l'axe des x, et le troisième en un point donné du plan des xy.

Nommons r, r', r'', ρ, les rayons des trois sphères données et de la sphère qui les touche ; a' la distance du centre de la seconde sphère à l'origine des coordonnées ; a'', b'', les coordonnées du centre de la troisième sphère ; α, β, γ, les coordonnées du centre de la sphère tangente du rayon ρ.

Lorsque deux sphères se touchent, la distance de leurs centres est égale à la somme ou à la différence de leurs rayons. En appliquant ce principe à la distance des centres de la sphère du rayon ρ et de chacune des sphères qu'elle touche, on aura les trois équations suivantes :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\rho \pm r)^2, \qquad (1)$$

$$(\alpha - a')^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\rho \pm r')^2, \qquad (2)$$

$$(\alpha - a'')^2 + (\beta - b'')^2 + \gamma^2 = (\rho \pm r'')^2. \qquad (3)$$

Ces trois équations représentent celles qu'on obtiendrait en prenant toutes les combinaisons des termes affectés du signe $\pm$; ces combinaisons, au nombre de huit, peuvent s'écrire ainsi,

$$\rho + r \text{ ou } \rho - r \begin{cases} \rho + r', & \rho + r'' \\ \rho + r', & \rho - r'' \\ \rho - r', & \rho + r'' \\ \rho - r', & \rho - r'' \end{cases}.$$

Digitized by Google

La quantité $\rho + r$ ou $\rho - r$, peut se combiner avec chacune des deux autres placées sur une même horizontale de ce tableau; ce qui donne évidemment huit combinaisons. Ne considérant que la première de ces combinaisons,

$$\rho + r, \quad \rho + r', \quad \rho + r'',$$

les équations (1), (2), (3), deviendront

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\rho + r)^2, \qquad (A)$$

$$(\alpha - a')^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\rho + r')^2, \qquad (B)$$

$$(\alpha - a'')^2 + (\beta - b'')^2 + \gamma^2 = (\rho + r'')^2. \qquad (C)$$

Retranchant successivement de l'équation (A), les équations (B) et (C), on aura

$$2\rho(r - r') = 2a'\alpha - a'^2 - (r^2 - r'^2) \qquad (b)$$

$$2\rho(r - r'') = 2a''\alpha + 2b''\beta - a''^2 - b''^2 - (r^2 - r''^2), \qquad (c)$$

et éliminant ρ, qui est linéaire dans ces deux équations (b) et (c),

$$\left.\begin{array}{l}(r - r')[2a''\alpha + 2b''\beta - a''^2 - b''^2 - r^2 + r''^2] \\ -(r - r'')[2a'\alpha - a'^2 - r^2 + r'^2]\end{array}\right\} = 0. \qquad (D)$$

Cette équation (D) étant linéaire en α, β, coordonnées du centre de la sphère qui touche les trois sphères données, et ne contenant ni la troisième coordonnée γ de ce centre, ni le rayon ρ de cette sphère, il suit que les centres de toutes les sphères tangentes aux trois sphères données, sont dans un plan perpendiculaire au plan des xy, qui a pour trace sur ce plan, la droite, dont on aura l'équation en mettant dans l'équation (D), au lieu de α, β, les coordonnées x, y, d'un point quelconque de cette droite. Supposons qu'après cette substitution, elle devienne

$$\left.\begin{array}{l}(r - r')(2a''x + 2b''y - A) - (r - r'')(2a'x - B) = 0, \\ \text{ou } (r' - r)(\quad \text{id.} \quad) - (r'' - r)(\quad \text{id.} \quad) = 0,\end{array}\right\} \qquad (5)$$

Digitized by Google

A et B étant des constantes connues, qui ne changent pas, quel que soit le signe des rayons r, r', r''. Cette équation (5) est une de celles qui correspondent aux valeurs de $r-r'$ et $r-r''$, dépendantes des signes des rayons r', r''. Or, ces valeurs sont au nombre de quatre :

$$\begin{aligned} &1.^\circ \quad r - r' \quad \text{et} \quad r - r'', \\ &2.^\circ \quad r - r' \quad \text{et} \quad r + r'', \\ &3.^\circ \quad r + r' \quad \text{et} \quad r - r'', \\ &4.^\circ \quad r + r' \quad \text{et} \quad r + r''. \end{aligned}$$

En changeant à-la-fois dans l'équation (5) les signes des rayons r, r', r'', on changerait seulement les signes de tous les termes de cette équation; ce qui prouve que l'équation (5) ne représente que quatre droites différentes. D'où il suit que les centres des sphères du rayon variable ρ, qui touchent les trois sphères données, sont contenues dans quatre plans; l'un de ces plans correspond aux différences $r-r'$, $r-r''$, et a pour trace la droite de l'équation (5) (x et y étant les coordonnées d'un point de cette droite).

Concevons la droite menée par l'origine des coordonnées, centre de la première des sphères données, et par le point α, β, γ, centre de la sphère du rayon ρ, qui les touche; cette droite a pour équation,

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma};$$

Elle coupe la première sphère dont l'équation est

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

en un point pour lequel on a :

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \frac{r}{r+\rho}; \qquad (6)$$

d'où l'on tire

$$\rho = \frac{r(\alpha - x)}{x}.$$

Digitized by Google

Substituant cette valeur dans l'équation (b), cette équation donne

$$(E)\quad \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha = \dfrac{x[a'^2 - (r-r')^2]}{a'x - r(r-r')}, \\ \text{et à cause de} \\ 2\beta = \dfrac{2\alpha y}{x}, \quad 2\gamma = \dfrac{2\alpha z}{x}, \\ 2\beta = \dfrac{y[a'^2 - (r-r')^2]}{a'x - r(r-r')}, \quad 2\gamma = \dfrac{z[a'^2 - (r-r')^2]}{a'x - r(r-r')}. \end{array} \right.$$

Mettant ces valeurs de 2α et 2β dans l'équation (D), et l'ordonnant par rapport à x et à y, on a

$$(F)\quad \left\{ \begin{array}{l} x\left\{ \begin{array}{l} [a'^2-(r-r')^2]\,[a''(r-r')-a'(r-r'')] \\ -a'(r-r')\,(a''^2+b''^2+r^2-r''^2)-a'(r-r'')\,(r'^2-r^2-a^2) \end{array} \right\} \\ +b^2y(r-r')\,[a'^2-(r-r')^2] \\ -r(r-r')^2(a''^2+b''^2+r^2-r''^2)-r(r-r')\,(r-r'')\,(a^2+r^2-r'^2) \end{array} \right\} = 0,$$

équation linéaire en x et y, et qui est satisfaite en changeant les signes des rayons r, r', r''. Elle ne contient ni le rayon ρ, ni les coordonnées α, β, γ, du centre de la sphère mobile qui touche les trois sphères données; elle exprime la relation des coordonnées x, y, du point de contact de cette sphère mobile et de la sphère fixe

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Donc le lieu de ces points de contact est un petit cercle de la sphère fixe, dont le plan est perpendiculaire à celui des xy, qui contient les centres des trois sphères données.

Mettant successivement dans l'équation (F), pour les différences $r-r'$ et $r-r''$, les quatre valeurs qui correspondent aux signes des rayons r, r', r'', on aura les équations des quatre petits cercles de la première sphère, correspondans aux quatre séries des sphères qui peuvent toucher les trois sphères données.

Digitized by Google

Quoique nous n'ayons considéré que la sphère dont le centre est à l'origine des coordonnées, la démonstration précédente s'applique également aux deux autres sphères, puisque, sans changer leur position respective, on pourrait transporter l'origine des coordonnées au centre de l'une ou l'autre de ces deux sphères.

Cette proposition étant démontrée, on achevera la solution de la manière suivante :

Soient a''', b''', c''' les coordonnées du centre de la quatrième sphère donnée, et r''' son rayon. Supposons que la sphère du rayon ρ, dont le centre a pour coordonnées α, β, γ, soit tangente aux quatre sphères données. x, y, z étant les coordonnées du point où la sphère du rayon ρ touche la première sphère, on a l'équation (6),

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{r}{r+\rho}; \quad \text{d'où l'on tire} \quad \alpha = \frac{x(\rho+r)}{r}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (b),

$$\rho = \frac{a'r(2x-a') - r(r^2-r'^2)}{2[r(r-r') - 2a'x]}. \qquad (G)$$

Par l'axe des x qui contient les centres des deux premières sphères données, et par le centre de la quatrième sphère, concevons un plan, et faisons tourner ce plan autour de l'axe des x jusqu'à ce qu'il soit abattu sur le plan des xy. Rapportant les deux premières sphères données, ainsi que la quatrième sphère, à ce nouveau plan, en conservant l'origine des coordonnées et l'axe des x, les coordonnées du centre de la quatrième sphère seront a''' et $\sqrt{(b'''^2+c'''^2)}$. Faisant, pour abréger, $\sqrt{(b'''^2+c'''^2)} = C$, et désignant par y' les ordonnées perpendiculaires à l'axe des x, on aura, pour l'équation du plan du petit cercle, lieu de tous les points de contact de ces trois sphères, et d'une sphère mobile qui les touche :

Digitized by Google

$$x\left\{\begin{array}{l}\left[a'^2-(r-r')^2\right]\left[a'''(r-r')-a'(r-r''')\right]\\ -a'(r-r')\,(a'''^2+C^2+r^2-r'''^2)\\ -a'(r-r'')\,(r'^2-r^2-a^2)\\ +b^2y'(r-r')\left[a'^2-(r-r')^2\right]\\ -r(r-r')^2\,(a'''^2+C^2+r^2-r'''^2)\\ -r(r-r')\,(r-r''')\,(a^2+r^2-r'^2).\end{array}\right\}=0. \quad (F')$$

On obtient cette équation, en changeant dans l'équation (F) r'' en r''' et b'' en C.

Faisant successivement dans l'équation (F′)

$$y'=0, \qquad x=0,$$

on aura les valeurs X et Y de x et y', qui correspondent à

$$y'=0 \quad \text{et à} \quad x=0;$$

la droite, dont l'équation est (F′), coupera l'axe des x et l'axe des y' en deux points, distans des coordonnées de l'origine des quantités X et Y.

Remettant l'axe des y' et la portion Y de cet axe à sa véritable place sur le plan des yz, et élevant une perpendiculaire sur cet axe par l'extrémité de Y, cette perpendiculaire sera sur le plan des yz la trace du plan du petit cercle, lieu des points de contact des trois sphères qui ont pour rayons r, r', r''', et de la sphère mobile qui les touche. Cette trace coupe l'axe des y et l'axe des z en deux points, dont les coordonnées sont : $\frac{CY}{b''}$ et $\frac{CY}{c''}$;

en sorte que le plan du petit cercle coupe les trois axes des x, y, z, en trois points distans de l'origine des coordonnées des quantités

$$X, \quad \frac{CY}{b''}, \quad \frac{CY}{c''};$$

d'où il suit que l'équation de ce plan est :

Digitized by Google

$$\frac{x}{X} + \frac{b'' y}{CY} + \frac{c'' z}{CY} = 1. \qquad (F'')$$

x, y, z étant les coordonnées du point de contact de la première sphère du rayon r, et de la cinquième sphère du rayon ρ, on a pour ce point

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Les équations (G), (F'') et l'équation (F) étant linéaires en x, y, z, ρ, on tirera la valeur de ρ de l'équation du second degré, $x^2+y^2+z^2=r^2$. Mettant successivement dans les quatre systèmes d'équations (F), (F''), la différence $r-r'''$ des rayons r; r''', ou leur somme $r+r'''$, on parviendra à huit équations du second degré, d'où l'on tirera les seize valeurs du rayon ρ de la sphère qui touche les quatre sphères données des rayons r, r', r'', r'''. Quant aux coordonnées α, β, γ du centre de cette sphère tangente, on tirera leurs valeurs des équations (6).

La première solution analytique de ce problème a été donnée par M. *Poisson*, dans le Bulletin de la Société philomatique, septembre 1812, *page 141*. M. *Français* a résolu depuis ce même problème, et sa solution est imprimée, *pages 63* et *409* du second tome de la Correspondance de l'École polytechnique. C'est à *Fermat* qu'on doit la première solution synthétique; la traduction du mémoire relatif à ce problème des sphères, fait partie des huitième et neuvième Cahiers de ce Journal, publié par le Conseil d'instruction.

Digitized by Google

EXPÉRIENCES

SUR LA FLEXIBILITÉ, LA FORCE ET L'ÉLASTICITÉ DES BOIS,

Avec des Applications aux Constructions en général, et spécialement à la Construction des vaisseaux;

Faites dans l'Arsenal de la marine, à Corcyre, en 1811;

Par CH. DUPIN, *Capitaine au Corps du Génie maritime, ancien Élève de l'École polytechnique.*

PREMIER MÉMOIRE (*)

Présenté à la Classe des Sciences Physiques et Mathématiques de l'Institut de France, le 12 Avril 1813.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

C'EST en parcourant un arsenal de marine, que *Galilée*, frappé par les grands travaux qui s'offraient à ses regards, conçut l'idée d'appliquer la science des mathématiques à la détermination de la force des bois.

(*) Ce Mémoire, d'après le rapport de MM. *Carnot*, *Prony* et *Sané*, a été approuvé par la Classe, dans la séance du 19 juillet 1813.

Digitized by Google

Ainsi, c'est sur nos chantiers et dans nos ateliers qu'est née l'application des sciences du calcul aux travaux des arts : il semble aussi que ce soit là qu'elle ait dû naître ; car nulle part des ouvrages plus importans ne sont exécutés par de plus grands moyens, avec une précision plus rigoureuse et dans un moindre espace de temps.

Après que *Galilée* eut ouvert ainsi la carrière, elle fut parcourue par les savans les plus illustres; dès qu'il y eut un premier germe de théorie dans les arts, la théorie forma des ingénieurs. C'est alors que la partie expérimentale a fait des progrès plus sensibles, et qu'on a remplacé plus généralement l'hypothèse et le système par les données fruit de l'expérience, et par les calculs rigoureux fondés seulement sur ces données.

Sans retracer ici l'historique des travaux dont nous venons de parler, nous nous contenterons de citer la savante préface d'un *Traité sur la résistance des solides*, qu'on doit à l'ingénieur *Girard* qui, lui-même, a fait de nombreuses et belles expériences sur la force des bois.

Jusqu'ici l'on a cherché principalement à déterminer la résistance dont les bois sont capables à l'instant de leur rupture, soit en les rompant perpendiculairement à leurs fibres, soit en les affaissant sous des poids qui agissaient dans le sens des fibres mêmes.

Sans doute il est nécessaire de connaître ce point extrême, cette limite de la force des bois, afin d'employer toujours des matériaux doués d'une force plus grande que tous les efforts auxquels ils devront résister dans les constructions et dans les machines où ils entrent comme élémens : mais il faut toujours se tenir assez loin de cette limite; et lorsqu'on veut faire des travaux durables, il faut s'en tenir bien plus loin encore ; car le temps diminue incessamment la force des bois, et mille causes concourent à détériorer leurs qualités primitives.

Idée de l'objet qu'on s'est proposé et de la marche qu'on a suivie.

Il est un autre genre de recherches non moins utile, plus utile peut-être, et qui cependant me semble avoir été bien moins suivi. C'est de déterminer les résistances comparées des bois, lorsqu'on les soumet à

Digitized by Google

des forces capables d'altérer très-peu leur figure, et de trouver, si je puis parler ainsi, leur *résistance virtuelle.*

Lorsque nous construisons nos édifices, nos machines, nos vaisseaux, nous supposons que les pièces d'une dimension considérable, et d'ailleurs peu chargées, conservent la figure qu'un dessin rigoureux leur a donnée : il n'en est rien. Dans la nature, les moindres forces ont leurs effets certains, quoique parfois imperceptibles; et souvent ces effets, insensibles individuellement, s'accumulent au point de produire les résultats les plus marqués et les plus graves : nous n'en offrirons qu'un seul exemple.

Le plus grand édifice que nous puissions construire en charpente, est, sans contredit, un vaisseau, tel qu'il doit être aujourd'hui pour entrer en ligne dans nos escadres. Lorqu'un vaisseau du premier rang est établi sur ses chantiers, ses dernières alonges s'élèvent au-dessus du faîte des plus hautes maisons; il doit loger mille hommes et au-delà, renfermer leurs vivres pour six mois, et toute l'artillerie d'une place forte de seconde classe : aussi la solidité de la construction répond-elle à l'immensité des objets qu'il doit contenir. Nous avons nommé *murailles* ses parois en charpente, et leur épaisseur est en effet au moins égale à celle des murs extérieurs de nos maisons ordinaires. Les liaisons, les supports en tout genre sont combinés avec intelligence; le cuivre, le fer, sont prodigués pour assurer la liaison de toutes les parties : qui douterait qu'avec des moyens si puissans et si bien disposés, la forme du vaisseau ne se trouvât assurée d'une manière invariable? Cependant cela n'est pas. A peine est-il à flot sur la mer, que l'opposition des efforts, d'une part produits par le poids considérable des extrémités, et de l'autre par la répulsion de l'eau qui s'exerce principalement vers le milieu; une telle opposition, disons-nous, fait plier à-la-fois toute cette grande machine, et lui fait prendre une courbure, *un arc* qu'on a vu sur une longueur de soixante mètres, quelquefois d'un demi-mètre de flèche et au-delà.

Digitized by Google

Une telle déformation est énorme sans doute; elle change sensiblement la stabilité du vaisseau, elle influe sur toutes ses autres qualités. Cependant, si nous voulons savoir quelle serait la flèche d'un arc ayant un mètre de corde, et d'ailleurs affectant la courbure que nous venons d'indiquer, on trouverait que le nouvel arc devrait avoir à-peu-près un septième de millimètre, c'est-à-dire, une grandeur à peine sensible, pour une longueur au moins égale à la moitié de notre plus haute stature.

C'est donc cette altération ~~presque~~ insensible des bois que je ~~me suis~~ premièrement proposé d'apprécier. C'est leur résistance à tout changement d'état, au moment où cette résistance commence à faire sentir ses effets; c'est-à-dire, lorsque les corps s'altèrent infiniment par leurs formes en vertu des poids qu'ils supportent.

On verra peut-être avec quelque intérêt que les lois et les anomalies observées dans les expériences faites en grand sur la rupture des bois, c'est-à-dire, au moment où leur déformation est la plus grande possible, ne sont que la conséquence nécessaire des variations extrêmement petites que les moindres flexions des bois offrent à l'observateur. C'est à-peu-près ainsi que les fonctions intégrales dérivent des lois qui coordonnent les élémens différentiels de ces mêmes fonctions, et peuvent en être rigoureusement déduites.

§. I.er

De la Flexion des Bois considérée par rapport aux Charges et aux Flèches, ou Descensions qu'elles produisent.

Je vais maintenant passer au détail de mes expériences (*).

(*) Dans l'arsenal de la marine à Corcyre, où j'ai fait mes expériences, j'avais choisi dans ma compagnie d'ouvriers militaires deux hommes extrêmement adroits, l'un menuisier, l'autre machiniste. Pourquoi ne les nommerais-je pas ici, puisqu'ils m'ont été très-utiles! Ils s'appelaient *Chorlet* et *Raymond*. Chaque jour ils préparaient ce qu'il me fallait pour les

Digitized by Google

J'ai fait fixer sur un grand établi deux supports horizontaux et de niveau, distans entre eux de deux mètres.

J'ai fait donner la forme d'un parallélipipède à des morceaux de chêne, de cyprès, de hêtre et de sapin ou de pin, seuls bois dont je pouvais disposer.

Description de l'appareil des expériences. *(Fig. 1, pl. 1.)*

Ces parallélipipèdes ayant un peu plus de deux mètres, étaient posés sur les supports dont ils mesuraient la plus courte distance, en dépassant très-peu de chaque côté, assez seulement pour que le parallélipipède, en prenant de la courbure, ne ~~se raccourcît pas~~ au point d'entrer tout-à-fait entre les appuis.

J'ai chargé ces parallélipipèdes, que j'appellerai simplement des *règles*, par des poids placés à égale distance entre les deux supports; alors les règles ont pris une certaine courbure.

Et premièrement, il est évident que la règle a dû se plier suivant une courbe plane verticale; secondement, que la courbe formée par chaque arête de la règle est symétrique à droite et à gauche, par rapport au plan vertical mené par le point milieu où la charge est appliquée, et perpendiculairement au plan même de la flexion.

Voilà la courbe dont nous voulons déterminer les élémens : nous avons toujours considéré la face concave de la règle pliée.

Or, dans les nombreuses expériences que j'ai faites, j'ai constamment observé que, quand les poids sont peu considérables, la *descension* du point milieu, ou la flèche, devient double pour un poids double, triple

---

expériences du lendemain. Je passais ensuite six à sept heures avec eux. Ces jeunes artisans, pleins de talent naturel, cherchaient à comprendre mon travail, et à le suivre. Je les voyais avec plaisir y réfléchir de leur côté, et lutter, pour ainsi dire, avec moi. Je leur faisais faire sur les objets mêmes, de la géométrie et de la mécanique, tandis qu'ils m'enseignaient mille résultats de pratique, par lesquels j'ai pu voir combien dans les arts, des hommes dénués d'instruction apportent néanmoins de finesse et de justesse d'observation. Je crois que les jeunes ingénieurs ne sauraient trop se rapprocher de leurs bons ouvriers; car ils rendront ceux-ci meilleurs, et deviendront eux-mêmes plus habiles, en profitant d'un genre d'expérience, le seul qu'ils ne puissent jamais acquérir d'eux-mêmes, celui qui naît des travaux manuels.

Digitized by Google

pour un poids triple, &c., et j'en ai conclu que si ces flèches ne sont pas rigoureusement proportionnelles aux poids qui les produisent, les différences qui résultent de poids peu considérables sont du moins assez petites pour échapper à nos moyens d'observation. Posons donc en principe ce premier théorème auquel la théorie avait déjà conduit.

Les flexions des bois produites par des poids très-petits sont proportionnelles à ces poids : en mesurant cette flexion par la flèche de leur arc, c'est-à-dire par l'abaissement ou la *descension* du point milieu de la règle.

Si l'on réfléchit que la corde de cet arc était la distance des deux points d'appui, et que l'arc même était d'une courbure très-petite, on verra que le rayon de cet arc était sensiblement égal au carré Δ^2 de la demi-distance des appuis Δ, divisé par la double flèche $2F$, égale à $\frac{\Delta^2}{2F}$; et comme la distance des appuis n'a pas cessé d'être la même, il en faut conclure cet autre théorème.

THÉORÈME.

Lorsqu'une même pièce de bois est chargée entre les mêmes appuis par des poids différens, ces poids sont réciproquement proportionnels au rayon de courbure de la pièce à son point milieu, et la courbure elle-même est par conséquent proportionnelle à ces poids très-petits.

Il est évident que le poids du corps fait toujours partie de ces poids. Mais comme il est réparti sur toute la longueur, au lieu de se trouver accumulé au milieu de la règle, il n'agit que comme s'il était réellement moins considérable, mais concentré au milieu. On verra que, dans le §. III, nous aurons égard à cette considération.

Voici d'ailleurs comment je me suis dispensé d'avoir égard à la flexion produite par le poids du corps. Au lieu de prendre la flèche entière de l'arc produit par les bois soumis à la flexion, je n'ai pris que la différence des deux flèches produites, 1.° par le poids de la règle et du poids ajouté, 2.° par le simple poids de la règle. C'est donc la quantité dont le point milieu de la règle *descend*, ou la *descension* de ce point,

Ce que c'est que la descension.

Digitized by Google

lorsque la règle, au lieu d'être abandonnée à elle-même entre les deux appuis, est chargée par des poids étrangers.

Après avoir vu quel est le rapport de la force virtuelle de la flexion avec les poids, il convenait de voir si cette loi se conserve en chargeant les corps par des poids considérables; ou, si elle ne se conserve pas, quelle est l'altération que cette loi supporte.

C'est ce que j'ai fait avec beaucoup de soin et de patience, en employant un double décimètre de *Kutsch* parfaitement gradué. L'habitude de prendre des mesures que j'ai depuis long-temps été forcé d'acquérir, me fait assurer que toutes celles que j'ai consignées dans mon travail, ne diffèrent jamais de deux dixièmes d'un millimètre de leur vraie valeur. Cette quantité, toute faible qu'elle est, a paru cependant trop forte encore aux yeux d'un géomètre qui porte dans la physique une précision mathématique. Mais observons qu'il est dans chaque genre de recherches un degré d'exactitude qu'on ne peut guère outrepasser : c'est ainsi qu'il m'aurait fallu des ébénistes pour polir mes bois, si j'avais voulu, par exemple, que leurs faces fussent planes à moins d'un demi-dixième de millimètre, ou simplement d'un dixième de millimètre. Au reste, observons que deux dixièmes de millimètre équivalent à l'ancienne mesure appelée *point :* c'est la limite de mes erreurs.

J'ai pris les quatre espèces de bois les plus généralement employés dans les arts, ce sont celles que j'ai déjà nommées. Le chêne et le sapin étaient coupés depuis peut-être vingt-cinq ans, puisqu'ils provenaient du vaisseau russe *le Michaël*, que j'ai démoli en 1810, et qui avait alors environ vingt ans de construction : aussi ces bois sont-ils loin d'avoir la force qui leur appartient.

Mais, comme il s'agit ici de déterminer les lois qui régissent la force et l'élasticité des bois, par des rapports généraux indépendans de la vigueur absolue des fibres ligneuses, et même indépendans du genre et de l'espèce des arbres, on voit que ces arbres étaient aussi propres à remplir notre objet que s'ils eussent été de fraîche coupe. Au reste,

Digitized by Google

le cyprès et le hêtre n'avaient guère plus d'un an, et leur élasticité nous a présenté les mêmes propriétés que les bois que nous venons de dire avoir vingt-cinq ans de coupe, ce qui démontre notre assertion jusqu'à l'évidence.

On a fait quatre parallélipipèdes ayant, comme nous l'avons dit, quelque chose de plus que deux mètres de longueur; on leur a donné trois centimètres d'écarrissage; ensuite on a placé successivement chaque règle sur les appuis, et on l'a chargée sur son milieu par 4 kilogrammes, puis par 8, 12, 16 et jusqu'à 28 kilogrammes.

Nous joignons ici les tableaux qui font connaître, 1.° les descensions de l'arc pris par les règles, 2.° les différences premières de ces descensions consécutives.

CHÊNE.

CHARGES.	4kilog.	8.	12.	16.	20.	24.	28.
Descensions.	0,0056.	0,0112.	0,0171.	0,0226.	0,0282.	0,0349.	0,0406.
Différences.		0,0056.	0,0059.	$0,005\frac{5}{6}$.	0 0056.	$0,006\frac{7}{6}$.	0,0057.

CYPRÈS.

CHARGES.	4kilog.	8.	12.	16.	20.	24.	28.
Descensions.	0,0071.	0,0142.	0,0215.	0,0287.	0,0359.	0,0442.	0,0510.
Différences.		0,0071.	0,0073.	0,0072.	0,0072.	0,0083.	0,0068.

HÊTRE.

Digitized by Google

HÊTRE.

CHARGES.	4kilog.	8.	12.	16.	20.	24.	28.
Descensions.	0,0084.	9,0169.	0,0259.	0,0345.	0,0434.	0,0540.	0,0635.
Différences.		0,0084.	0,0090.	0,0086.	0,0089.	0,0106.	0,0095.

SAPIN du Nord (*).

CHARGES.	4kilog.	8.	12.	16.	20.	24.	28.
Descensions.	0,0130.	0,0262.					
Différences.		0,0132.					

Si nous observons les résultats indiqués dans les trois premiers tableaux, nous verrons d'abord que huit kilogrammes font plier la règle du double seulement de la flexion produite par 4 kilogrammes; ce qui nous démontre que les différences au-dessous de cette charge deviennent trop petites pour être appréciées. Ce résultat concorde avec les principes d'où nous avons déduit notre premier théorème.

Ensuite je remarque que les différences premières des descensions et par conséquent aussi de la longueur des flèches de l'arc produit par

(*) Cette règle s'étant rompue dans le cours de mes expériences, je n'ai pas pu vérifier mes données; c'est pourquoi j'ai préféré laisser en blanc ce qui la regarde : c'est une expérience à refaire.

Digitized by Google

la flexion; j'observe, dis-je, que ces différences premières vont toujours en augmentant.

Elles offrent, il est vrai, quelques anomalies; mais immédiatement après une différence trop faible, il s'en présente une qui la surpasse beaucoup plus en sens contraire : et comme les erreurs ne portent que sur des dixièmes de millimètre, je ne doute pas qu'en employant des bois travaillés avec la dernière perfection, et des moyens d'observer plus rigoureux que ceux dont je pouvais me servir, on n'obtienne des résultats plus exacts et tels que les différences secondes soient constantes, ou du moins n'éprouvent que des variations réellement insensibles. C'est ce que nous pouvons d'ailleurs vérifier, *à posteriori*, sur les résultats que l'expérience vient de nous offrir.

Équation des descensions en fonction des charges.

J'appelle H la hauteur dont le milieu de la règle descend sous la pression du poids de 4 kilogrammes; δ' et δ'' deux constantes arbitraires dépendantes de la force et des dimensions du bois. Maintenant, si nous désignons par y la hauteur générale ou descension due à m fois 4 kilogrammes, je dis qu'on aura pour toutes les espèces de bois possibles cette équation générale,

$$y = H + \overline{m-1}\,.\,\delta' + \frac{m-1}{1}\,.\,\frac{m-2}{2}\,.\,\delta''. \qquad (1)$$

Si nous regardions m comme une ligne, cette équation mise sous la forme

$$y = H - \delta' + \delta'' + (\delta' - \tfrac{3}{2}\delta'')\,.\,m + \frac{\delta''}{2}\,.\,m^2,$$

serait celle d'une parabole. Ce sera la parabole des flexions ou des *descensions*, parce qu'elle les fera connaître en fonction des poids. Appliquons maintenant au chêne cette équation générale.

Application au chêne.

Lorsque $m = 1$, la règle est chargée de 4 kilogrammes, et la descension est de $0,^{m}0056$; mais alors l'équation (1) devient $y' = H$: donc, premièrement, $H = 0,^{m}0056$.

Digitized by Google

Lorsque $m = 2$, la règle est chargée de $2 \times 4^k = 8^k$, la descension est de $0,^m0112$, et la différence première de ... 0,0056.

Mais alors l'équation (1) devient

$$y'' = H + \Delta' = 0,0112 = 0,0056 + \Delta' :$$

donc $\Delta' = 0,0056$: ainsi Δ' représente ici la différence première.

Faisons enfin $m = 7$, la règle sera chargée de 28 kilogrammes ; mais alors la descension est de $0,^m0406 = y^{VII}$, on aura donc

$$0,0406 = 0,0056 + 6 \times 0,0056 + \frac{5.6}{1.2} \times \Delta''.$$

Nous tirons immédiatement de cette équation $\Delta'' = \frac{0,0014}{15}$, c'est-à-dire, 0,0001 à un cent cinquantième de millimètre près : voilà quelle est la différence seconde cherchée.

Maintenant, formons la série des différences secondes et premières, et des descensions elles-mêmes, pour comparer ces résultats à ceux de l'expérience.

CHARGES.	4kilog.	8.	12.	16.	20.	24.	28.
Série régulière des Descensions.	$H = 0,^m0056$.	$y' = 0,0056$. $\Delta' = 0,0056$.	$y'' = 0,0112$. $\Delta' = 0,0056$. $1\Delta'' = 0,0001$.	$y''' = 0,0169$. $\Delta' = 0,0056$. $2\Delta'' = 0,0002$.	$y^{IV} = 0,0227$. $\Delta' = 0,0056$. $3\Delta'' = 0,0003$.	$y^V = 0,0286$. $\Delta' = 0,0056$. $4\Delta'' = 0,0004$.	$y^{VI} = 0,0346$. $\Delta' = 0,0056$. $5\Delta'' = 0,0005$.
Termes définitifs.	$y' = 0,0056$.	$y'' = 0,0112$.	$y''' = 0,0169$.	$y^{IV} = 0,0227$.	$y^V = 0,0286$.	$y^{VI} = 0,0346$.	$y^{VII} = 0,0407$.
Résultats de l'expérience.	0,0056.	0,0112.	0,0171.	$0,022\frac{6}{7}$.	$0,028\frac{2}{3}$.	0,0349.	0,0406.
Différences.	0,0000.	0,0000.	— 0,0002.	$+ 0,000\frac{0}{1}$.	$+ 0,000\frac{4}{3}$.	— 0,0003.	+ 0,0001.

Digitized by Google

Observons d'abord, dans ce tableau, que l'erreur d'un dixième de millimètre entre le terme régulier $y^{VII} = 0{,}0407$ et $0{,}0406$, résultat de l'expérience, provient du cent cinquantième de millimètre surajouté à la différence seconde δ, pour en faire un nombre rond à quatre décimales.

Si donc cette différence est répétée quinze fois, comme au dernier terme y^{VII}, il doit y avoir un dixième de millimètre d'erreur; mais rien n'est plus facile que d'en faire la correction.

Ensuite la plus grande différence que présentent ces observations, ne surpasse pas quatre dixièmes de millimètre. Si l'on réfléchit que la règle en se courbant forme un arc plus long que la distance des appuis, qui sert ici de corde à cet arc, on comprendra que la règle en se pliant doit glisser entre ces deux appuis; mais les supports étaient de simples arêtes en bois, travaillées proprement, quoique sans beaucoup d'art. Par conséquent, ce mouvement de la règle le long des supports a dû se faire comme tout frottement de première espèce, c'est-à-dire, par petits ressauts plus ou moins sensibles, plus ou moins réguliers. Rappelons-nous toujours que j'étais dans un port où tout me manquait pour opérer avec la dernière précision, même des balances parfaites, et l'on verra qu'aucune des petites différences de l'observation et du calcul n'est au-delà de la limite totale assignée à la justesse de ces opérations.

J'ai fait les mêmes calculs, et j'ai trouvé des résultats non moins satisfaisans pour le cyprès, le hêtre et le sapin. J'ai formé de la sorte ce tableau comparé.

Tableau comparé des Élémens de la Flexion des Bois.

Chêne.....	$H = 0{,}^{m}0056.$	$\delta' = 0{,}^{m}0056.$	$\delta'' = 0{,}^{m}0001.$
Cyprès.....	$H = 0,\ 0071.$	$\delta' = 0,\ 0071.$	$\delta'' = 0,\ 00008666.....$
Hêtre.....	$H = 0,\ 0084.$	$\delta' = 0,\ 0084.$	$\delta'' = 0,\ 00031.$
Sapin du Nord...	$H = 0,\ 0130.$	$\delta' = 0,\ 0132.$	$\delta'' = 0,\ 0002.$

Digitized by Google

Appliquons maintenant ces résultats. Chargeons d'un poids considérable les pièces dont nous venons de calculer les élémens, et demandons-nous la flèche de l'arc qu'elles vont prendre en vertu de cette charge ; chargeons-les, par exemple, de 80 kilogrammes, nous aurons $80^k = 20.4^k$, dont il faudra trouver le 20.e terme de la série dont nous avons montré la formation il n'y a qu'un moment : ainsi $m=20$, et l'on a

Application des déterminations précédentes à des flexions considérables.

Chêne..... $y^{(20)} = 0{,}0056 + 19.0{,}0056 + \frac{19}{1}.\frac{18}{2}.0{,}0001 \ldots = 0{,}1291\ldots$

Cyprès..... $y^{(20)} = 0{,}0071 + 19.0{,}0071 + \frac{19}{1}.\frac{18}{2}.0{,}000087 = 0{,}156877$

Hêtre..... $y^{(20)} = 0{,}0084 + 19.0{,}0084 + \frac{19}{1}.\frac{18}{2}.0{,}00031. = 0{,}2210\ldots$

Sapin du Nord. $y^{(20)} = 0{,}0130 + 19.0{,}0132 + \frac{19}{1}.\frac{18}{2}.0{,}0002\ldots = 0{,}3113\ldots$

Si nous comparons ces résultats avec ceux obtenus pour 4 kilogrammes seulement, nous verrons que, proportion gardée, le cyprès a le moins fléchi sous la grande charge, ensuite le chêne, puis le sapin, enfin le hêtre : ceci tient à la valeur des différences secondes.

Des élémens qu'on vient de déterminer, dépendent plusieurs qualités des bois.

De là nous tirons cette conséquence remarquable : « Quand même » la résistance virtuelle d'une espèce de bois serait très-forte, si la » différence seconde Δ'' était très-grande pour cette espèce, avec une » charge considérable, cette pièce finirait par plier plus qu'une pièce » d'une autre essence, dont la résistance virtuelle à la flexion serait » cependant plus grande. »

On sait que le hêtre est doué de la plus grande élasticité ; le tourneur en fait l'ARC qui sert de régulateur à son tour. Dans la marine, les meilleurs avirons, ceux qui supportent sans se rompre les chocs les plus puissans et les impulsions les plus rapides, sont faits en bois de hêtre. C'est que les différences secondes du hêtre étant considérables, cette grande flexion dont il est susceptible, avec des charges données, lui permet de céder à des chocs brusques, et le rend peu cassant.

Remarquons au contraire que le cyprès, peu flexible et très-cassant,

Digitized by Google

a ses différences secondes presque insensibles : elles ne sont pas le tiers de celles du hêtre.

Mais le chêne ayant ses différences première et seconde plus fortes que celles du cyprès, est à-la-fois moins cassant que le cyprès et doué d'une plus grande résistance à la pression : voilà ce qui le rend si précieux dans toutes les grandes constructions, qui doivent, sans altérer sensiblement leurs formes, résister à des efforts considérables. Passons à d'autres observations.

La rigidité des bois croît avec leur pesanteur spécifique.

J'ai déterminé les pesanteurs spécifiques des quatre règles soumises aux expériences précédentes, leur ordre est aussi celui de la résistance à la flexion.

Pesanteur des Bois comparée à leur Flexibilité virtuelle.

Espèces.	Longueur.	Poids.	*Idem* pour un mètre.	Pesanteur spécifique.	Flexibilité virtuelle.	Résistance à la flexion.	Rapport de la résistance à la pesanteur spécifique.
Chêne....	2,^{m}23.	1,47.	0,6592.	0,7324.	56.	$\frac{1}{56}$	41,0144.
Cyprès...	2, 255.	1,348.	0,5978.	0,6640.	71.	$\frac{1}{71}$	47,1440.
Hêtre....	2, 2.	1,305.	0,5936.	0,6595.	84.	$\frac{1}{84}$	55,3980.
Sapin....	2, 2.	0,825.	0,3750.(*)	0,4428.	130.	$\frac{1}{130}$	57,5640.

A la seule inspection de ce tableau, on voit que les pesanteurs spécifiques croissent en même temps que les résistances à la flexion, mais croissent beaucoup moins.

Conséquences relatives à la construction des vaisseaux.

De la résulte cette conséquence importante : « De deux vaisseaux de

(*) 3,^{m}984, en ayant égard à la réduction des épaisseurs du sapin, trop faible d'un millimètre.

Digitized by Google

» même rang et dont la charpente sera d'égal volume, celui qui sera » construit avec le bois le plus pesant prendra moins d'arc que celui » qui sera construit avec le bois le plus léger. » Car, toutes choses égales d'ailleurs, l'arc des vaisseaux est proportionnel à la flexibilité virtuelle des bois employés à leur construction (*).

Ainsi les vaisseaux de la mer Baltique et de la Hollande doivent prendre plus d'arc que les vaisseaux de la Méditerranée ; tandis que des vaisseaux espagnols, construits avec les bois très-pesans du Nouveau-Monde, doivent prendre moins d'arc encore que les vaisseaux construits avec les bois les plus lourds et les plus forts du midi de l'Europe ; parce que les bois de même espèce sont d'autant plus pesans, qu'ils croissent dans des climats plus chauds.

Mais si l'on construisait en bois différens deux vaisseaux sur un même plan, de manière que leur charpente eût cependant le même poids, on verrait par nos calculs, que « le vaisseau construit avec le bois le » plus léger serait celui dont l'arc serait au contraire le moins consi- » dérable, et qui présenterait la plus grande solidité. »

Le célèbre D. *Juan* paraît avoir entrevu ces vérités, puisqu'il voudrait qu'on construisît les vaisseaux avec les plus légers des bois, les bois résineux, et non pas avec le chêne.

Utilité des expériences précédentes.

Au reste, toutes les expériences précédentes, en offrant les élémens de la résistance virtuelle, donneront les moyens de la calculer, et par-là d'obtenir des résultats comparables, sans en venir aux expériences coûteuses de la rupture des pièces. Par ce moyen, on connaîtra mieux les vraies qualités des bois qui conviennent aux divers travaux des

(*) Je dis, toutes choses égales d'ailleurs, parce que des liaisons plus ou moins parfaites, un chevillage plus ou moins bien entendu, influent très-puissamment sur la solidité et la rigidité du vaisseau. Mais deux ingénieurs également habiles, quoique travaillant dans des ports différens, approcheront également de la perfection dans les travaux de charpente et dans ceux du persage. Ce n'est donc pas cette cause qu'il faut considérer pour se rendre compte des différences qu'on peut observer dans l'arc des navires semblables.

Digitized by Google

arts, et sur-tout aux constructions navales; on pourra fixer la dimension des pièces de chaque navire, d'une manière moins arbitraire. Ces opérations plus éclairées conduiront à des résultats avantageux (*).

Application à la mâture des vaisseaux.

Les ingénieurs de la marine agitent en ce moment une question importante. On sait qu'autrefois la mâture de nos vaisseaux était faite avec des sapins ou pins du nord, parce que les rares qualités de ces bois les font rechercher de toutes les nations. Depuis long-temps les approvisionnemens de ce genre que possédaient nos arsenaux, sont épuisés, et il faut recourir à des bois d'une autre origine. On a proposé les sapins de la Toscane et les pins de la Corse: on a cru y trouver plus d'avantages que dans les anciens bois du nord qui nous restent encore, et cela est vrai; mais en ont-ils plus que les bois du nord, employés dans leur fraîcheur? cela est douteux.

Ensuite il ne suffit pas de considérer la résistance à la rupture; la résistance à la flexion est aussi d'une considération très-importante; car la flexion des mâts ne pouvant pas s'opérer sans l'alongement des cordages qui les soutiennent, de deux mâts qui casseraient sous le même effort, celui qui plie le plus exigera un plus grand alongement dans les cordages, et par conséquent un plus grand effort de la part du vent. Donc aussi la force des cordages doit être dans une relation nécessaire avec la résistance que les mâts opposent à une flexion quelconque.

Dans tous les cas, il faut déterminer les rapports des dimensions des mâtures, suivant la nature des bois qu'on emploie; et l'on voit que les données dont nous avons parlé jusqu'ici, sont propres à répandre quelque jour sur ce beau problème de mécanique.

(*) Dans le port où je dois me rendre incessamment, j'espère pouvoir déterminer les élémens des forces virtuelles des bois les meilleurs, tels que nous les employons dans nos constructions: car, à Corcyre, je n'ai pu, comme on voit, disposer que de bois qui la plupart avaient perdu par l'âge une partie de leurs forces. Si la Classe prend quelque intérêt à ces nouvelles recherches, j'aurai l'honneur de lui en communiquer les résultats.

Avant

Digitized by Google

Avant de passer à d'autres recherches, reprenons un moment la formule

Problème inverse. Déterminer la charge qui devra produire une descension donnée.

$$y = H - \delta' + \delta'' + (\delta' - \tfrac{3}{2}\delta'')\, m + \frac{\delta''}{2}\, m^2 \qquad (1)$$

qui, par le nombre d'unités m de la charge, fait connaître la descension y du milieu de la règle. La même équation peut également faire connaître la charge nécessaire pour plier, d'une quantité donnée, la règle qu'on considère. Il suffit pour cela de résoudre cette équation par rapport à m, ce qui donne :

$$m = \frac{3}{2} - \frac{\delta'}{\delta''} \pm \frac{1}{\delta''} \sqrt{[2\delta''(y - H + \delta' - \delta'') + (\delta' - \tfrac{3}{2}\delta'')^2]}.$$

Si maintenant, pour plus de facilité, nous faisons

$$\frac{3}{2} - \frac{\delta'}{\delta''} = A, \quad \text{et} \quad \frac{\delta''}{2}(-H + \delta' - \delta'') + (\delta' - \tfrac{3}{2}\delta'')^2 = B^2,$$

nous aurons

$$m = A + \frac{1}{\delta''} \sqrt{(2\delta'' y + B^2)}.$$

Équation numérique qui donnera le nombre des poids m en fonction de y, par une simple extraction de racine carrée, ou plus rapidement encore, en employant les logarithmes.

Observons, en passant, que ces formules sont susceptibles de se simplifier sensiblement, lorsque l'unité des poids, c'est-à-dire, la charge qui doit être répétée m fois, est une quantité assez petite. Alors, en effet, $H = \delta'$, et l'on a

$$y = \delta'' + (\delta' - \tfrac{3}{2}\delta'')\, m + \frac{\delta''}{2}\, m^2,$$

et

$$m = \tfrac{3}{2} - \frac{\delta'}{\delta''} \pm \frac{1}{\delta''} \sqrt{[2\delta''(y - \delta'') + (\delta' - \tfrac{3}{2}\delta'')^2]}.$$

Méthode d'approximation.

On peut trouver m en fonction de y par approximation, et d'une

Digitized by Google

manière fort abrégée. Pour cela, reprenons l'équation primitive

$$(1) \quad y = H + \overline{m-1}\,.\,\delta' + \frac{m-1}{1}\,.\,\frac{m-2}{2}\,.\,\delta''$$

Soit

$$y = H + \overline{\mu-1}\,.\,\delta''.$$

Retranchant membre à membre ces deux équations, on obtient immédiatement

$$\mu\delta' = m\delta' + \frac{m-1}{1}\,.\,\frac{m-2}{2}\,\delta''.$$

Si m n'est pas inférieur à 2, auquel cas δ'' serait tout-à-fait négligeable; le terme $\frac{m-1}{1}\,.\,\frac{m-2}{2}\,.\,\delta''$ est nécessairement positif : donc $\mu > m$. Or, l'équation que nous venons de trouver donne

$$\mu - m = \frac{m-1}{1}\,.\,\frac{m-2}{2}\,.\,\frac{\delta''}{\delta'};$$

donc enfin

$$\mu - m < \frac{\mu-1}{1}\,.\,\frac{\mu-2}{2}\,.\,\frac{\delta''}{\delta'}.$$

Ainsi, la différence du vrai nombre m au nombre μ est toujours plus petite que le terme connu $\frac{\mu-1}{1}\,.\,\frac{\mu-2}{2}\,.\,\frac{\delta''}{\delta'}$: on pourra donc toujours juger du degré d'approximation. Ordinairement, une seule intercalation suffira pour obtenir à très-peu-près le véritable poids, s'il ne s'agit pas de flexions qui soient considérables.

Exemple.

Demandons-nous quel poids peut plier de $0,^{m}04$ la règle de chêne que nous avons soumise aux expériences précédentes? L'équation de la flexion de cette règle est

Digitized by Google

$$y = 0{,}0056 . m + \frac{m-1}{1} . \frac{m-2}{2} . 0{,}0001.$$

Je néglige la différence seconde 0^m0001, et j'ai seulement

$$y = 0{,}0056 . \mu ;$$

mais par hypothèse, $y = 0{,}^m04$: donc j'ai

$$\mu = \frac{0{,}04}{0{,}0056} = 7{,}143 ;$$

quantité qui, multipliée par quatre kilogrammes, unité de la charge, donne $28{,}^k572$ pour charge approchée : mais $\mu = 7{,}143$ donne

$$\frac{\mu-1}{1} . \frac{\mu-2}{2} . 0{,}0001 = \frac{6{,}143}{1} . \frac{5{,}143}{2} . 0{,}0001 = 0{,}0015793653.$$

ou 0,0016 qui, multipliés par 4, donneraient à-peu-près $0{,}^k00632$. Il suffit donc de retrancher $\frac{0{,}0016}{0{,}0056}$ pour avoir la limite de la valeur de m. Or, $\frac{16}{56} = 0{,}286$; ainsi le poids $4 \times 7{,}^k143$ est juste à moins de 4×0^k286.

Prenons le milieu $7{,}143 - \frac{0{,}286}{2} = 7$, et vérifions cette nouvelle valeur de m, nous aurons

$$0{,}04 = 7 . 0{,}0056 + \frac{6.5}{2} . 0{,}0001 = 0{,}0407 ;$$

valeur exacte à moins d'un millimètre près, quoiqu'elle soit donnée par une charge considérable relativement à la force de la règle. Cette première approximation suffirait dans la précision qu'on donne ordinairement aux travaux des arts; mais s'il s'agissait de recherches très-rigoureuses, une seconde approximation, aussi facile que la première, donnerait un résultat qui surpasserait l'exactitude des observations ordinaires.

Digitized by Google

§. II.

De la Flexibilité des Bois en fonction des charges uniformément réparties.

Recherches du rapport entre les charges accumulées et réparties uniformément, pour produire une même descension.

Au lieu de faire plier un prisme de bois sous la charge d'un poids unique, placé sur le milieu du prisme, si l'on divise ce poids en parties égales, et qu'on les répartisse uniformément sur toute la longueur de ce prisme, alors la courbe formée par l'axe ou par les arêtes du prisme plié n'est plus la même; et la flèche de cette courbe, ou la descension du point milieu, varie pareillement. J'ai cherché, par des expériences multipliées, à voir quel est le rapport entre les descensions produites par des poids accumulés ou répartis. Voici les résultats auxquels je suis parvenu. *(Voyez le tableau I.)*

(Tableau I.)

Limites de ce rapport.

En chargeant successivement les mêmes prismes de chêne, de cyprès, de hêtre et de sapin, par des poids accumulés ou répartis, j'ai reconnu que, si la somme des poids accumulés était à la somme des poids répartis, comme trois est à cinq, l'effet total était moindre sous l'effort de la première charge que sous l'effort de la seconde, c'est-à-dire, que la descension du point milieu sous la charge d'un poids unique, comme trois, est moindre que la descension de ce point sous la charge de poids répartis, faisant en somme cinq.

Au contraire, si le rapport de la charge accumulée à la charge uniformément répartie est celui de deux à trois, la descension produite par la charge accumulée devient plus grande que l'autre.

Il est constant pour toutes les espèces de bois.

Donc le rapport des descensions dans ces deux manières de charger les bois, se trouve entre $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{5}$, c'est-à-dire, entre $\frac{20}{30}$ et $\frac{18}{30}$. On peut donc le supposer égal à $\frac{19}{30}$, sans craindre d'errer d'un trentième.

Mais, dans les appréciations approximatives, il sera beaucoup plus simple et suffisamment exact de supposer ce rapport égal à $\frac{2}{3}$, si l'on opère par les fractions, et de le supposer égal à 0,6, si l'on opère au moyen des décimales : dans ce dernier cas, $0{,}6 = \frac{3}{5}$.

Digitized by Google

Combien les charges accumulées ou réparties agissent différemment pour produire la simple flexion ou la rupture.

On admet généralement que le rapport des charges uniques aux charges réparties, dans l'effet qu'elles ont pour rompre les mêmes pièces, est celui de un à deux ou de quinze à trente. La diversité qu'on remarque entre ce résultat et celui que nous venons d'obtenir, montre de plus en plus combien diffèrent les forces de flexion et celles de rupture. Lorsque nous considérerons ces dernières, nous chercherons à montrer comment leurs résultats naissent des efforts accumulés des premières forces; et comment les lois auxquelles sont soumises et les unes et les autres, appartiennent à la même théorie, et sont le résultat des mêmes équations.

Le poids des pièces prismatiques et cylindriques, est une charge uniformément répartie.

Une pièce soutenue par deux appuis placés à ses extrémités, et abandonnée à son poids naturel, quand elle est prismatique ou cylindrique, est évidemment sollicitée à la flexion par des poids uniformément répartis; ainsi la flexion, dans ce cas, est égale aux 19/30èmes de celle qui serait produite par le poids total de la pièce, concentré au milieu entre les appuis. Nous avons eu souvent à vérifier ce résultat par l'expérience, et toujours elle l'a parfaitement confirmé.

Ce qui fournit un moyen simple de faire entrer le poids des pièces en considération dans toutes les expériences.

Toutes les fois qu'on cherchera les flèches de l'arc produit par la flexion des bois, on pourra donc, à volonté, supposer les charges uniques, uniformément réparties, en multipliant par 19/30èmes le poids total; et réciproquement, en divisant la somme des poids par ce même nombre, on pourra supposer que des poids uniformément répartis soient concentrés en un poids unique.

Application à la pesée des bois d'un grand volume.

De là résulte un moyen assez singulier, de peser les bois d'une épaisseur constante; et ce moyen peut être vraiment utile dans plusieurs circonstances où l'on n'aurait aucun instrument propre à peser. On mettra la pièce qu'on veut peser sur deux appuis de même hauteur; on mesurera la flèche de l'arc pris par la pièce dans cette position, en vertu de sa seule pesanteur; ensuite on chargera cette pièce par un poids connu quelconque, placé au milieu entre les appuis; on mesurera l'augmentation de la flèche, ou la descension du point milieu. Divisant

Digitized by Google

§. II.

De la Flexibilité des Bois en fonction des charges uniformément réparties.

Recherches du rapport entre les charges accumulées et réparties uniformément, pour produire une même descension.

Au lieu de faire plier un prisme de bois sous la charge d'un poids unique, placé sur le milieu du prisme, si l'on divise ce poids en parties égales, et qu'on les répartisse uniformément sur toute la longueur de ce prisme, alors la courbe formée par l'axe ou par les arêtes du prisme plié n'est plus la même; et la flèche de cette courbe, ou la descension du point milieu, varie pareillement. J'ai cherché, par des expériences multipliées, à voir quel est le rapport entre les descensions produites par des poids accumulés ou répartis. Voici les résultats auxquels je suis parvenu. *(Voyez le tableau I.)*

(Tableau I.)

Limites de ce rapport.

En chargeant successivement les mêmes prismes de chêne, de cyprès, de hêtre et de sapin, par des poids accumulés ou répartis, j'ai reconnu que, si la somme des poids accumulés était à la somme des poids répartis, comme trois est à cinq, l'effet total était moindre sous l'effort de la première charge que sous l'effort de la seconde, c'est-à-dire, que la descension du point milieu sous la charge d'un poids unique, comme trois, est moindre que la descension de ce point sous la charge de poids répartis, faisant en somme cinq.

Au contraire, si le rapport de la charge accumulée à la charge uniformément répartie est celui de deux à trois, la descension produite par la charge accumulée devient plus grande que l'autre.

Il est constant pour toutes les espèces de bois.

Donc le rapport des descensions dans ces deux manières de charger les bois, se trouve entre $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{5}$, c'est-à-dire, entre $\frac{20}{30}$ et $\frac{18}{30}$. On peut donc le supposer égal à $\frac{19}{30}$, sans craindre d'errer d'un trentième.

Mais, dans les appréciations approximatives, il sera beaucoup plus simple et suffisamment exact de supposer ce rapport égal à $\frac{2}{3}$, si l'on opère par les fractions, et de le supposer égal à 0,6, si l'on opère au moyen des décimales : dans ce dernier cas, $0,6 = \frac{3}{5}$.

Digitized by Google

§. III.

De la Flexibilité des Bois en fonction de leur épaisseur.

Observations et Définitions préliminaires.

DANS le premier et le second paragraphe, nous avons considéré isolément chaque pièce soumise à nos expériences, et nous n'avons fait varier que les charges accumulées ou réparties uniformément. Nous allons supposer que les épaisseurs des bois varient. Dans le paragraphe suivant, ce seront au contraire les longueurs que nous rendrons variables; et de la sorte, nous aurons déterminé tout ce qui regarde la flexion des bois exprimée en fonction de leurs dimensions.

Nous entendons ici par épaisseur, la petite dimension placée dans le sens de la flexion, et par longueur, la grande dimension pareillement placée dans ce plan; ainsi, la largeur est la dimension perpendiculaire au plan de la flexion. Il est évident que, toutes choses égales d'ailleurs, la résistance que les bois opposent à la flexion est proportionnelle à leur largeur; car on peut toujours les supposer divisées en tranches parallèles au plan suivant lequel s'effectue la flexion, et égales entre elles; alors tout étant semblable dans ces différentes tranches, chacune d'elles peut être regardée comme une unité, et la somme des résistances qu'elles présentent est égale à la résistance de l'une d'elles, multipliée par le nombre des tranches, nombre proportionnel à la largeur de la pièce.

Présentons maintenant le résultat de nos expériences faites sur quatre règles différentes : nous avons toujours maintenu la distance des appuis égale à deux mètres.

Règles pliées tour à tour sur le plat et sur le cant.

Les règles ayant une largeur différente de leur épaisseur, nous les avons pliées, tantôt dans le sens de la petite dimension (sur le plat), tantôt dans le sens de la plus forte dimension (sur le *cant*), et nous avons comparé les flexions produites par une même charge dans ces deux positions différentes.

Digitized by Google

1.re RÈGLE. = *Sapin.* = Dimensions latérales... 0,m02 ; 0,m01.

Charge constante..... 5 hectogrammes.

Flexion { sur le plat / sur le cant } Descension { 0,m0470, / 0, 0112 ;

Rapport des descensions... 470 : 112 = 4, 19.

Rapport du carré des dimensions latérales. 4.

2.e RÈGLE. = *Sapin.* = Dimensions latérales. 0,m03 ; 0,m01 foible.

Charge constante..... 1 kilogramme.

Flexion { sur le plat / sur le cant } Descension { 0,m0801, / 0, 007 ;

Rapport des descensions....801 : 7 = 11, 44.

Rapport du carré des dimensions latérales >9.

3.e RÈGLE. = *Sapin.* = Dimensions latérales... 0,m03 ; 0,m02.

CHARGES CONSTANTES.		2kil.	4.	6.	8.	10.
Descensions en millimètres.	sur le plat...	16.	32.	48.	64.	80.
	sur le cant..	6, 8.	14.	21, 3.	28, 5.	37, 6.

Rapport des descensions....., 80 : 37,6 = 2,13.

Rapport du carré des dimensions latérales. 9 : 4 = 2,25.

4.e RÈGLE. = *Sapin.* = Dimensions latérales.. 0,m05 ; 0,m02.

Charge constante..... 10 kilogrammes.

Flexion { sur le plat / sur le cant } Descension { 0,m030 ou 0,031. / 0, 005.

Rapport des descensions..... 30 : 5 = 6 à 6,2.

Rapport du carré des dimensions ...25 : 4 = 6,25.

THÉORÈME.

Digitized by Google

THÉORÈME.

De ces diverses expériences, il résulte que, à quelques variations près, dont nous ferons connaître les causes, *la résistance à la flexion d'une pièce quelconque pliée tour à tour sur le plat et sur le cant, est proportionnelle au carré des deux dimensions latérales.*

Anomalies des expériences précédentes expliquées.

Il est nécessaire d'expliquer les petites anomalies qui se font remarquer dans les résultats précédens. On conçoit d'abord que les plus légères inégalités dans l'écarrissage des pièces, sur quelques-unes de leurs faces, doivent produire des différences beaucoup plus sensibles dans les rapports des flèches ou descensions, puisque ces dernières quantités sont dans le rapport des carrés des dimensions latérales. Ensuite, lorsque les bois ne sont pas parfaitement uniformes dans tous les sens, c'est encore une source d'irrégularités, et l'on conçoit qu'il est très-difficile de trouver des pièces où le fil du bois soit absolument le même dans toute la longueur et sur toutes les faces.

On conçoit d'ailleurs que les bois résistent différemment suivant que leurs couches sont dans une direction verticale ou horizontale ; cependant je dois dire que cette différence apportée par la direction des fibres quoique sensible, est beaucoup moins considérable qu'on ne le croit communément.

On voit donc que les résultats obtenus différant peu de la raison des carrés des dimensions latérales, et différant les uns en plus, les autres en moins, de cette limite commune, on doit poser en principe que ce rapport est celui de la résistance à la flexion offerte par les deux dimensions latérales d'une même pièce.

Actuellement, ramenons cette loi à celle qui doit avoir lieu, lorsque deux pièces ayant même largeur, ne diffèrent plus que par leur épaisseur.

Comment ces expériences font connaître généralement le rapport

Soient A et B les dimensions latérales d'une première pièce. Si B était égal à l'unité quand le côté A est dans le plan de la flexion, c'est-à-dire, quand c'est le côté A qui résiste à la flexion, on pourrait représenter

Digitized by Google

des charges aux épaisseurs pour la même descension.

la résistance à la flexion dans ce sens par mA^2, m étant une constante invariable pour la même pièce de bois, et marquant la force de l'essence du bois qui particularise la pièce. Mais si B était égal à deux unités, sans que la pièce eût besoin d'un plus grand poids pour se plier de la même quantité, ce rapport deviendrait $\frac{mA^2}{2}$; car la résistance doit croître réciproquement comme la largeur perpendiculaire au plan de la flexion, quand un poids constant produit toujours le même abaissement.

Concevons, en effet, la pièce soumise à la flexion, divisée en tranches verticales ayant pour largeur commune l'unité, elles supporteront toutes une égale portion du poids total, ainsi que nous l'avons déjà dit au commencement de ce paragraphe. Mais toutes les tranches étant pliées également, aucune d'elles ne doit tendre à élever ni à abaisser celles qui la touchent : donc ces parties étant sans action et sans réaction intérieure l'une sur l'autre, on peut par la pensée les supposer isolées ou réunies, sans rien changer dans leur état d'équilibre.

Donc si la pièce totale porte le poids de mA^2, la force de flexion de la tranche prise pour unité sera d'autant plus petite que la pièce est originairement plus large, et la force de cette tranche sera représentée par $\frac{mA^2}{B}$.

De même, en pliant le prisme de bois sur l'autre sens, on aura $\frac{mB^2}{A}$ pour valeur de la flèche qui représente la flexion : donc enfin le rapport des résistances à la flexion dans le premier et dans le second cas, est

$$\frac{\frac{mA^2}{B}}{\frac{mB^2}{A}} = \frac{A^3}{B^3};$$

d'où résulte le théorème suivant :

Digitized by Google

THÉORÈME GÉNÉRAL.

La résistance à la flexion est proportionnelle au cube des épaisseurs, et la flexibilité des bois est par conséquent réciproquement proportionnelle au cube de ces mêmes épaisseurs (mesurées dans le plan de la flexion).

Cette vérité d'expériences peut être rigoureusement démontrée par les lois de la mécanique, et c'est ce que nous allons tâcher de faire.

Démonstration tirée des lois de la mécanique. *(Fig. 2, pl. I.)*

Examinons ce qui se passe lorsqu'on plie, suivant un arc quelconque, une pièce de bois prismatique. J'ai fait plier des pièces sur lesquelles j'avais marqué des traits rectilignes Cc, Dd, Ff, aux points où l'angle formé par deux droites et les arêtes de la pièce aurait dû le plus varier par l'effet de la flexion; cependant je n'ai jamais pu remarquer que cet angle s'altérât d'une manière sensible. Je poserai donc d'abord en principe que, *sous toutes les flexions possibles, les fibres ligneuses ne glissent longitudinalement les unes sur les autres que de quantités inappréciables.*

Mais entre les droites égales Aa, Cc, Dd.....Bb, à-la-fois normales aux arêtes AB et ab, la courbe intérieure est la plus courte; il faut, par conséquent, ou que les fibres intérieures se soient raccourcies, ou que les fibres extérieures se soient alongées; ou plutôt l'un et l'autre changement ont dû s'opérer à-la-fois, comme cela a lieu dans la flexion de tous les corps élastiques.

De la fibre invariable.

On doit donc concevoir entre les deux lignes extrêmes AB, ab, une ligne ll par-tout normale à Aa, Bb, Cc....., et dont la longueur n'aura ni augmenté ni diminué : j'appellerai cette ligne la *fibre invariable.*

Maintenant, la pièce prismatique étant forcée de prendre une certaine courbure par l'effet d'un poids P qui tend à faire descendre son milieu, tandis que ses extrémités A, B sont soutenues par deux appuis, considérons l'état d'équilibre de ce système.

Les fibres ligneuses résistent à l'alongement, elles résistent au raccourcissement; mais ces résistances ne sont point les mêmes pour des

Digitized by Google

bois différens : il y a plus, pour une même pièce $AabB$, ces forces ne sont pas égales entre elles. Soit donc $p\lambda\Phi$ la résistance que les fibres extérieures opposent à un alongement déterminé $p\lambda$ pour une longueur primitive donnée λ, et $p\lambda\varphi$ la résistance que les fibres intérieures opposent au même raccourcissement $p\lambda$, pour la même longueur λ.

Si nous concevons la suite des droites Aa, Cc, Dd ..... Bb, normales à l'arête extérieure AB; elles seront aussi normales à l'arête intérieure ab, et ne cesseront pas de l'être, quelque flexion qu'on donne à la pièce $AabB$, ainsi que nous l'avons vérifié par l'expérience.

Donc l'alongement ou le raccourcissement des fibres ligneuses devra se faire dans chaque tranche $AacC$, $CcdD$, $DdeE$, &c....., comprise entre deux normales quelconques : donc aussi les forces qui résultent de ces variations partielles, devront se faire équilibre, quelle que soit l'étendue de l'élément $AacC$, ou $CcdD$, ou &c.... compris entre deux plans normaux aux arêtes de la pièce $AabB$.

Considérons donc l'élément infiniment petit $Fff'F'$, et faisons $ff' = d\lambda$ (*), R étant le rayon de courbure de la fibre invariable ll en ff'. Soit encore $ff = e$, $fF = E$; alors $e + E$ sera l'épaisseur totale de la pièce $AabB$.

Mais, d'après ces dénominations, $\frac{d\lambda}{R}$ est l'angle formé par les normales $Ff = F'f'$; en le multipliant par $R + E$, on aura l'arc FF', tandis qu'en le multipliant par $R - e$, on aura l'arc ff'.

Ainsi, $$FF' = \frac{d\lambda}{R}(R + E) \quad \text{et} \quad ff' = \frac{d\lambda}{R}(R - e).$$

Or, l'élément de la fibre invariable est, par hypothèse, égal à $d\lambda$: donc l'alongement de la fibre extérieure $= E \cdot \frac{d\lambda}{R}$, et le raccourcissement de la fibre intérieure $= e\frac{d\lambda}{R}$.

(*) $\lambda = ll$ (*fig. 2*), longueur de la fibre invariable.

Digitized by Google

Rappelons-nous actuellement que $p\lambda.\Phi$ représente la force nécessaire à l'alongement $p\lambda$ de λ, tandis que $p\lambda.\varphi$ représente la force nécessaire au raccourcissement $p\lambda$ sur la même longueur λ : donc, dans l'élément que nous considérons, les forces mêmes nécessaires pour produire cet alongement ou ce raccourcissement seront

$$E\frac{d\lambda}{R}.\Phi \quad \text{et} \quad e\frac{d\lambda}{R}.\varphi.$$

Maintenant, puisque la longueur de la fibre *lff'l (fig. 2)* est invariable, il faut que la résultante de toutes les forces qui agissent autour de chacun de ses points soit nulle (afin que la force tangentielle soit égale à zéro) : par conséquent, la somme des momens des actions exercées dans le sens de cette fibre doit pareillement être égale à zéro. Regardons donc ff' (prolongée par sa tangente) comme un axe des momens, il faudra que les tensions et les compressions de toutes les autres fibres se fassent équilibre autour de cette ligne, ou que la somme des momens de toutes les forces, par rapport à ce même axe, soit nulle.

Pour cela, considérons la fibre d'une épaisseur dE', placée à la distance E' en dehors de la fibre invariable, l'alongement de cette fibre sera $E'\frac{d\lambda}{R}$, et la force nécessaire pour le produire sera

$$E'\frac{d\lambda}{R}.\Phi \times \text{l'épaisseur de la fibre,}$$

c'est-à-dire,

$$= \Phi\frac{d\lambda}{R}.E'dE'.$$

De même, la force nécessaire pour produire le raccourcissement d'une fibre intérieure de' à la distance e' de la fibre invariable, est

$$= \Phi\frac{d\lambda}{R}.e'de'.$$

Multipliant ces deux forces respectivement par leur distance à l'axe ff'

Digitized by Google

c'est-à-dire, par E' et e'; on a donc pour momens des tensions et des compressions

$$\Phi \frac{d\lambda}{R} . E'^2 dE' \quad \text{et} \quad \varphi \frac{d\lambda}{R} . e'^2 de';$$

intégrant ces deux différentielles depuis zéro jusqu'à E pour la première, et jusqu'à e pour la seconde, on a pour sommes de ces deux espèces de momens,

$$\tfrac{1}{3} \Phi \frac{d\lambda}{R} . E^3, \quad \tfrac{1}{3} \varphi \frac{d\lambda}{R} . e^3;$$

or, dans l'état d'équilibre, ces deux sommes sont égales.

THÉORÈME.

Donc enfin $\frac{\Phi}{\varphi} = \frac{e^3}{E^3}$. D'où résulte ce principe, que *pour chaque élément de la pièce prismatique* AabB, *les distances* E, e, *de la fibre invariable aux fibres extrêmes* AB, ab, *sont dans un rapport constant.* D'où il suit que, quand le bois est d'un fil parfaitement suivi, *une certaine fibre toujours la même ne varie jamais de longueur, quelque courbure qu'on donne à la pièce :* c'est cette fibre que nous appelons *la fibre invariable.*

De plus, lorsque la flexion a lieu, toutes les fibres en dedans de la fibre invariable sont comprimées, tandis que toutes les autres sont dilatées.

Enfin les forces de tension ou de compression nécessaires pour alonger ou raccourcir d'une même quantité des fibres égales, sont entre elles comme les cubes des épaisseurs de la pièce, mesurées successivement en dehors et en dedans, à partir de la fibre invariable.

Comment, pour chaque espèce de bois, on pourra déterminer les résistances comparées des fibres, relativement à l'alongement et au raccourcissement.

Par des expériences fort ingénieuses, mais que je n'ai pas eu l'occasion de répéter, l'un des hommes qui, par d'heureuses applications de la science, ont rendu le plus de services aux arts, *Duhamel,* a démontré l'existence de la fibre invariable, en rendant sensible l'effet qui résulte de l'alongement et du raccourcissement des fibres intérieures ou extérieures par rapport à l'axe d'une pièce pliée : lorsqu'on aura déterminé

Digitized by Google

par l'expérience la position précise de la fibre invariable, dans les bois de chaque espèce, on voit par ce que nous venons de dire précédemment, que rien ne sera plus facile que d'en conclure le rapport des forces nécessaires pour produire un alongement ou un raccourcissement déterminé des fibres d'une même pièce de bois : les expériences qui devront servir de base à ce calcul, offrent à faire une des plus belles recherches que puissent présenter les questions relatives à la force des bois.

Remarquons que la somme des momens qui mesurent l'effort des fibres comprimées ou tendues par la flexion, pour se remettre dans leur état naturel ; cette somme, dis-je, est

$$\tfrac{1}{3}(E^3\,\Phi + e^3\,\Phi)\,\frac{d\lambda}{R}.$$

Or, pour la même pièce prismatique, E, Φ, e, Φ, sont constantes : donc cette somme est proportionnelle à $\frac{d\lambda}{R}$, c'est-à-dire, à l'angle formé par les normales consécutives Ff, $F'f'$.

Ainsi *la force des bois pour se redresser est, dans chaque élément, proportionnelle à l'angle de leur flexion.* Les bois ont donc les propriétés des corps parfaitement élastiques, par cela seul que leurs fibres résistent à l'alongement et au raccourcissement d'une manière constante, mais pourtant indépendante.

Dans les flexions peu considérables, les bois jouissent des propriétés des corps parfaitement élastiques.

Ces développemens sont un peu longs sans doute ; néanmoins j'ai pensé qu'on aimerait peut-être à voir les propriétés de l'élasticité des bois, déduites d'une manière rigoureuse, des plus simples faits d'expérience : peut-être aussi que cette exposition détaillée de la manière dont les forces diverses agissent et se contrebalancent dans la flexion des bois, répandra quelque jour sur les mêmes actions dans la flexion des autres corps élastiques. Du reste, c'est à *Jacques Bernoulli* qu'appartient l'idée première de ces considérations.

Maintenant, nous voyons pourquoi *les poids nécessaires pour plier des*

Digitized by Google

pièces différentes, suivant un même arc, sont entre eux, toutes choses égales d'ailleurs, comme les cubes des épaisseurs.

C'est que la courbure étant la même dans deux pièces différentes, les forces normales qui résultent de tensions proportionnelles, sont aussi proportionnelles : or, les momens de ces tensions sont entre eux comme les cubes des épaisseurs, lorsque les $d\lambda$ et les R sont les mêmes, c'est-à-dire, pour une règle de même longueur, pliée suivant la même courbure.

La marche suivie jusqu'ici s'applique aux pièces prismatiques et cylindriques d'une forme quelconque.

La marche que nous venons de suivre n'est pas seulement propre à faire connaître ce qui se passe dans la flexion des parallélipipèdes. On peut supposer que la pièce à plier soit un prisme quelconque, et même un cylindre : la même méthode nous conduirait encore au but.

Seulement alors, la fibre invariable, au lieu d'être plane et horizontale, pourra prendre elle-même la forme d'un prisme ou d'un cylindre.

Conséquences qui en résultent.

Puisque la résistance croît comme le cube des épaisseurs, si, le volume restant le même, le diamètre des corps augmente, comme cela a lieu pour les corps creux, alors la force élastique des bois, c'est-à-dire, leur résistance à la flexion, augmente considérablement, et par suite, comme nous le verrons plus tard, leur résistance à la rupture augmente aussi.

Ce résultat explique un grand nombre de phénomènes, et c'est à *Galilée* qu'on doit cette belle explication. Nous voyons pourquoi, dans la nature, tous les corps qui doivent supporter de grands efforts, y céder et reprendre leur figure primitive, sont faits en forme de tuyaux : tels sont les os des quadrupèdes, les plumes des volatiles, les arêtes des poissons, &c.

§. IV.

Digitized by Google

§. IV.

De la Flexibilité des Bois en fonction de la distance des appuis.

Après avoir fait varier tour à tour, pour chaque espèce de bois, la largeur et l'épaisseur des pièces soumises à la flexion, la recherche qui se présente le plus naturellement à faire est celle où la longueur des pièces devient l'élément variable. Nous avons aussi dirigé vers ce but une partie de nos expériences.

Moyen le plus simple.

Le moyen le plus simple aurait été de prendre des pièces prismatiques, parfaitement homogènes dans toute leur longueur, d'en diminuer successivement cette dimension d'une quantité constante, et de déterminer à chaque fois la variation de la résistance à la flexion, produite par des charges toujours les mêmes ; on aurait par-là reconnu, dès le premier abord, comment les résistances à la flexion sont fonctions de la distance des appuis.

Moyen que nous avons suivi.

La marche que j'ai cru devoir suivre n'est pas tout-à-fait aussi directe. Comme je ne voulais pas couper les pièces que je soumettais à mes expériences, plus je rapprochais les points d'appuis, plus j'augmentais la partie des pièces placées en dehors de ces mêmes appuis ; c'était par conséquent un contre-poids que j'établissais, et dont l'effet tendait d'autant plus à contrebalancer la charge destinée à produire la flexion, charge appliquée au milieu de la règle (à égale distance entre les appuis).

Mais, comme on peut le voir par les observations qui accompagnent le tableau II qui appartient à ce paragraphe, nous avons eu soin de corriger les anomalies qui pouvaient provenir de cette source d'irrégularités, et alors nous avons vu se manifester clairement la loi des résistances à la flexion, en fonction de la distance des appuis : cette loi s'exprime par le théorème qui suit.

Digitized by Google

THÉORÈME.

Lorsque la largeur d'une pièce et son épaisseur sont constantes, la descension sous un poids donné est directement proportionnelle au cube de la distance des appuis. (Remarquons qu'il s'agit toujours de flexions qui ne sont pas extrêmement considérables.)

Après avoir reconnu cette vérité d'expérience, il nous serait facile de la démontrer par les principes de la mécanique rationnelle ; mais comme cette démonstration, qui ne serait qu'une simple application de la théorie du levier, ne présente aucune difficulté, nous croyons pouvoir nous dispenser de la donner ici.

Des pièces semblables chargées proportionnellement à leur volume.

Nous pouvons maintenant résoudre un problème dont la solution est susceptible d'avoir de nombreuses applications dans les arts. Proposons-nous de déterminer le rapport des *descensions* ou des flèches de courbure de deux pièces prismatiques semblables, c'est-à-dire, ayant leurs dimensions homologues proportionnelles : ces corps, d'ailleurs, étant chargés de poids proportionnels à leur volume, et la distance des appuis étant proportionnelle à la longueur des pièces dont elle ne doit différer que très-peu. Soit m le rapport des dimensions homologues, Y, Υ les descensions cherchées.

Or, d'après le théorème que nous venons d'énoncer, l'épaisseur et la largeur des pièces étant pour un moment supposées constantes, les descensions produites par la même charge, sont directement proportionnelles aux cubes des distances des appuis. Sous ce premier point de vue

$$\frac{Y'}{\Upsilon'} = m^3.$$

Mais, toutes choses égales d'ailleurs, les descensions sont directement proportionnelles aux charges (§. I.), et le rapport des charges égal à celui des volumes, est m^3 : donc il faut composer ce rapport avec le précédent, ce qui donne, en ayant égard à la distance des

Digitized by Google

appuis et à la charge seulement,

$$\frac{Y''}{\Upsilon''} = m^6.$$

Considérons maintenant les forces qui tendent à diminuer ce rapport. Dans le §. III, nous avons fait voir que, toutes choses égales d'ailleurs, les descensions sont réciproquement proportionnelles aux simples largeurs et au cube des épaisseurs : donc, sous ce dernier point de vue, les descensions des deux pièces que nous considérons sont réciproquement proportionnelles au rapport m multiplié par son cube m^3, ce qui donnerait

$$\frac{Y_{,}}{\Upsilon_{,}} = \frac{1}{m^4}.$$

Prenant donc le rapport composé des raisons inverses et des raisons directes, nous verrons qu'en ayant égard à tous les élémens qui peuvent différencier les descensions de deux pièces semblables, ces descensions ont pour rapport

$$\frac{Y}{\Upsilon} = \frac{m^6}{m^4} = m^2.$$

Donc le rapport des descensions de deux pièces semblables soutenues librement à leurs extrémités, et chargées par des poids proportionnels à leur volume, ce rapport, dis-je, est celui du carré des dimensions homologues.

Dans le calcul précédent nous n'avons pas fait entrer en considération le poids des pièces ; mais l'action de ce poids et les changemens qui en résultent dans la grandeur absolue des descensions n'altèrent en rien le rapport de ces descensions.

En effet, dans le §. II, nous avons fait voir qu'on pouvait alternativement regarder les charges accumulées au milieu comme des charges uniformément réparties, en les multipliant par $\frac{30}{19}$; ou regarder les charges uniformément réparties comme accumulées au milieu de la pièce, en les multipliant par $\frac{19}{30}$: de là résulte cet autre théorème.

Digitized by Google

Théorème.

Les descensions de deux pièces semblables abandonnées à leur propre poids; ou chargées dans toute leur étendue proportionnellement à ces poids, comme les pièces semblables chargées à leur milieu d'un seul poids proportionnel à leur poids propre; ces descensions, dis-je, *sont directement proportionnelles aux carrés des dimensions homologues des deux pièces.*

Rappelons-nous maintenant que le rapport des distances des appuis, est aussi celui des dimensions homologues. En représentant donc par D et Δ ces deux distances, nous aurons $\frac{D}{\Delta} = m$, et par conséquent $\frac{D^2}{\Delta^2} = m^2$; mais le rapport des descensions donne $\frac{Y}{\Upsilon} = m^2$: donc aussi $\frac{D^2}{Y} = \frac{\Delta^2}{\Upsilon}$. Ainsi, *pour tous les bois d'une même nature et semblables de figure, non chargés, ou chargés proportionnellement à leur poids, le carré de la distance des appuis est à la descension dans un rapport constant.*

Or, ainsi que nous l'avons vu §. I, pour les flexions très-petites, comme la distance des appuis est la corde de l'arc dont la descension totale est la flèche, huit fois le rayon de cet arc donne précisément le rapport $\frac{D^2}{Y} = \frac{\Delta^2}{\Upsilon}$: d'où résulte cette propriété remarquable de l'élasticité des bois.

Théorème.

Les bois semblables, appuyés seulement par leurs extrémités et abandonnés à leur seul poids, se courbent suivant des arcs dont le rayon au milieu est constant, quelle que soit la grandeur absolue des pièces comparées;

Et la même chose a lieu, lorsqu'on charge à-la-fois ces bois par des poids accumulés au milieu, ou bien uniformément répartis, mais toujours proportionnels au poids même des pièces.

Application aux constructions en général.

Ce résultat semble être de nature à s'appliquer très-souvent dans les constructions; car les édifices du même genre ont ordinairement tous

Digitized by Google

leurs élémens proportionnels, et les charges qui résultent du poids des parties supérieures sur les inférieures sont dans le rapport commun du poids des parties homologues. Ainsi l'arc des pièces homologues, pris en vertu de ces charges, a toujours le même rayon, quelle que soit la grandeur des édifices ou des machines que l'on compare.

A la construction des vaisseaux.

Si donc nous voulons comparer deux vaisseaux semblablement construits avec les mêmes matériaux, et dont les dimensions homologues soient proportionnelles à celles mêmes des vaisseaux, nous poserons en principe :

Que l'arc des vaisseaux d'échantillon (*) *proportionnel doit avoir un seul et même rayon de courbure à son milieu, quelle que soit la grandeur absolue des vaisseaux.*

Ici la théorie explique les résultats de l'expérience.

A présent, on doit voir clairement pourquoi les grands vaisseaux ont proportionnellement beaucoup plus d'arc que les petits navires; c'est que, toutes choses égales d'ailleurs, cet arc suit la loi des carrés des dimensions principales des navires.

Ainsi, dans le cas que nous avons cité §. I, d'un navire de 60 mètres, qui prendrait un demi-mètre d'arc; un petit navire d'un mètre de long, et semblable au premier, ne prendrait pour flèche de son arc qu'un $3600^{ème}$ de demi-mètre, au lieu d'un $60^{ème}$; ce qui ne ferait pas deux dixièmes de millimètre.

Par la suite nous tâcherons de développer ces propriétés relatives à la construction des vaisseaux; elles sont fécondes en applications à cet art.

Comparaison de la force des bois pour résister à la flexion et à la rupture, en fonction de la distance des appuis.

Je vais montrer maintenant l'analogie de la loi que nous venons de trouver avec celle qu'on a reconnue pour la force des bois au moment de leur rupture, cette force étant exprimée en fonction de la distance des appuis : la voici. Les forces nécessaires pour rompre les bois de même

(*) Nous appelons *échantillon* des vaisseaux, les dimensions latitudinales des pièces dont ils se composent : c'est la largeur et l'épaisseur des pièces.

Digitized by Google

largeur et de même épaisseur, sont réciproquement comme la distance du point d'application de la force au point d'appui, s'il est unique; et dans le cas que nous considérons de la puissance équivalente des deux appuis, ces forces sont *réciproquement* comme la distance même des appuis (*).

Soient D et Δ les distances entre les appuis qui supportent les deux pièces qu'on veut comparer, m le rapport de ces distances, de manière que $D = m\Delta$; appelant F et Φ les forces capables de produire la rupture, on aura

$$\frac{F}{\Phi} = \frac{1}{m}.$$

Au point de rupture, les forces agissantes doivent courber suivant un même arc, les pièces qui ont même épaisseur, afin de produire l'alongement ou le raccourcissement des fibres propre à la rupture: donc le rayon de courbure des arcs formés par les deux pièces, doit être le même. Or, les sinus-verses, ou les flèches, des arcs d'un même cercle sont directement comme les carrés des cordes, lorsque ces arcs sont peu considérables: donc, sous ce second point de vue, les descensions Y et Υ seront entre elles comme les carrés des distances D et Δ. Ainsi

$$\frac{Y}{\Upsilon} = \frac{D^2}{\Delta^2}.$$

Actuellement, la même force appliquée à deux règles de même largeur et de même épaisseur, produit deux descensions directement proportionnelles aux cubes D^3, Δ^3 des distances des appuis; et si l'une Φ devient m fois la seconde F, on a $\frac{1}{m} \cdot \frac{D^3}{\Delta^3}$ pour rapport des descensions. Donc quand le rapport m sera tel que les deux forces F et Φ atteignent à-la-fois la limite de la résistance des deux pièces, c'est-

(*) On remarquera que ces deux principes sont vrais seulement dans le cas où l'arc, au moment de la rupture, est assez peu considérable: comme cela a lieu pour les bois qu'on emploie dans les constructions ordinaires.

Digitized by Google

à-dire, le point de leur rupture, on aura

$$\frac{Y}{Y} = \frac{1}{m} \cdot \frac{D^3}{\Delta^3} = \frac{D^2}{\Delta^2};$$

d'où

$$\frac{1}{m} = \frac{\Delta}{D} = \frac{F}{\Phi}.$$

Donc enfin *le rapport des forces* F *et* Φ *du moment de la rupture est inverse de celui de la distance des appuis :* c'est ce que nous avions avancé.

Ce résultat nous fait voir que les bois courts ont beaucoup plus de force; mais pourtant beaucoup moins encore que de rigidité, proportionnellement aux bois plus longs.

§. V.

De la Courbe présentée par la Flexion des Bois reposant sur deux appuis.

JUSQU'ICI nous n'avons considéré que la descension, ou la flèche de la courbe donnée par la flexion des bois, et la corde de cette courbe, ou la distance des appuis : considérons maintenant la courbe elle-même.

Comparaison de cette courbe élastique avec l'hyperbole.

Après avoir attentivement examiné la forme offerte par cette courbe dans mes premières expériences, et l'avoir rapportée, par la pensée, aux formes qui me sont le plus familières, j'ai jugé qu'elle devait être sensiblement une hyperbole : je l'ai supposée telle, et voici comment j'ai vérifié cette hypothèse.

J'ai pris une règle fort large et fort mince; fort mince, afin de rendre plus facile une flexion considérable; fort large, afin de rendre moins sensibles les petites irrégularités qui pourraient naître du défaut d'un parallélisme parfait entre les deux faces de la règle.

J'ai donc choisi l'une des espèces de bois les plus flexibles, en lui donnant deux mètres de longueur et un petit excédant, un décimètre de largeur, enfin un centimètre d'épaisseur.

Digitized by Google

Courbe élastique donnée par l'expérience.

J'ai placé cette pièce prismatique sur le plat, en la faisant reposer sur deux appuis horizontaux éloignés l'un de l'autre de deux mètres, comme dans les expériences des §§. I, II et IV. J'ai fait plier la règle, en appuyant sur son milieu, de manière à présenter une descension totale ou flèche de *treize* centimètres. Cette courbure est déjà très-considérable, et j'ai voulu qu'elle fût telle pour mieux observer les anomalies qui pourraient se présenter dans les relations hypothétiques que je cherchais à confirmer ou à détruire.

Une ligne droite horizontale, servant de corde à cet arc, et ayant par conséquent deux mètres, m'a servi d'axe des ordonnées. Je l'ai divisée en vingt parties égales; par chaque point de division, j'ai tracé une abscisse (*) perpendiculaire qui allait jusqu'à la courbe. J'ai donc pu déterminer ainsi vingt-un points de cette courbe. J'avais pour plan de projection une planche parfaitement aplanie, que j'appliquais verticalement le long de la règle pliée, et sur laquelle j'ai tracé la courbe et ses coordonnées; ensuite j'ai relevé avec tout le soin possible les abscisses et les ordonnées de cette courbe, et, pour balancer les erreurs, j'ai pris la demi-somme des coordonnées symétriques à droite et à gauche de l'axe vertical : voilà donc la courbe élastique très-exactement déterminée.

Hyperbole comparatrice donnée par le calcul.

Actuellement, pour déterminer mon hyperbole comparatrice, j'ai conçu une ligne de ce genre, dont l'axe réel serait vertical et dirigé suivant la flèche de la courbe élastique, tandis que l'hyperbole même passerait par cinq points de l'élastique, savoir, 1.° le point milieu sur

(*Fig. 1, pl 1.*) (*) Ordinairement on nomme *abscisses* ou *coupées*, les parties $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$..... de l'axe duquel partent les perpendiculaires αA, βB, γC..... qui prennent alors le nom d'ordonnées. Lors donc que nous nommons $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$..... les ordonnées, il faut les concevoir rapportées parallélement à elles-mêmes, en Aa, Bb, Cc....; alors les parties Oa, Ob, Oc de l'axe vertical respectivement égales à $A\alpha$, $A\beta$, $A\gamma$, sont les véritables abscisses, et tout rentre dans l'usage ordinaire. On voit que dans le cas qui nous occupe, nous avons pris pour axe des abscisses l'axe réel de l'hyperbole : c'est pour nous conformer aux livres élémentaires où cette espèce de courbe est traitée.

la

Digitized by Google

la flèche, 2.° et 3.° les deux points d'appui, 4.° et 5.° deux autres points qui correspondent au milieu de chaque demi-corde à droite et à gauche de la flèche : de manière que les cinq ordonnées de ces points étaient

$$-1^m\,;\quad -0^m,5\,;\quad +0^m,5\,;\quad +1.$$

Voyons comment, à l'aide de ces données, nous allons trouver l'équation de l'hyperbole comparatrice.

En prenant le sommet de l'hyperbole pour origine et l'axe réel $2a$ pour axe des abscisses x; y étant l'ordonnée, cette équation se présente sous la forme

$$\frac{a^2}{b^2}\,y^2 = x^2 + 2ax.$$

Nous supposons le sommet de l'hyperbole au point milieu de l'élastique, voilà donc un premier point; et comme les deux courbes sont symétriques par rapport au même axe vertical, il suffira que la première passe encore par deux points de la seconde, à droite ou à gauche de l'axe, pour passer par deux autres semblablement placés à gauche ou à droite. Voilà les cinq points dont nous devons nous occuper.

Soient donc ξ & $\pm v$, ξ' & $\pm v'$ les coordonnées du point intermédiaire et du point extrême à droite ou à gauche, on aura d'abord $v' = 2v$ (*), et

$$\frac{a^2}{b^2}\,v^2 = \xi^2 + 2a\xi\,;\qquad \frac{4a^2}{b^2}\,v^2 = \xi'^2 + 2a\xi'.$$

Divisant membre à membre la seconde équation par la première, il vient

$$4 = \frac{\xi'^2 + 2a\xi'}{\xi^2 + 2a\xi}\,;$$

d'où

(*) En effet, les ordonnées des points extrêmes sont $\pm 1^m$, et celles des points intermédiaires que nous avons choisis, $\pm 0^m,5$.

Digitized by Google

$$4\xi^2 + 8a\xi = \xi'^2 + 2a\xi' \quad \text{et} \quad 2a = \frac{\xi'^2 - 4\xi^2}{4\xi - \xi'}.$$

Ainsi l'on voit que, par la seule connaissance de ξ et ξ', on déterminera de suite l'axe réel de l'hyperbole.

Ensuite, en faisant dans l'équation

$$\frac{a^2}{b^2} v'^2 = \xi'^2 + 2a\xi',$$

$v' = 1^m$ sa valeur, on aura

$$b^2 = \frac{a^2}{\xi'^2 + 2a\xi'}.$$

Les axes de l'hyperbole connus, cette courbe est complétement déterminée.

On rendra donc l'équation

$$\frac{a^2}{b^2} y^2 = x^2 + 2ax,$$

une équation purement numérique; en substituant pour a et b les valeurs qu'on aura trouvées, on fera successivement

$$y = 1, \quad 2, \quad 3 \ldots\ldots 9 \text{ décimètres},$$

et l'on calculera les valeurs de x correspondantes.

Moyen de comparaison.

En comparant ces valeurs avec les abscisses de l'élastique qui correspondent aussi aux mêmes ordonnées, on appréciera le rapprochement des deux courbes : mais il est un moyen plus simple d'apprécier ce rapprochement, c'est de mettre pour x dans l'équation de l'hyperbole les valeurs que l'observation a fait connaître pour la courbe élastique. Dans tous les points où elles satisferont à cette équation, les deux courbes seront identiques; dans les autres, suivant que $x^2 + 2ax$ deviendra $>$ ou $<$ que $\frac{a^2}{b^2} y$, on diminuera ou l'on augmentera x d'une unité de la dernière de ses décimales, puis de deux, de trois, &c..... jusqu'à ce qu'on renferme le premier membre entre deux

Digitized by Google

seconds membres consécutifs; et les accroissemens du second membre seront successivement

$$2.1(x+a)+1^2,\ 2.2(x+a)+2^2,\ 2.3(x+a)+3^2 \ldots 2.m(x+a)+m^2.$$

Appelant Δ l'accroissement ou la diminution du second membre de l'équation à l'hyperbole, lorsqu'on substitue à l'abscisse de cette courbe, l'abscisse de l'élastique, on aura

$$\Delta = 2m(x+a)+m^2,$$

m étant la différence de l'abscisse hyperbolique à l'abscisse correspondante de la courbe produite par la flexion de la règle : observons que m^2 sera le plus souvent négligeable, ce qui simplifiera considérablement les calculs.

Affinité remarquable des deux courbes.

Maintenant envisageons les résultats obtenus par cette méthode, ils sont exposés dans le III.e tableau, où nous voyons que, pour les mêmes ordonnées, les plus grandes différences entre les abscisses de la courbe réelle et de la courbe hypothétique ne s'élèvent pas à 7 dixièmes de millimètre.

Dans ces différences, il faut toujours comprendre 2 dixièmes de millimètre pour les erreurs que je puis avoir faites en mesurant à vue d'œil les dixièmes de millimètre, et l'on verra que, sur une étendue de 2000 millimètres et pour une courbure de 130 millimètres, ne pas trouver 7 dixièmes de millimètre pour plus grande différence, c'est une identité qu'il est rare de rencontrer même dans les résultats que la théorie démontre devoir être absolument pareils. Nous pouvons donc conclure premièrement que, *quelle que soit la courbe élastique produite par la flexion des pièces prismatiques entre deux points d'appui, il est permis de la confondre avec l'hyperbole, sans craindre de faire d'erreurs appréciables dans la pratique, et même dans des calculs où les approximations seraient poussées assez loin.*

Théorème.

En chaque point d'appui, le rayon de courbure de l'élastique est infini.

Faisons voir maintenant pour quelles raisons la courbe élastique approche si fort de se confondre avec l'hyperbole. Lorsqu'une règle est

Digitized by Google

pliée sur deux points d'appui, le long desquels elle peut glisser pour se mettre en équilibre avec les poids qui la chargent, il faut que l'effort de la règle sur ses appuis soit perpendiculaire à la direction de la règle au point où elle est appuyée ; car, sans cela, nous pourrions décomposer cette force en deux autres, l'une perpendiculaire à la règle et détruite par le point d'appui, l'autre tangentielle pour la faire monter ou descendre : et comme rien ne balancerait l'effet de cette dernière force, il ne saurait alors y avoir équilibre. Ainsi, à chaque point d'appui, la force est perpendiculaire à la règle. Or, cette dernière condition exige qu'au point d'appui la courbure de la règle soit nulle ; car autrement il y aurait une force tangentielle de redressement à laquelle la partie de la règle, hors de l'appui, ne saurait résister, et par conséquent la règle devrait ou monter ou descendre suivant que sa concavité ou sa convexité regarderait en haut ou en bas : donc enfin, aux deux points d'appui, la courbure de la règle est nulle, et par conséquent le rayon de courbure infini.

Et telle est la raison géométrique du grand rapprochement de cette courbe avec l'hyperbole.

C'est parce que, dans l'hyperbole, les rayons de courbure croissent d'une manière très-rapide en s'éloignant du sommet, que l'hyperbole est encore si voisine de la courbe élastique, à de grandes distances du sommet.

Mais, comme à une distance finie du sommet, le rayon de courbure de l'hyperbole ne devient pas infini, on voit que vers les appuis, la courbe élastique étant plus droite que l'hyperbole, elle lui sert de corde et passe par-dessus.

Raison géométrique de leur différence.

Donc, auprès des appuis, les abscisses de l'hyperbole doivent être plus petites. C'est précisément à cela qu'il faut attribuer les différences dont le *maximum* est, comme nous l'avons dit plus haut, inférieur à 7 dixièmes de millimètre.

En effet, au point où $y = 0^m,8$, c'est-à-dire à deux décimètres des appuis $x = 0,0287$ pour l'élastique, et $0,02825$ pour l'hyperbole (l'origine rapportée au sommet, point le plus bas des deux courbes) :

Digitized by Google

donc l'élastique coupe la verticale $y = 0,^{m}8$ à 0,00045 au-dessus de l'hyperbole. Cette différence étant plus que double de la limite de nos erreurs $= 2/10.^{es}$ de millimètre, ne peut leur être attribuée, et confirme par conséquent ce que nous fait connaître la théorie.

Généralité des résultats précédens; ils s'appliquent à toutes les espèces de bois.

Je ne me suis pas borné à l'examen de la courbe produite par la flexion d'une seule règle. J'ai fait plier successivement, et toujours d'une quantité considérable, des pièces prismatiques en sapin, en chêne, en hêtre, ayant toutes deux mètres de longueur, mais ayant des largeurs et des épaisseurs différentes. J'ai constamment trouvé les différences des ordonnées de l'hyperbole comparatrice à celles de la courbe élastique, moindres que $0,^{m}0006$.

Quand l'élastique est oblique, elle a pour diamètre un des diamètres conjugués de l'hyperbole comparatrice

Je dois faire remarquer un fait d'expérience vraiment singulier. Si, au lieu de mettre la charge à égale distance des appuis, on la rapproche de l'un d'eux d'une quantité peu considérable, la courbe élastique n'est plus symétrique par rapport à la verticale équidistante des deux appuis: mais cette courbe se confond encore (*) à très-peu-près avec une hyperbole. Seulement, cette hyperbole, au lieu d'avoir un de ses axes vertical et l'autre horizontal, se trouve rapportée à deux diamètres conjugués, dont l'un est encore horizontal, mais dont l'autre n'est plus vertical.

La courbe élastique dont les ordonnées et les abscisses sont rapportées dans le IV.^{e} tableau, appartient à deux diamètres conjugués, l'un horizontal, l'autre formant avec la verticale un angle dont le sinus égale 0,991, le rayon étant 1. *Voy.* aussi le VI.^{e} tableau.

Et le rapprochement des deux courbes ne cesse pas d'être aussi grand.

Pour nous rendre raison de cette propriété que présente l'élasticité des bois, observons qu'en dérangeant la charge de sa position primitive, les tensions de la règle en chaque point d'appui, ne doivent pas cesser d'être nulles. Le rayon de courbure de l'élastique doit donc toujours être infini à chaque point d'appui; par conséquent sa forme ne cesse pas d'avoir la même analogie avec celle de l'hyperbole. Mais

(*) A des quantités près, extrêmement peu considérables.

Digitized by Google

l'élastique cessant d'être symétrique par rapport à la verticale où la puissance est dirigée, ne peut plus correspondre qu'à un arc d'hyperbole dont aucun axe ne soit vertical.

Ainsi, lorsqu'on suppose les ordonnées horizontales, les abscisses conjuguées ne peuvent plus être verticales ; mais on peut toujours les rapporter à un certain système de diamètres conjugués; et voilà ce que nous voulions faire remarquer.

Des courbes élastiques produites par les diverses flexions d'une même pièce.

Maintenant exprimons d'une manière générale la courbe hyperbolique qui représente avec un rapprochement si heureux, l'élastique produite par la flexion des bois. Reprenons les équations

$$\frac{a^2}{b^2}y^2 = 2ax + x^2, \quad 2a = \frac{\xi'^2 - 4\xi^2}{4\xi - \xi'},$$

et, constans à notre méthode, revenons toujours à l'expérience.

Après avoir considéré isolément la courbe produite par une descension quelconque, j'ai cherché à comparer les courbes qui présentent des descensions ou flèches différentes, d'abord pour la même pièce, ensuite pour des pièces différentes.

Première expérience.

J'ai donc repris la première règle (celle du III.^{e} tableau), et après l'avoir pliée de treize centimètres et quelque chose, je l'ai pliée seulement de huit centimètres.

J'ai cherché la différence de leurs abscisses pour les mêmes ordonnées, les résultats que j'ai trouvés (V.^{e} tableau) sont si près de la proportionnalité, qu'on pourrait, sur leur seule confiance, admettre ce principe, *les abscisses qui correspondent aux mêmes ordonnées d'une règle plus ou moins pliée, sont à très-peu-près proportionnelles.*

Mais, comme les moindres variations dans cette loi pourraient faire changer les hyperboles comparatrices d'une manière très-sensible, il était important de la vérifier avec plus de soin encore, et voici comment j'y suis parvenu.

Seconde expérience.

J'ai pris une règle de trois centimètres d'écarrissage un peu plus

Digitized by Google

longue que deux mètres, distance invariable des points d'appui. Je l'ai fait plier par des poids convenables et successivement de 1, 2, 3, 4... jusqu'à 8 centimètres au milieu. A chaque point de division où j'abaissais ainsi le milieu de la règle, je prenais l'abaissement au quart et aux trois quarts de la longueur totale : la moyenne entre ces deux valeurs me donnait la seconde abscisse ξ qui achève de déterminer l'hyperbole comparatrice.

Si les abscisses verticales du milieu ξ' et du quart ou des trois quarts ξ eussent été précisément proportionnelles, toutes les autres abscisses correspondant aux mêmes ordonnées, l'eussent été pareillement, puisque ces élémens suffisent à la détermination complète de l'hyperbole qui leur appartient; mais les ξ' et les ξ s'écartent un peu de cette loi.

D'après nos observations sur le chêne, le cyprès, le hêtre et le sapin, nous avons vu que les abscisses intermédiaires (celles qui correspondent au quart et aux trois quarts de la distance entre les appuis) croissent un peu moins rapidement que l'abscisse du milieu de la pièce ou la flèche même de cette pièce. De là nous tirons plusieurs conséquences importantes.

La première est que *plus on plie la même pièce, plus sa courbure* maximum *augmente au-delà de la proportion des flèches ou des descensions.*

Mais les flèches elles-mêmes ou les descensions croissent dans un rapport plus accéléré que les charges.

Donc, à plus forte raison, *à mesure que la flexion augmente, la courbure* maximum *de la pièce augmente dans un plus grand rapport que la charge.*

Mais il résulte également, de ce que ces variations sont réellement très-petites, que, lorsqu'on ne doit considérer que des flexions qui ne soient pas très-différentes, et tel est le cas le plus ordinaire des constructions civiles ou nautiques, on peut, sans erreur sensible, regarder les courbes produites par la flexion, comme ayant toutes leurs abscisses correspondantes proportionnelles aux descensions ou flèches de ces courbes.

Digitized by Google

Troisième expérience.

C'est ce que montre, avec la dernière évidence, la série d'expériences à laquelle se rapporte le VI.e tableau.

Comparaison de seize flexions différentes, d'une même pièce.

Dans ces expériences, nous avons fait descendre le milieu d'une pièce ayant 2 mètres sur 3 centimètres d'écarrissage, d'abord d'un centimètre, puis de deux, de trois, de quatre, &c. jusqu'à seize, flexion, comme on voit, extrêmement considérable. Nous avons appliqué une grande bande de papier sur une planche parfaitement plane, et dressée le long de la pièce dans le plan vertical de la flexion. Sur cette feuille à épures, nous avons tracé les seize courbes que nous venons de décrire. Nous avons déterminé avec le plus grand soin les abscisses correspondantes à vingt-une ordonnées, pour chacune de ces seize courbes; et le résultat général de ces déterminations, consignées dans le tableau VI.e, vient à l'appui des conséquences que nous avons précédemment déduites. (*Voyez* les observations du VI.e tableau.)

Recherche de l'équat.n générale des hyperboles comparatrices.

Premier cas: *Flexions très-petites.*

Appliquons maintenant le calcul à ces données de l'expérience.

Soient

$$\frac{A^2}{B^2}\,Y^2 = 2AX + X^2 \quad \text{et} \quad \frac{a^2}{b^2}\,y^2 = 2ax + x^2$$

les équations des deux hyperboles qu'on peut sans erreur confondre avec deux des courbes élastiques que nous voulons comparer; si d'abord nous supposons que la courbure des deux élastiques est peu considérable; pour les mêmes ordonnées $Y=y$, les abscisses X et x seront dans un rapport constant m.

En représentant, pour ces deux courbes, par $\pm\Xi$ et $\pm\xi$ les abscisses correspondantes au quart et aux trois quarts de la longueur de la pièce, on aura donc d'abord $\frac{\Xi}{\xi} = m$. Mais, ainsi que nous l'avons vu au commencement de ce paragraphe, Ξ' et ξ' représentant les flèches de l'arc qu'on considère, on a

$$2a = \frac{\xi'^2 - 4\xi^2}{4\xi - \xi'} \quad \text{et de même} \quad 2A = \frac{\Xi'^2 - 4\Xi^2}{4\Xi - \Xi'}.$$

Or,

Digitized by Google

Or, les rapports des abscisses correspondantes $\frac{\Xi}{\xi}$, $\frac{\Xi'}{\xi'}$, sont supposés égaux à la grandeur m; on a donc

$$2a = \frac{\xi'^2 - 4\xi^2}{4\xi - \xi'} \quad \text{et} \quad 2A = \frac{m^2\xi'^2 - 4m^2\xi^2}{4m\xi - m\xi'} = m \cdot \frac{\xi'^2 - 4\xi^2}{4\xi - \xi'} = 2ma.$$

c'est-à-dire, que *les axes réels des hyperboles comparatrices seront entre eux comme les descensions ou flèches correspondantes.*

L'équation générale des hyperboles produites par toutes les flexions très-petites d'une même pièce, la distance des appuis étant invariable, est donc

$$\frac{m^2 a^2}{b^2} Y^2 = 2maX + X^2.$$

Il est facile de voir que, quel que soit l'axe réel ma, l'autre axe $b\sqrt{(-1)}$ doit toujours rester le même; car les abscisses correspondantes aux mêmes ordonnées étant proportionnelles et dans le rapport m, au lieu de X et Y, on pourra mettre mx et y, alors on aura

$$\frac{m^2 a^2}{b^2} y^2 = 2m^2 ax + m^2 x^2 \quad \text{ou} \quad \frac{a^2}{b^2} y^2 = 2ax + x^2.$$

C'est précisément l'équation primitive : donc $b\sqrt{(-1)}$ *axe imaginaire de l'hyperbole générale en* X *et* Y, *doit rester le même, quel que soit* m.

Approximation plus grande.

Si nous voulions maintenant approcher davantage du véritable rapport qui unit toutes les flexions d'une même pièce entre les mêmes appuis, nous pourrions supposer que les rapports des abscisses correspondantes aux mêmes ordonnées sont données par une progression à différences constantes, et ce degré d'approximation nous menerait au-delà de l'exactitude qu'il est possible d'atteindre dans les calculs et les opérations ordinaires des arts.

Cas général.

Mais afin d'embrasser tout de suite le cas le plus général, exprimons que ce rapport croît ou décroît suivant une loi quelconque, et repré-

Digitized by Google

sentons le par $m\varphi(m) = \frac{\Xi}{\xi}$ (Ξ et ξ étant toujours les deux abscisses intermédiaires qui servent à déterminer les hyperboles comparatrices), et m étant le simple rapport des descensions ou $\frac{\Xi'}{\xi'}$.

Alors $2A = \frac{\Xi'^2 - 4\Xi^2}{4\Xi - \Xi'}$ deviendra $2A = -m \cdot \frac{\xi'^2 - 4\overline{\varphi(m)}^2 \cdot \xi^2}{\xi' - 4\varphi(m) \cdot \xi}$.

Mais les descensions Ξ' et ξ' sont les abscisses qui correspondent aux points où l'ordonnée $= 1^m$, à demi-distance des appuis. Et en faisant $Y = 1$, dans

$$\frac{A^2}{B^2} Y^2 = 2AX + X^2, \quad \text{on aura} \quad \frac{A^2}{B^2} = 2A\Xi' + \Xi'^2 ;$$

cette valeur de $\frac{A^2}{B^2}$, substituée dans l'équation qui la précède, donne immédiatement

$$Y^2 = \frac{2AX + X^2}{2A\Xi' + \Xi'^2}.$$

Mettant pour $2A$ la valeur que nous avons trouvée il n'y a qu'un moment, et pour Ξ' sa valeur $m\xi'$, il vient

$$Y^2 = \frac{-m \cdot \frac{\xi'^2 - 4\overline{\varphi(m)}^2 \cdot \xi^2}{\xi' - 4\varphi(m) \cdot \xi} X + X^2}{-m \cdot \frac{\xi'^2 - 4\overline{\varphi(m)}^2 \cdot \xi^2}{\xi' - 4\varphi(m) \cdot \xi} \cdot m\xi' + m^2\xi'^2},$$

et enfin en réduisant les deux termes du second membre

$$Y^2 = \frac{m\{\xi'^2 - 4\overline{\varphi(m)}^2 \cdot \xi^2\} X - \{\xi' - 4\varphi(m)\xi\} X^2}{m\{\xi'^2 - 4\overline{\varphi(m)}^2 \cdot \xi^2\} m\xi' - \{\xi' - 4\varphi(m)\xi\} m^2\xi'^2}. \qquad [m]$$

Telle est donc l'équation générale de toutes les hyperboles comparatrices qu'on peut regarder, sans erreur sensible, comme les courbes élastiques que présente une même pièce prismatique ou cylindrique courbée entre les mêmes appuis.

Digitized by Google

Si quelque jour j'ai le loisir de reprendre cette partie de mes observations, je chercherai à déterminer plus précisément la fonction Φ par rapport à la descension ξ' : elle est de la forme

$$\Phi(m) = L + M\xi' - N\xi'^2 ;$$

mais il faudrait, pour chaque espèce de bois, déterminer la valeur des constantes L, M, N, et cela demanderait un temps considérable.

Pour compléter les recherches relatives à la flexion, il faudrait connaître la valeur de la fonction Φ, en fonction des épaisseurs des règles pliées, et de la distance des appuis. C'est ce qui fera l'objet de travaux ultérieurs.

Comment on aurait égard, dans l'équation précédente, aux épaisseurs et à la distance des appuis.

Si dans l'équation $[m]$ on voulait faire entrer les poids en considération, on observerait que les poids sont donnés en fonction de la descension ξ' par une équation de la forme

$$\xi' = H + \overline{\mu - 1}\,.\,\delta' + \frac{\mu-1}{1}\,.\,\frac{\mu-2}{2}\,\delta''. \qquad (\text{S. I.})$$

Ensuite les descensions étant directement proportionnelles au cube de la distance des appuis D, et réciproquement proportionnelles aux largeurs L et aux cubes des épaisseurs E, on aurait pour valeur générale de ξ',

$$\xi' = \frac{D^3}{LE^3}\left\{H + \overline{\mu - 1}\,.\,\delta' + \frac{\mu-1}{1}\,.\,\frac{\mu-2}{2}\,.\,\delta''.\right\}$$

Influence de la force absolue de l'élasticité des bois, sur la figure de la courbe élastique.

Avant de terminer ce paragraphe, nous ferons remarquer que, pour des bois de mêmes dimensions, mais de forces différentes, la courbure de l'arc, pour une même flèche ou descension, est d'autant plus considérable au milieu, que l'élasticité est plus énergique. C'est ce dont il est facile de se rendre raison; car si le bois le moins fort acquérait tout-à-coup un nouveau degré d'élasticité dans l'instant où il est forcé de prendre un arc d'une corde et d'une flèche donnée, l'effet de cette augmentation d'élasticité serait de diminuer la courbure de chaque demi-

Digitized by Google

arc : ce qui ne pourrait se faire qu'en augmentant la courbure de l'élément de la courbe au point le plus bas, élément dont l'incrément d'élasticité ne peut balancer la somme des incrémens de tout le reste de la pièce.

Conséquences relatives à la configuration des vaisseaux.

De là résulte une conséquence facile à prévoir, mais qui mérite d'être remarquée; c'est que l'épaisseur des règles employées par les ingénieurs maritimes pour tracer les vaisseaux, fait changer la nature des courbes qui figurent les diverses sections, suivant que cette même épaisseur est plus ou moins grande. Enfin, on voit encore que, pour que les pièces appelées *lisses*, figurent exactement la courbure de la surface que le vaisseau devra prendre, il faut qu'elles soient précisément de l'épaisseur (*) des bordages par lesquels nous couvrons toute la membrure du navire. Cette règle nous paraît mériter d'être remarquée; elle nous fait voir le défaut d'un moyen qu'on emploie quelquefois pour rendre les lisses assez épaisses, on plie deux règles plates l'une sur l'autre; alors la force d'élasticité n'est plus que le quart de celle qu'auront les bordages.

§. VI.

De la Flexion des Bois sur des Surfaces données.

Dans une foule d'arts, et particulièrement dans la marine, on fait entrer les bois dans les édifices, les machines et mille autres produits de l'industrie, en les pliant sur des surfaces données : je vais chercher ce qui se passe dans cette opération.

On ne considère ici que la flexion simple sans qu'elle soit compliquée par la torsion, comme cela a lieu en bordant les *façons* des vaisseaux

Dans ce premier mémoire, je supposerai seulement qu'on plie les bois sans leur donner de torsion, comme on plie les cerceaux sur des cylindres.

Concevons une planche ou bordage (**) pliée sur une surface quel-

(*) Si d'ailleurs les lisses sont du même bois que les bordages; ce qui n'a pas toujours lieu.

(**) Nous appelons *bordages*, les madriers ou planches qu'on plie le long du vaisseau pour en couvrir ainsi toute la surface : border, c'est appliquer les bordages.

Digitized by Google

conque, par exemple, sur celle d'un vaisseau, et supposons qu'on applique en chaque point de la pièce pliée une force égale à la tendance qu'a cette pièce à s'éloigner de la surface. Il est visible qu'il y a équilibre dans le système; et que, si on remplaçait chacune de ces forces par un clou planté normalement à la surface, et capable d'une résistance égale à la tendance du bordage à quitter la surface, il y aurait encore équilibre.

Nous avons vu que, pour forcer les bois à prendre, entre deux points fixes, une courbure donnée, il faut une force proportionnelle à cette courbure. Si donc un bordage plié sur une surface était subitement coupé en une infinité de parties égales, il faudrait, à chacune de leurs extrémités, des forces directement proportionnelles à la courbure de la surface en ces points, ou réciproquement proportionnelles aux rayons de courbure de la surface, la courbure étant estimée suivant la ligne de contact du bordage et de la surface.

Et alors, en quelque point qu'on coupât le bordage, les forces qui se trouveraient à droite et à gauche du point de division suffiraient pour maintenir le bordage dans sa position primitive.

Mais si nous considérons un bordage comme une pièce unique et sans égard à la rupture éloignée ou prochaine, incertaine ou assurée; alors le problème changera de face.

(Fig. 4, pl. 2.) Des forces nécessaires pour plier un bordage sur une suite de poteaux.

Pour nous placer dans l'hypothèse des travaux de nos arts, supposons que, au lieu de s'appliquer sur une surface continue, le bordage s'applique sur une suite de lignes *(fig. 4, pl. 2). Aa, Bb, Cc, Dd, Ee,* &c., et voyons ce qui a lieu dans ce cas.

Supposons, pour plus de simplicité, que les poteaux forment un cylindre circulaire; le bordage encore droit $A\beta\gamma\delta\varepsilon$ devant s'appliquer sur la section normale *ABCDE.* Soit $A\varepsilon$ longueur totale du bordage égale à m fois la distance constante des poteaux *Aa, Bb, Cc*.... La force F, appliquée en ε, aura pour faire toucher β au point B un moment $= mF$; mais lorsque cette force aura plié le bordage jusqu'à

Digitized by Google

toucher le poteau B, elle n'aura plus qu'un moment

$$= \overline{m - 1} \cdot F$$

pour continuer à plier le bordage. De même, à mesure que, par une plus grande flexion, le bordage viendra toucher les poteaux C, D....; le moment ne sera plus que

$$\overline{m - 2} \cdot F, \quad \overline{m - 3} \cdot F, \quad \&c. :$$

donc enfin la force qui retiendra le bordage au dernier point E, aura simplement F pour moment. Ainsi elle aura m fois moins d'action que quand le bordage n'avait pris sa flexion qu'entre les deux premiers poteaux.

On voit par-là que si l'on connaît la force appliquée en ε, qui ferait simplement plier le bordage de A en B, il suffira de la multiplier par le nombre des poteaux moins un, pour avoir la force qui, en agissant à l'extrémité du bordage, le tiendrait appliqué sur tous les poteaux.

Voici comment j'ai vérifié ces résultats par l'expérience.

Description d'une machine propre à confirmer les résultats de la théorie par l'expérience.

J'ai fait un cône tronqué, dont la base inférieure avait deux mètres de rayon, la base supérieure n'ayant qu'un mètre et demi; enfin la distance des poteaux, dont chacun représentait une arête du cône, était de $\frac{100^{\circ}}{12}$ (*) *(fig. 5, pl. 2)*.

Au centre, sur un axe vertical, étaient fixés deux demi-cercles horizontaux, regardant la partie de cône tronqué que j'avais figurée. Chaque demi-cercle portait dix petites poulies dirigées vers le milieu de l'intervalle des poteaux. En chacun de ces milieux, un fil retenait le bordage, passait à travers ces intervalles, se pliait ensuite sur la poulie du plan inférieur, faisait retour verticalement sur la poulie supérieure correspondante, et soutenait un poids qui, suspendu d'assez haut, pouvait descendre librement.

(*) Degrés centésimaux.

Digitized by Google

(Pour mieux connaître l'effet de cette machine, et les raisons qui ont déterminé sa forme, nous prions le lecteur de jeter les yeux sur l'explication de la figure 5, planche 2.)

D'abord, je n'ai employé qu'un seul fil attaché à l'extrémité du bordage ou de la règle pliante, et j'ai vu qu'en le chargeant de poids qui fussent réciproquement comme les momens

$$mF,\quad \overline{m-1}.F,\quad \overline{m-2}.F,\quad \overline{m-3}.F,\quad \&c.,$$

je pliais successivement la règle sur 1, 2, 3..... poteaux consécutifs au dernier : ce qui devait être.

Comparaison de ces expériences avec celles des paragraphes précédens.

Ensuite j'ai cherché à rapporter ces expériences à celles de la règle pliée entre deux appuis horizontaux, comme dans les paragraphes précédens, et j'ai vu que la même règle exigeant un poids H pour prendre à son milieu la courbure d'un des cercles tracés sur le cône, n'exigeait plus que le quart du même poids appliqué à son extrémité, lorsque fixée par l'autre bout sur le cercle déterminé du cône, la règle devait à ce bout prendre la courbure du cercle par l'effet de $\frac{H}{4}$.

Expliquons ce résultat. Une pièce prismatique se courbe également à son milieu, soit qu'on la charge d'un poids unique H, en la soutenant par ses extrémités, soit qu'on charge à-la-fois chacune de ses extrémités par un poids sous-double $= \frac{H}{2}$, en la soutenant par son milieu. En considérant ensuite chaque moitié de la pièce ainsi soutenue par son milieu comme une pièce unique chargée du poids $\frac{H}{2}$ à son extrémité, la courbure qu'elle prend est égale à la courbure que devra prendre une troisième pièce deux fois longue comme celle-ci, c'est-à-dire égale à la première, et d'ailleurs sollicitée par un poids sous-double encore du second poids, et par conséquent $= \frac{H}{4}$. Or, ce dernier cas est celui qu'offre l'action du poids $\frac{H}{4}$ agissant à l'extrémité de la règle ou bordage pliée sur le cône tronqué. Donc enfin ce poids

Digitized by Google

n'est que le quart du poids nécessaire pour plier la même pièce, suivant la même courbure, à son milieu, lorsqu'on la soutient horizontalement par ses extrémités, et qu'on la charge d'un poids unique à son milieu.

Considérations sur le bordage des vaisseaux.

Les bordages qui recouvrent la membrure des vaisseaux, tant à l'intérieur qu'à l'extérieur, sont appliqués sur elle comme la pièce pliée sur les montans de la machine que nous venons de considérer. On voit donc que les bordages étant consolidés par des clous fixés à la membrure, la force d'élasticité à laquelle ces clous doivent résister est proportionnelle, 1.° à la grandeur de la courbure que doit prendre en chaque point le bordage plié; 2.° au rapprochement des pièces de la membrure sur lesquelles s'effectue le clouage.

De là résulte une conséquence paradoxale en apparence, mais cependant exactement vraie. Plus on multiplie les *couples* (*) qui composent la membrure des vaisseaux, plus on augmente la quantité des clous qui fixent un même bordage, puisque nous mettons à chaque bordage un même nombre de clous ou de chevilles en bois, sur chaque couple de la membrure. Or, dans ce cas, pour que le bordage s'appliquât mathématiquement sur la surface du vaisseau, et de manière à ce qu'en coupant le bordage en un point quelconque, il ne cessât pas d'être appliqué sur la surface, il faudrait que la résistance au redressement du bordage, produite par chaque clou, fût directement proportionnelle au nombre de ces clous, et la somme des actions partielles employées pour produire le même effet, serait par conséquent proportionnelle au carré du nombre des couples sur une longueur donnée.

Que l'on conçoive, en effet, un bordage coupé entre deux couples, et qu'on se demande quelle doit être la force des clous contigus à droite et à gauche pour l'empêcher de *larguer* ou de se redresser, on la trouvera proportionnelle au bras du levier sur lequel elle agit, et ce bras est

(*) Les couples sont des assemblages doubles de charpente, qui s'élèvent verticalement pour être recouverts à-peu-près normalement par les bordages dirigés horizontalement.

précisément

Digitized by Google

précisément proportionnel à la distance de deux couples consécutifs.

Mais si, en *larguant* d'une quantité peu considérable, le bordage se redresse jusqu'au second clou, alors le premier acquiert immédiatement un bras de levier double, le second clou agit sur un bras de levier comme un, et le moment de la force totale des deux clous est comme trois ; au troisième clou, elle serait comme six, et ainsi de suite, selon la progression des nombres figurés 1, 3, 6, 10... $\frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2}$. Bien entendu que, dans cette énumération, aucun clou n'est supposé avoir perdu de sa tenue dans le bois, quoiqu'un peu retiré de sa position primitive.

On doit voir par ces détails que si l'on veut empêcher un commencement de redressement à l'extrémité du bordage, il faut appliquer à cette extrémité une force incomparablement plus grande que celle des clous qui fixent le bordage dans le reste de sa longueur. Ici l'expérience confirme pleinement ce que vient de nous révéler la théorie : car, pour fixer les bordages sur la membrure, on se contente, dans toutes les parties intermédiaires, d'enfoncer sur chaque pièce des couples un clou et un *gournable* ou cheville de bois (*); mais chaque extrémité du bordage est fixée par deux clous et une cheville en fer ou en cuivre. Ces chevilles extrêmes traversent toute l'épaisseur de la muraille, et sont rivées en dedans sur de petits anneaux métalliques appelés *viroles*, et dont l'effet est de s'opposer directement au redressement que le bordage tend à prendre à son extrémité. Il m'a semblé qu'on verrait avec quelque intérêt les pratiques de nos arts justifiées par des considérations théoriques, et qu'on pardonnerait à la longueur de ces détails en faveur de l'utilité de leur but.

(*) Ou mieux encore par deux gournables, sans clou.

Digitized by Google

§. VII.

Application des Recherches précédentes à la Rupture des Bois.

Les forces qui produisent la rupture sont la limite des forces qui produisent la flexion : elles n'ont avec elles aucune relation nécessaire.

Les bois ne sont susceptibles que d'une compression et d'une extension déterminées, au-delà desquelles ils s'écrasent ou se déchirent.

Les forces qu'il faut employer pour amener les bois à ce point de rupture, n'ont aucune relation nécessaire avec les forces qui produisent la flexion des bois.

Classification des bois par rapport à ces forces.

Ainsi, quelques espèces végétales opposent très-peu de résistance à la flexion, et beaucoup à la rupture : tels sont le chanvre parmi les simples plantes, et parmi les arbres, le hêtre, l'orme, le noyer, le sapin, &c. Quelques espèces, au contraire, opposent beaucoup de résistance à la flexion, et beaucoup moins à la rupture proportionnellement : tels sont le cyprès, l'acajou, &c., ce qui forme une seconde classe de bois. D'autres enfin présentent à-la-fois beaucoup de résistance à la flexion et à la rupture : tels sont le pin de Corse, et le chêne, le plus rigide et le plus fort des grands végétaux de nos contrées.

Elles déterminent l'usage des diverses espèces de bois, dans les arts.

Ces considérations physiques sont d'une grande importance dans les arts : elles déterminent l'usage et l'emploi des divers genres de végétaux, suivant les conditions qu'on veut remplir. Ainsi les édifices durables et dont les matériaux devront rester immuables, les parties des machines, destinées à supporter de grands efforts, n'admettront que des végétaux forts et rigides. Le chêne y sera consacré de préférence, et ensuite les arbres qui opposent le plus de résistance à la flexion, tels que ceux de la seconde classe.

Mais ces derniers seront plutôt consacrés à ces ouvrages légers dont le but principal est l'agrément, et qui, réservés pour les plaisirs du luxe, n'auront pas d'efforts considérables à soutenir.

Enfin ceux de la première classe seront spécialement réservés pour les travaux où l'élasticité des bois est la qualité principale. Les chars, les

Digitized by Google

voitures de tous les genres, les instrumens aratoires, la mâture des vaisseaux, les rames des bâtimens légers, &c.

Elles ont besoin d'être soumises à l'observation et au calcul.

C'est en soumettant à l'observation et au calcul ces deux genres de forces qu'ont les grands végétaux pour s'opposer à la flexion où à la rupture, que les propriétés des bois seront enfin parfaitement connues, et qu'on pourra, dans chaque circonstance, décider avec certitude quelle est l'espèce qu'il convient le mieux d'employer.

Un tel choix, pour être fondé, n'est pas aussi facile à faire qu'on le pense, lorsqu'on n'emploie pour le fixer que les secours imparfaits et peu certains de la routine.

Travaux des savans sur la rupture des bois.

Buffon paraît être le premier qui ait fait de grandes expériences sur la force que les bois opposent à la rupture ; mais il était trop peu géomètre; il n'a pas tiré de ses belles expériences tout le fruit qu'on était en droit d'en espérer, parce que ses observations sur chaque pièce qu'il a rompue sont trop peu complètes. Il semble que *Buffon* ait cru qu'une courbe était entièrement déterminée, lorsqu'on avait mesuré sa corde et sa flèche : aussi ses expériences fournissent-elles bien peu de lumières à la théorie générale de l'élasticité des bois.

Sur les traces de ce grand homme, dont je suis loin de vouloir imiter les détracteurs, mais à la mémoire duquel je ne dois que la vérité, plusieurs savans ont considéré, d'après l'expérience (*), cette même force des bois; ils l'ont soumise au calcul, et probablement il reste bien peu de chose à faire après leurs travaux.

Mais je crois qu'on a peu considéré l'autre genre de force que présentent les bois ; celle qui les fait s'opposer à la flexion, en y cédant plus ou moins (**). Je serai content si, du moins par ces premières ten-

(*) Il faut sur-tout distinguer *Duhamel* parmi les hommes qui ont su le mieux interroger la nature, et, par des moyens aussi simples qu'ingénieux, parvenir à d'utiles conséquences.

(**) Je parle ici de la flexion perpendiculaire au fil des pièces; car, pour celle qui a lieu lorsqu'on charge les bois *debout*, les expériences de *Lamblardie* et de *Girard* semblent aussi complètes qu'il est possible de le desirer.

Digitized by Google

tatives, j'attire l'attention des hommes habiles sur un sujet digne de leurs recherches.

Des forces qui produisent la flexion quand elles atteignent la limite qui produit la rupture.

Après avoir indiqué quelques-unes des lois qui régissent l'action de cette force, il me reste à la considérer dans le cas où le corps étant sollicité de plus en plus à la flexion, la force nécessaire pour produire cette flexion agit sur les fibres ligneuses avec l'intensité qui doit les rompre.

(Fig. 2.) Considérons un prisme rectangulaire *AabB (fig. 2, pl. 1)*, reposant horizontalement sur les appuis *A, B*, et sollicité à la flexion par un poids *P*.

Déjà nous savons qu'il existe une fibre *ll'*, qui ne doit ni s'alonger ni se raccourcir, quelle que soit la flexion de la pièce *AabB* : c'est la *fibre invariable*.

Toutes les fibres renfermées par celle-là sont comprimées, toutes les autres sont alongées, et la compression ou l'alongement est d'autant plus considérable, que les fibres sont plus éloignées de la fibre invariable.

Enfin, pour les bois d'une même nature, la fibre invariable sépare toujours en parties proportionnelles les fibres qui sont comprimées et celles qui sont alongées. Voilà du moins ce que nous avons admis, jusqu'à ce que des expériences plus délicates et plus précises nous aient fait voir s'il faut recevoir ou rejeter cette hypothèse qui s'accorde d'ailleurs avec l'explication des phénomènes.

Nous savons encore que les forces avec lesquelles les bois résistent à l'extension et à la compression, sont entre elles comme les cubes de la distance de la fibre invariable aux forces extérieures et intérieures de la pièce courbée, ou simplement, ces forces sont entre elles comme les cubes des volumes des fibres alongées ou raccourcies.

Supposons donc que la fibre invariable est pliée suivant l'arc de cercle dont le rayon est *R* : appelons *ds* l'élément longitudinal de cette fibre, αdE l'alongement des fibres extérieures, βde le raccourcissement des fibres intérieures. (*E, e* désignant encore ici, comme dans le §. III, les épaisseurs fF, ff des fibres dilatées et comprimées.)

Digitized by Google

Nommons maintenant mD la force qu'une fibre tendue peut supporter au moment de sa rupture, D étant la force d'extension qui la fait s'alonger d'une unité quelconque. Nommons de même nC la force qu'une fibre comprimée (dans le sens de sa longueur) peut supporter au moment où elle va se briser, C étant la force qui la fait se raccourcir de la même unité.

De ce qui se passe au moment de la rupture.

Lorsqu'une pièce prismatique est courbée, comme on le voit dans la *fig. 2*, nous avons, en général, $\frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{E'}{e'}$, Δ et Γ représentant les tensions et les contractions résultantes de l'application d'une force quelconque pour courber les bois (§. III.)

Il faut maintenant distinguer trois cas.

I. Si l'on doit avoir $\frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{mD}{nC}$ à l'instant de la rupture, on ne pourra faire $\Delta = mD$, ce qui ferait rompre les fibres tendues, sans qu'on ait également $\Gamma = nC$, ce qui ferait rompre les fibres comprimées, et réciproquement : donc, dans ce premier cas, les fibres extrêmes comprimées ou dilatées rompront en même temps.

II. Si, au moment de la rupture, on a $\frac{\Delta}{\Gamma} > \frac{mD}{nC}$, les tensions atteindront le degré qui produit la rupture, avant que les compressions aient atteint ce même degré; par conséquent la pièce rompra constamment, à partir des fibres extérieures, et non des fibres intérieures. Tel paraît être le cas de la nature pour les grands végétaux.

III. Enfin le contraire arriverait avec la même constance, c'est-à-dire que les fibres comprimées se briseraient les premières, si l'on avait $\frac{\Delta}{\Gamma} < \frac{mD}{nC}$.

On doit voir, par ces détails, combien il serait intéressant de connaître le rapport des résistances que les bois opposent à la tension et à la compression; on en tirerait pour les arts les conséquences les plus utiles. Ces recherches seront en partie le sujet de notre second mémoire.

Digitized by Google

Si maintenant à notre premier prisme de bois, nous en comparons un second de la même espèce de bois, mais d'épaisseur différente; nous aurons d'abord $\frac{E}{e} = \frac{E'}{e'}$, en désignant par E' et e' les épaisseurs des fibres alongées et comprimées du second prisme.

Mais si les fibres ne se rompent que quand à l'élément ds de la fibre invariable correspond un certain alongement αds de la fibre extérieure; comme l'alongement de la fibre extérieure extrême est $E\frac{ds}{R}$, et le raccourcissement de la fibre intérieure extrême $= e\frac{ds}{R}$, pour la première pièce de bois; il faudra qu'on ait

$$E\frac{ds}{R} = E'\frac{ds'}{R'} \quad \text{et} \quad e\frac{ds}{R} = e'\frac{ds'}{R'}.$$

D'où résulte ce théorème qui nous paraît digne de remarque par sa simplicité et sa généralité.

Théorème.

Pour les bois d'une même qualité, quelles que soient leurs dimensions, il faudra que la courbure qu'ils prendront au moment de leur rupture soit réciproquement comme leur épaisseur mesurée dans le plan de la flexion.

En effet, dans les deux équations

$$E\frac{ds}{R} = E'\frac{ds'}{R'} \quad \text{et} \quad e\frac{ds}{R} = e'\frac{ds'}{R'};$$

nous pouvons supposer $ds = ds'$; et si nous observons que $\frac{E}{E'} = \frac{e}{e'}$, nous aurons

$$\frac{E}{E'} + 1 = \frac{e}{e'} + 1 \quad \text{et} \quad \frac{E+E'}{e+e'} = \frac{E}{E'} = \frac{R}{R'}.$$

Donc, *pour les bois d'une même qualité, le rayon de courbure au point de rupture est directement proportionnel à l'épaisseur de la pièce, ce qui revient au théorème que nous venons d'énoncer.*

Digitized by Google

On doit voir par-là combien il serait intéressant de déterminer par des expériences délicates, le rayon de courbure des pièces au point où la rupture a lieu, et dans l'instant où cette rupture va se manifester; car malheureusement les expériences de *Buffon* et de ses successeurs offrent trop peu d'élémens géométriques pour opérer cette détermination.

Ce théorème indique un nouveau genre de recherches sur la rupture des bois.

Nous avons fait voir, §. I, que, à des différences secondes très-petites près, les forces employées pour fléchir les bois sont proportionnelles à la courbure qui en résulte. Donc en nommant Φ et Φ' les forces nécessaires pour fléchir les pièces que nous comparons, suivant une courbure dont le rayon soit l'unité, $\frac{\Phi}{R}$ et $\frac{\Phi'}{R'}$ seront les forces en vertu desquelles les deux pièces se courberont au degré qui doit produire la rupture, et qui correspond aux rayons de courbure R et R'. Mais Φ et Φ' sont entre elles comme les cubes des épaisseurs

$(E + e)^3 : (E' + e')^3$; ainsi $\Phi : \Phi' :: (E + e)^3 : (E' + e')^3$;

d'ailleurs, $(E + e)^3 : (E' + e')^3 :: E^3 : E'^3$, et $R : R' :: E : E'$;

Donc enfin $\frac{\Phi}{R} : \frac{\Phi'}{R'} :: \frac{E^3}{E} : \frac{E'^3}{E'} :: E^2 : E'^2 :: (E+e)^2 : (E'+e')^2$.

THÉORÈME CONNU.

Ainsi *les forces nécessaires pour rompre les bois sont entre elles comme les carrés des épaisseurs :* résultat indiqué par les expériences de *Buffon.*

Nous nous proposerons par la suite de rendre raison des principales anomalies offertes par les expériences, et, s'il est possible, de soumettre au calcul leurs irrégularités apparentes.

Digitized by Google

EXPLICATION DES FIGURES.

Pl. 1 et 2, cinq figures.

DANS la Planche première, la figure 1 représente une pièce de bois reposant sur deux appuis : au moyen d'un plateau de balance, cette pièce est chargée, à volonté, par des poids qui font effort sur son milieu.

On voit aussi tracés l'établi et les deux supports de la pièce, et les coordonnées horizontales et verticales, telles que je les ai tracées pour faire les expériences dont les résultats sont rapportés dans les tableaux III et V.

La figure 2 représente dans une pièce pliée *AabB*, la fibre invariable *ll* et les sections perpendiculaires entre lesquelles les réactions de l'élasticité doivent être en équilibre.

La figure 3 représente une pièce qui n'a pas été chargée à son milieu, mais un peu à gauche : alors la courbe n'est plus symétrique par rapport à la verticale équidistante des deux appuis ; mais elle a un *diamètre* qu'on a tracé, ainsi que le système d'abscisses et d'ordonnées qui lui correspond.

Dans la 2.e Planche, la figure 4 représente une file de poteaux parallèles et disposés de manière à figurer un cylindre droit circulaire, autour duquel on voit une planche ou bordage, pliée : la même planche est aussi vue en partie développée, ce qu'on a indiqué par un pointillé.

La figure 5 et dernière représente la machine propre à faire connaître les forces qui peuvent faire donner à des bordages des flexions différentes.

Les poteaux figurent un cône, afin qu'en plaçant le bordage plus ou moins haut, on puisse le plier plus ou moins.

Mais pour que le bordage ne prenne point de double torsion ou de dévirage, on voit de petits coins qui écartent le bordage des poteaux, de manière à ce qu'il se plie réellement sur ces coins qui figurent un cylindre, comme dans la figure précédente.

Des deux demi-cercles qui portent des poulies, celui d'en bas est mobile pour qu'il puisse toujours rester à la hauteur du bordage.

Le reste de la figure se comprend à la simple vue.

Nota. Il y a encore deux autres Planches 3 et 4, jointes à ce mémoire, qui n'ont pas été gravées à cause de leur trop grande étendue, et dont voici l'explication donnée par l'auteur.

Planche 3.e Elle représente seize flexions comparées d'une même pièce; expérience dont les résultats sont consignés dans le VI.e tableau.

On voit qu'ici, comme dans la figure 3, Pl. 1, toutes les courbes élastiques sont rapportées à un diamètre oblique, par des coordonnées parallèles les unes à ce diamètre, les autres à la droite horizontale qui joint les deux points d'appui.

Planche 4.e, on voit des courbes cotées (1), (2), (3).....; chacune d'elles correspond respectivement à la 1.re, la 2.e, la 3.e ordonnée, à partir du milieu dans la figure, Pl. 3.

Chacune des courbes (1), (2), (3).... a seize points, sans compter l'origine commune : ils appartiennent respectivement aux seize courbes de la figure, Pl. 3.

On voit par-là que, comme ces courbes ont très-peu de courbure, les ordonnées de ces diverses courbes pour la même abscisse 1, ou 2, ou 3....., sont à très-peu-près proportionnelles : vérité que la figure, Pl. 4, a sur-tout pour but de faire connaître.

(Suivent les Tableaux qui doivent accompagner ce premier Mémoire.)

EXPÉRIENCES

Digitized by Google

EXPÉRIENCES SUR LES BOIS.

PREMIER TABLEAU. (§. II.e, *page* 156.)

Tableau comparé des Descensions produites par des Poids accumulés ou répartis uniformément.

ESPÈCE DES BOIS.	DIMENSIONS		POIDS ACCUMULÉS.		POIDS RÉPARTIS.		RAPPORT * COMPOSÉ des Charges et des Descensions.
	VERTICALE.	HORIZONTALE.	CHARGE.	DESCENSION	CHARGE.	DESCENSION	
Chêne (prismat.e)	0,m02.	0,m03.	6kil.	0,m033.	9kil.	0,m032**	< que 19, 4 : 30.
Idem.....	0, 02.	0, 02.	6.	0, 015.	9.	0, 0145.	< que 19, 4 : 30. < que 19,34 : 30.
Sapin (cylindriq.)	Diamètre..	0, 02.	1, 9.	0, 048.	3.	0, 048.	= 19 : 30.
Idem.....	*Idem*.....	0, 02.	4, 75.	0, 123.	7, 5.	0, 123.	= 19 : 30.

* J'ai formé ces rapports composés, en réduisant les charges à des descensions égales.

** Et quelque chose.

Soit { P le poids ou la charge accumulée. / Y la descension qui en résulte..... } { Π le poids ou la charge uniformément répartie. / ϒ la descension qui en résulte.

D'après ces dénominations,

$\frac{P}{Y}$ sera la charge accumulée qui ferait descendre d'une unité de hauteur le point milieu de la règle pliée.

$\frac{\Pi}{\Upsilon}$ sera la charge uniformément répartie qui ferait descendre de la même unité le milieu de la même règle.

Alors enfin,

$\frac{P}{Y} : \frac{\Pi}{\Upsilon}$ sera le rapport des charges accumulées et réparties uniformément, pour produire une même descension.

Digitized by Google

EXPÉRIENCES SUR LES BOIS.

SECOND TABLEAU. (§. IV.e, *page* 169.)

DESCENSIONS EN FONCTION DE LA DISTANCE DES APPUIS.

SAPIN du Nord. *Règle prismatique de deux centimètres sur cinq, chargée constamment de 10 kilogrammes; Poids de la Règle,* 1kil.,104.

Distances des appuis.	1,m..	1,m125.	1,m250.	1,m375.	1,m500.	6,m625.	1,m750.	1,m875.	2,m..		
Descensions.	0, 01	0, 0155	0, 02187	0, 0287.	0, 03667	0, 047..	0, 058..	0, 0700	0,0840		
Descensions multipliées par 100...	1. ...	1, 55...	2, 187..	2, 87...	3, 667..	4, 7....	5, 8....	7, ...	8,4...		
Cube des distances...	1, 000	1, 42383	1, 95312	2, 59961	3, 37500	4, 29102	5, 35937	6, 59126	8,....		
Différences (en centim.)	0c,000	+0c,12617	+0c,23388	+0c,27039	+0c,292..	+0c,40898	+0c,44063	+0c,40874	+0c,4..		

CHÊNE. *Règle de deux centimètres sur trois, pliée sur le plat; Poids de la Règle,* 0kil.,94.

Distances des appuis.	1, ...	1, 1...	1, 2...	1, 3....	1, 4...	1, 5..	1, 6...	1, 7..	1, 8..	1, 9..	2, ...
Descensions.	0, 006.	0, 0081	0, 0108	0, 01325	0, 0167	0, 021	0, 025.	0, 0305	0, 036	0, 042	0, 049
Descensions divisées par $\frac{6}{1000}$....	1, ...	1, 333.	1, 8...	2, 208..	2, 783.	3, 500	4, 166.	5, 083	6, 000	7, ...	8, 017
Cube des distances...	1, 000.	1, 331.	1, 728.	2, 197..	2, 744.	3, 375	4, 096.	4, 913	5, 832	6, 859	8, 000
Différences (en millim).	0, 000.	+0, 0023	+0, 092.	+0, 011..	+0, 039.	+0, 125	+0, 0706	+0. 170	+0,168	+0, 041	+0, 017

Digitized by Google

OBSERVATIONS SUR LE SECOND TABLEAU.

J'OBSERVERAI sur toutes ces opérations, que les différences les plus fortes et les plus irrégulières en apparence disparaîtraient, en faisant varier seulement les hauteurs correspondantes de moins d'un millimètre pour la seconde règle, et d'un peu plus pour la première; mais, comme ces différences sont toutes de même signe pour l'une et l'autre règle, cette constance démontre une cause uniforme, et nous allons la faire connaître.

Pour ne pas perdre les règles soumises à ces deux expériences, je ne les coupais pas en rapprochant les points d'appui : la partie extérieure formait donc un contre-poids qui devait d'autant plus diminuer les descensions, que les appuis étaient plus rapprochés. Évaluons l'effet de ce contre-poids pour la seconde expérience. Je choisis la seconde règle, parce qu'il paraît que dans la première, je n'aurais pas pu observer une fraction de millimètre qu'il faudrait ajouter à la descension 0,01 pour obtenir des résultats satisfaisans : il y a d'ailleurs dans la série des différences, des anomalies qui montrent que cette expérience a besoin d'être refaite.

Le bout de la règle en dehors de chaque point d'appui, lorsque leur distance $= 1^m$ est de $\frac{1}{2}\,m$ de chaque côté; ainsi le centre de gravité de chaque bout extérieur est éloigné du point d'appui de $\frac{1}{4}\,m$; ce point d'appui lui-même est à $\frac{1}{2}\,m$ du milieu de la règle : donc la partie extérieure de la règle n'équivaut qu'à la moitié de son poids qu'on mettrait en moins au milieu. Or, la règle totale pèse $0^k,94$, la moitié $= 0,47$, dont la moitié donne pour l'effet total des deux bouts extérieurs $0^k,235$. Maintenant, 10 kilogrammes font baisser la règle de 0,006 : donc 0,235 la feront baisser de

$$\frac{0,006 \times 0,235}{10} = \frac{0,001410}{10} = 0,000141.$$

Ainsi sur les bouts extérieurs, la descension pour la longueur un mètre, serait en tout 0,006141 : donc il faudrait que 0,049, descension à 2 mètres, divisée par 8, cube de 2, égalât 0,006141, descension effective à 1^m. Or, le 8.ème de 0,049 est de 0,006125, et cette quantité ne diffère de la précédente que de 0,000016, c'est-à-dire, pas tout-à-fait de deux centièmes de millimètre, grandeur bien au-dessous du terme que nous-mêmes avons posé pour limite de la précision de nos opérations. L'expérience confirme donc pleinement *le rapport des cubes de la distance des appuis à la flèche de l'arc pris par les mêmes bois sous une même charge.*

Digitized by Google

EXPÉRIENCES SUR LES BOIS.

TROISIÈME TABLEAU. (§. V.e, *page* 179.)

Calculs comparés de la Courbe produite par la Flexion d'un prisme quadrangulaire de Sapin du Nord, *ayant deux mètres de longueur et au-delà, sur un décimètre de largeur et un centimètre d'épaisseur.*

La distance des deux points d'appui était de deux mètres : ils étaient de niveau, et les poids placés sur le milieu du prisme, à égale distance des deux points d'appui.

ORDONNÉES HORIZONTALES.	COURBE PRODUITE PAR LA FLEXION. ABSCISSES...VERTICALES.		ABSCISSES MOYENNES.	ABSCISSES RAPPORTÉES au sommet.	HYPERBOLE COMPARATRICE. ABSCISSES....LIMITES.		LIMITES des DIFFÉRENCES.
	A gauche.	A droite.			Inférieures.	Supérieures.	
0,m0.	0, 13..	0, 13..	0,13..	0,0...	$x=0$,.....	0,0.....	0,0000000.
0, 2.	0, 123.	0, 123.	0,123.	0,007.	$x>0,006991$.	$x<0,006992$.	+0,0000085.
0, 3.	0, 1148.	0, 1144.	0,1146	0,0154.	$x>0,01539$..	$x<0,01540$..	+0,0002000.
0, 4.	0, 1033.	0, 1035.	0,1034.	0,0266.	$x>0,2651$..	$x<0,02652$..	+0,0000850.
0, 5 = v.	0, 09..	0, 09..	0,09..	0,04 = ξ.	$x=0,04$....	$=0,04$.....	0,0000000.
0, 6.	0, 075.	0, 075.	0,075.	0,055.	$x>0,05539$.	$x<0,0554$...	—0,0003950.
0, 7.	0, 0575.	0, 0575.	0,0575.	0,0725.	$x>0,07238$.	$x<0,07239$..	—0,0001110.
0, 8.	0, 039.	0, 0388.	0,0389.	0,0911.	$x>0,0906$..	$x<0,0907$...	—0,0004500.
1, 0 = v'.	0, 0...	0, 0...	0,0...	0,013 = ξ'.	$x=0$, 13....	$x=0,013$...	0,0000000.

Digitized by Google

OBSERVATIONS SUR LE TROISIÈME TABLEAU.

D'APRÈS les calculs que nous avons faits, voici les principaux élémens de l'hyperbole à laquelle nous avons rapporté la courbe élastique déterminée dans notre III.e tableau.

Axe réel de l'hyperbole comparatrice $= 0,^{m}35 = 2a$.

Rapport des carrés des axes..... $= 0,^{m}0624 = \frac{a^2}{b^2}$.

Équation de l'hyperbole comparatrice $\frac{a^2}{b^2} y^2 = x^2 + 2ax$.

Même équation rendue numérique.. $0,0624 . y^2 = x^2 + 0,35 . x$.

Rayon de courbure de l'hyperbole au sommet $= 2,^{m}80449 = \frac{b^2}{a}$.

Carré de l'axe imaginaire..... $= 0,^{m}490865 = b^2$.

Digitized by Google

EXPÉRIENCES SUR LES BOIS.

QUATRIÈME TABLEAU. (§. V.e, *page* 181.)

Calculs comparés de la Courbe produite par la Flexion des Bois, et de l'hyperbole passant par cinq de ses points : Flexion d'un carrelet de trois centimètres d'écarrissage : distance des appuis, 2 mètres ; bois, Hêtre.

ORDONNÉES HORIZONTALES.	COURBE OBSERVÉE. ABSCISSES...VERTICALES.		HYPERBOLE COMPARATRICE. LIMITE DES ABSCISSES,		LIMITES DES DIFFÉRENCES ABSOLUES.	
	RELEVÉES immédiatement.	RAPPORTÉES au point le plus bas de la Courbe.	Supérieure.	Inférieure.	En plus.	En moins.
$y' = 0, 0.$	$x = 0,16....$	$x = 0,0....$	$x = ...$	.....		
$y'' = 0, 2.$	$x = 0,1498..$	$x = 0,0102.$	$x = 0,0102..$	$x > 0,0101.$	$+ 0^m,00005..$	
$y''' = 0, 3.$	$x = 0,138...$	$x = 0,0220.$	$x = 0,0221..$	$x > 0,0220.$		$- 0^m,00005.$
$y^{iv} = 0, 4.$	$x = 0,1233..$	$x = 0,0367.$	$x = 0,03665.$	$x > 0,0366.$	$+ 0^m,000055.$	
$y^{v} = 0, 5.$	$x = 0,10600.$	$x = 0,054..$	$x = 0,054...$	$x > 0,054..$	$= 0.$	
$y^{vi} = 0, 6.$	$x = 0,0872..$	$x = 0,0728.$	$x < 0,0773..$	$x > 0.0732.$		$- 0, 00045.$
$y^{vii} = 0, 7.$	$x = 0,0670..$	$x = 0,0930.$	$x < 0,0936..$	$x > 0,0935.$		$- 0, 00055.$
$y^{viii} = 1..$	$x = 0,0.....$	$x = 0,16...$	$x = 0,16....$	$x = ...$		

Digitized by Google

OBSERVATIONS SUR LE QUATRIÈME TABLEAU.

DANS cette courbe, les ordonnées y sont toujours horizontales et parallèles à la corde menée par les deux points d'appui ; mais les abscisses x ne sont plus verticales, parce que la règle n'ayant pas été chargée précisément à son milieu, n'a plus pris une forme symétrique par rapport à la verticale menée par ce point.

Cependant on a pu trouver une inclinaison des abscisses telle, qu'en divisant la corde qui joint les appuis en vingt parties égales, les dix abscisses à droite ont été respectivement égales aux dix abscisses à gauche : donc la droite parallèle à ces abscisses et menée par le milieu de la corde, est un diamètre de la courbe élastique.

Le sinus de l'angle formé par la verticale et la direction de ce diamètre est donné par le rapport $\frac{1600}{1614} = \sin. BAM.$ *(fig. 3, pl. 1.)*

Dans le IV.^{e} tableau ci-joint, les x sont précisément les longueurs mb, $m'b'$ ... $m_{,}b_{,}$ ... des distances des extrémités a, a', $a_{,}$, $a_{,,}$ des abscisses obliques ab, $a'b'$, $a_{,}b_{,}$ à la corde $D\Delta$ menée par les appuis, et ensuite à sa parallèle $dA\delta$.

L'hyperbole comparatrice que nous avons calculée, en la supposant rapportée à ses axes, est par conséquent la courbe $mm'm''Mm_{,}m_{,,}$ qui passe par les points m, m', M, $m_{,}$, $m_{,,}$ qui sont respectivement avec le pied des absisses a', a'', A, $a_{,}$, $a_{,,}$, sur la même verticale.

En divisant toutes ces abscisses verticales par le sinus $\frac{1600}{1614}$, on aurait les abscisses obliques de l'élastique rapportées à son diamètre.

Digitized by Google

EXPÉRIENCES SUR LES BOIS.

CINQUIÈME TABLEAU. (§. V.e, *page* 182.)

Calculs comparés des Courbes produites par la Flexion d'une même pièce prismatique, ayant 2 mètres . . . $0^m,01$; bois, Sapin du Nord.

ORDONNÉES COMMUNES.	PREMIÈRE COURBE : ABSCISSES = X.		SECONDE COURBE : ABSCISSES = x.	RAPPORT POUR $y = 0\,\frac{X'}{X'-x'}$.	QUOTIENT, $\frac{X}{\left(\frac{X'}{X'-x'}\right)} = \frac{X}{X'}(X'-x')$	DIFFÉRENCES DE CE QUOTIENT aux Abscisses de la seconde Courbe.
	$X-0,0037$.	X.	$X-x$.			
$y' = 0$.	0,13...	0,1337 = X'.	0,0500 = $X'-x'$.	2,674.	0,0500 .	0,000000.
$y'' = 0,2$.	0,123..	0,1267.	0,0474.		0,0473 . 82.	—0,000018.
$y''' = 0,3$.	0,1148.	0,1185.	0,0445.		0,0443 . 15.	—0,0001,85.
$y^{iv} = 0,4$.	0,1033.	0,1070.	0,0405.		0,0400 . 14.	—0,0004,86.
$y = 0,5$.	0,09...	0,0937.	0,0357.		0,0350 . 41.	—0,0006,59.
$y^{vi} = 0,6$.	0,075..	0,0787.	0,0300.		0,0294 . 31.	—0,0006,69.
$y^{vii} = 0,7$.	0,0575.	0,0612.	0,0233.		0,0228 . 87.	—0,0004,13.
$y^{viii} = 0,8$.	0,039..	0,0427.	0,0162.		0,0159 . 68.	—0,0002,32.
$y^{ix} = 0,9$.	0,019..	0,0227.	0,0085.		0,0084 . 89.	—0,0000,11.
$y^{x} = 1,0$.	0,000..	0,0037.	0,0013.		0,0013 . 83.	+0,0000,83.
$y^{xi} = 1,12$.	0,0037.	0,0000.	0,0000.		0,0000 . 00.	0,0000,00.

OBSERVATION

OBSERVATIONS SUR LE CINQUIÈME TABLEAU.

D'APRÈS les calculs que nous avons faits, voici les principaux élémens des deux courbes élastiques, que nous comparons dans notre V.e tableau.

PREMIÈRE COURBE.

Le rayon de courbure au sommet est égal (à très-peu-près) au carré de la première ordonnée, divisé par le double de l'abscisse correspondante; l'abscisse étant rapportée au sommet de la courbe, et représentant alors la flèche de l'arc très-petit que l'on considère.

Appelant donc r le rayon, y l'ordonnée, x l'abscisse, on a

$$r = \frac{y^2}{2x},$$

valeur à laquelle il faut ajouter $\frac{1}{2}x$, lorsqu'on ne veut rien négliger.

Or, dans la première courbe, à l'ordonnée $y = 0{,}2$, correspond l'abscisse $x = 0{,}13 - 0{,}123 = 0{,}007$ (rapportée au sommet).

Donc on a $r = \frac{(0{,}2)^2}{2 \times 0{,}007} + 0{,}0035 = 2{,}857142857\,14$ et $+ 0{,}0035$;

Donc enfin $r = 2{,}860642857\,14$.

SECONDE COURBE.

$= 0{,}2.x = 0{,}13 - 0{,}05 - (0{,}123 - 0{,}0474) = 0{,}0044.$

Le rayon au sommet $= \frac{0{,}04}{0{,}0088} + 0{,}0022 = 4{,}545 + 0{,}0022$:

Donc enfin ce second rayon $R = 4{,}547654\,54\ldots\ldots$

Si les rayons r et R étaient entre eux comme les flèches des deux courbes comparées, on aurait

$$\frac{1337}{837} = \frac{4{,}547654}{2{,}8606428}:$$

$\frac{1337}{837} = 1{,}597\frac{3}{5}$ et $\frac{4547}{286} = 1{,}59$: on voit donc que ces deux rapports diffèrent extrêmement l'un de l'autre; ce qui nous démontre plus rigoureusement encore ce principe que nous avons posé au notre premier paragraphe.

Pour des flexions peu considérables, les rayons de courbure sont proportionnels aux flèches de l'arc pris les pièces pliées : on voit même que cette proportionnalité se conserve très-rigoureusement pour des xions assez considérables, telles que celles de 8 et de 13 centimètres de flèche sur 2 mètres de corde : prouve enfin que la courbure des bois est à très-peu-près proportionnelle aux descensions, et par quent aux poids, puisque ceux-ci sont à très-peu-près proportionnels aux descensions.

Digitized by Google

EXPÉRIENCES SUR LES BOIS.

SIXIÈME TABLEAU. (§. V.e, *page* 184.)

TABLEAU GÉNÉRAL *des Courbes produites par seize Flexions de la même pièce entre les mêmes appuis.*

ORDONNÉES HORIZONTALES.	$y = 1^{met.}$	$y = -0,9.$	$y = -0,8.$	$y = -0,7.$	$y = -0,6.$	$y = -0,5.$	$y = -0,4.$	$y = -0,3.$	$y = -0,2.$	$y = -0,1$
1.re Courbe.	$x = 0.$	1, 2.	2, 8.	4. 2.	5, 8.	7. 2.	7, 9.	8, 9.	9. 4.	9. 8
2.e *idem.*	$x = 0.$	2, 8.	5, 9.	8, 7.	11, 8.	14, 2.	16, 1.	17, 8.	1, 9.	19, 9.
3.e *id.*	$x = 0.$	4, 3.	8, 9.	13, 2.	17, 4.	21, 3.	24, 2.	26, 8.	28, 7.	29, 8.
4.e *id.*	$x = 0.$	5, 8.	11, 9.	17, 5.	23, 2.	28, 2.	32, 1.	35, 6.	38, 1.	39, 6.
5.e *id.*	$x = 0.$	7, 3.	14, 8.	21, 9.	28, 9.	35, 1.	40, 1.	44, 5.	47, 5.	49, 6.
6.e *id.*	$x = 0.$	8, 8.	17, 8.	25, 3.	34, 5.	41, 9.	48, 0.	53, 3.	56, 8.	59, 4
7.e *id.*	$x = 0.$	10, 2.	20, 8.	30, 7.	40, 3.	48, 9.	56, 2.	62, 3.	66, 6.	69, 4.
8.e *id.*	$x = 0.$	11, 8.	23, 7.	35, 1.	45, 9.	55, 8.	64, 1.	71, 2.	76, 2.	79, 3.
9.e *id.*	$x = 0.$	13, 3.	26, 4.	39, 2.	51, 2.	62, 2.	71, 7.	79, 5.	85, 2.	89, 1.
10.e *id.*	$x = 0.$	14, 6.	29, 3.	43, 3.	56, 8.	69, 2.	79, 6.	88, 3.	94, 6.	100, 0.
11.e *id.*	$x = 0.$	16, 1.	32, 1.	47, 3.	62, 2.	75, 5.	87, 1.	96, 6.	103, 8.	108, 7.
12.e *id.*	$x = 0.$	17, 4.	34, 8.	51, 4.	67, 4.	82, 2.	94, 8.	105, 4.	113, 4.	118, 7.
13.e *id.*	$x = 0.$	18, 8.	37, 5.	55, 4.	72, 6.	88, 5.	102, 2.	113, 7.	122, 4.	128, 4.
14.e *id.*	$x = 0.$	20, 0.	40, 0.	59, 3.	77, 6.	94, 7.	109, 5.	122, 2.	131, 6.	138, 1.
15.e *id.*	$x = 0.$	21, 2.	42, 5.	63, 1.	82, 6.	100, 9.	116, 8.	130, 4.	140, 8.	147, 8.
16.e *id.*	$x = 0.$	22, 4.	45, 1.	66, 9.	88, 7.	107, 1.	123, 8.	138, 4.	149, 4.	157, 2.

$y = -0.$	$y = +0,1.$	$y = +0,2.$	$y = +0,3.$	$y = +0,4.$	$y = +0,5.$	$y = +0,6.$	$y = +0,7.$	$y = +0,8.$	$y = +0,9.$	$y = +1$
10, 2.	9, 8.	9, 2.	8, 5.	7, 8.	6, 7.	5, 5.	4, 2.	2, 5.	1, 2.	0.
20, 3.	19, 7.	18, 85.	17, 4.	15, 9.	14, 9.	11, 4.	8, 9.	5, 7.	2, 9.	0.
30, 4.	29, 5.	28, 2.	26, 2.	23, 8.	20, 8.	17, 2.	13, 3.	8, 8.	4, 5.	0.
40, 6.	39, 5.	37, 7.	35, 00.	31, 7.	28, 6.	22, 9.	17, 6.	11, 8.	6, 0.	0.
50, 6.	49, 5.	47, 3.	44, 1.	39, 8.	34, 6.	28, 7.	21, 9.	14, 8.	7, 5.	0.
60, 4.	59, 3.	56, 7.	52, 8.	47, 8.	41, 7.	34, 5.	26, 7.	17, 8.	9, 2.	0.
70, 7.	69, 2.	66, 1.	61, 5.	55, 6.	48, 3.	40, 2.	30, 9.	20, 9.	10, 8.	0.
80, 7.	79, 1.	75, 6.	70, 3.	63, 4.	55, 2.	45, 8.	35, 4.	23, 8.	12, 4.	0.
90, 4.	88, 9.	84, 8.	78, 8.	71, 4.	62, 0.	51, 3.	39, 6.	26, 7.	13, 8.	0.
100, 7.	98, 8.	94, 3.	87, 7.	79, 2.	69, 1.	57, 0.	44, 9.	29, 7.	15, 2.	0.
110, 5.	108, 6.	103, 3.	96, 3.	86, 9.	75, 4.	62, 4.	48, 3.	32, 3.	16, 6.	0.
120, 5.	118, 6.	112, 9.	104, 9.	94, 7.	82, 2.	67, 9.	52, 6.	35, 3.	18, 1.	0.
130, 5.	128, 2.	121, 8.	113, 1.	101, 9.	88, 4.	73, 1.	56, 4.	37, 0.	19, 3.	0.
140, 5.	138, 1.	130, 9.	121, 4.	109, 3.	94, 7.	78, 0.	70, 2.	40, 3.	20, 4.	0.
150, 2.	147, 3.	139, 7.	129, 5.	116, 4.	101, 0.	83, 4.	74, 4.	43, 2.	22, 1.	0.
160, 2.	156, 8.	148, 3.	137, 5.	123, 6.	107, 0.	88, 3.	78, 2.	45, 8.	23, 2.	0.

Digitized by Google

OBSERVATIONS SUR LE SIXIÈME TABLEAU.

Dans ce tableau, les courbes élastiques sont rapportées par des coordonnées obliques, à un diamètre mené par le milieu de la droite qui joint les deux points d'appui.

Cela tient à ce que, par rapport à certaines difficultés d'exécution, les charges n'ont pas été placées précisément au milieu de la pièce. Mais ce qu'il y a de plus remarquable, c'est que, comme le centre de gravité de la charge restait toujours sur une certaine droite, toutes les courbes élastiques sont à-la-fois conjuguées par rapport à un seul et même diamètre.

C'est ce qu'on reconnaîtrait avec évidence dans une figure où l'on aurait tracé les ordonnées verticales et les ordonnées obliques, parallèles au diamètre oblique.

Digitized by Google

MÉMOIRE

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS,

Contenant une Méthode nouvelle pour construire, par des Procédés géométriques, les Racines réelles des Équations de tous les Degrés;

PAR M. DE CORANCEZ.

INTRODUCTION.

LE problème général de la résolution des équations est encore loin d'être résolu. Étant proposée une équation algébrique, l'objet de ce problème est, comme on le sait, de trouver une fonction de ses coefficiens qui puisse en exprimer les racines.

Cette fonction déterminée seulement pour les quatre premiers degrés, se présente dans le troisième sous une forme inexplicable. Au-delà du quatrième, le beau travail de *Lagrange* a seulement servi à faire connaître les obstacles qui s'opposent à cette détermination. Loin de faire espérer la solution du problème, ce travail démontre presque l'impossibilité de cette solution.

La route que les analystes s'étaient tracée est donc fermée dès son origine : c'est ce qui montre la nécessité d'en chercher une nouvelle.

Étant donnée une courbe quelconque, la génération de sa développante admet une seule constante arbitraire. Cette constante dépend du point qui sert d'origine au développement de la première. Il en sera

Digitized by Google

de même de la développante, qu'on peut développer à son tour; et en poussant plus loin cette énumération, la $m^{ème}$ développante doit contenir m constantes arbitraires dépendantes du point d'origine de chaque développement successif.

Il se présente ici une remarque importante relativement au choix des coordonnées de la courbe primitive. De celles-ci, la première sera l'arc même de cette courbe; la seconde, la différence des angles que forment, avec une même droite, les tangentes aux deux extrémités de cet arc. Je distingue, pour abréger, la seconde de ces coordonnées sous le nom d'*arc de courbure*. Si, dans la courbe primitive, l'arc de cette courbe est donné par une fonction de son arc de courbure, il est aisé de faire voir que sa $m^{ème}$ développante ordonnée en série par rapport aux puissances de l'arc de courbure de celle-ci, contiendra m constantes, que ces m constantes ne sont autre chose que les arcs mêmes interceptés sur chaque développante successive, depuis le point de leur cours marqué pour origine de leur développement, jusqu'au point du cours de chacune d'elles qui correspond au point d'origine de la $m^{ème}$ développante; qu'elles entrent dans la série comme coefficiens des m premières puissances de l'arc de courbure; que le reste de la série qui se prolonge à l'infini se présente sous une forme très-simple et dont la loi est facile à saisir.

Cette valeur générale de la $m^{ème}$ développante d'une courbe quelconque offre un cas remarquable par la simplicité de ses résultats. C'est celui où cette courbe est la circonférence d'un cercle.

Qu'à un point pris à volonté sur la circonférence on marque, en effet, l'origine de l'arc φ positif; que sur la première développante, ayant son origine au point $\varphi = o$, on marque un point correspondant à $\varphi = t'$: que de ce point on commence à développer la première développante dans le sens où φ augmente, et qu'on marque sur le cours de la seconde développante le point correspondant à $\varphi = t''$; qu'en continuant toujours ces développemens successifs dans le sens où

Digitized by Google

φ augmente, on trace la $m^{ème}$ développante sur laquelle ayant coupé l'arc intercepté entre $\varphi = t^{(m-1)}$, point de son origine sur la développante inférieure et $\varphi = t^{(m)}$, on compte à partir de ce dernier point l'arc σ de la $m^{ème}$ développante qui s'étend, par conséquent, depuis $\varphi = t^{(m)}$ jusqu'à $\varphi = +\infty$.

On démontre que l'arc de courbure de σ est égal à l'arc $\varphi - t^{(m)}$ de la circonférence génératrice : que σ est une fonction algébrique entière du degré $m+1$ de $\varphi - t^{(m)}$: que, dans cette fonction, les coefficiens de la $1^{ère}$, $2^{ème}$, $3^{ème}$.... $m-1^{ème}$ puissance de $\varphi - t^{(m)}$, sont respectivement égaux aux arcs de la $m-1^{ème}$, $m-2^{ème}$..., $1^{ème}$ développante, ces arcs s'étendant du point de leur cours qui répond à $\varphi = t^{(m)}$ jusqu'à l'origine de leur développement. De plus, le $m^{ème}$ coefficient est l'arc entier $t^{(m)}$ de la circonférence génératrice : le $m+1^{ème}$ est l'unité et tous les suivans étant nuls, la série se termine au terme qui contient la $m+1^{ème}$ puissance de $(\varphi - t^{(m)})$.

Au contraire, si l'on veut exprimer l'arc de la $m^{ème}$ développante par l'arc entier φ de la circonférence génératrice ; le premier ayant son origine au point $\varphi = t^{(m-1)}$, est donné par une fonction algébrique entière de φ du degré $m+1$, le coefficient de $\frac{\varphi^{m+1}}{1.2...m+1}$ est l'unité, celui de φ^m est nul; ceux de la $m-1^{ème}$, $m-2^{ème}$....., $1^{ère}$ puissance de φ, se présente sous la forme de fonctions algébriques entières des variables séparées t', t'' ..... $t^{(m-1)}$.

Il résulte de cet exposé, que la $m^{ème}$ développante du cercle est exprimée par une fonction algébrique entière de l'arc φ ou de l'arc $(\varphi - t^{(m)})$, et que les coefficiens de cet arc peuvent être déterminés à volonté, ou par la longueur de l'arc intercepté sur chaque développante successive entre son point d'origine et le point d'origine de son développement, ou par les arcs de la circonférence génératrice qui correspondent à ceux-là. De là un moyen facile de construire toutes les équations algébriques, par les développantes du cercle inférieures

Digitized by Google

d'une unité au degré de ces équations. Que la proposée soit

$$\frac{x^{m+1}}{1.2\ldots m+1} + a\frac{x^m}{1.2\ldots m} + b\frac{x^{m-1}}{1.2\ldots m-1} \ldots + m\frac{x^2}{2} + px = q,$$

il suffira de prendre les arcs déterminés plus haut respectivement égaux à a, b, c ..... m, p; et l'une des valeurs de x, sera construite par l'arc $\varphi - t^{(m)}$ correspondant sur la circonférence génératrice à l'arc q sur σ.

Que si l'on veut construire l'une des racines par l'arc entier φ, les arcs t', t'' ... $t^{(m-1)}$ répondant sur la circonférence génératrice à chaque point d'origine des développantes successives, se trouvent alors déterminées par les coefficiens de la proposée. De plus, il est aisé de faire voir par la formation même de la courbe, que ces arcs ne sont autre chose que les valeurs de x qui satisfont aux dérivées successives de la proposée, égalées à zéro, et prises en y faisant varier x seulement.

Cette double construction donne l'une des valeurs de x. La seconde peut s'étendre à toutes les valeurs de x, et construire à-la-fois tous les facteurs réels d'une équation algébrique d'un degré quelconque. Pour cela, il faut distinguer les diverses branches qui entrent dans la formation de la $m^{ème}$ développante du cercle.

On peut concevoir la formation de ces branches, en partant du cas le plus simple de tous. A partir du point où $\varphi = o$ sur la circonférence génératrice, la première développante forme deux branches égales, l'une répondante aux φ négatifs, l'autre aux φ positifs. Sur la première on a coupé un arc A, dont le point extrême répond à $\varphi = t'$ et au-delà de $\varphi = t'$; on a développé le reste de la première branche dans le sens où φ augmente. C'est le procédé de la construction précédente. Mais on voit qu'à partir du même point où $\varphi = t'$, on peut développer l'arc A de la première branche dans le sens contraire, celui où φ diminue. Alors la développante de A s'étend depuis $\varphi = t'$ jusqu'à $\varphi = o$; son rayon de courbure à ce dernier point est A, et a la même direction que le rayon de la circonférence génératrice à ce point. Si, au-delà

Digitized by Google

de ce point $\varphi = o$, le rayon de courbure A continue à se mouvoir dans le même sens, il enveloppe sur la seconde branche de la première développante un arc égal à A qui s'étend de $\varphi = o$ à $\varphi = -t'$. Enfin au-delà du point de la seconde branche de la première développante répondant à $\varphi = -t'$, le développement de cette branche en fournit une troisième dans le cours de la seconde développante ; et celle-ci est semblable à la première, mais dans le sens des φ négatifs.

C'est ainsi que la seconde développante du cercle se trouve formée de trois branches, sur chacune desquelles on peut construire l'une des racines de l'équation du troisième degré. Il résulte, au surplus, de la formation ci-dessus, que ces trois branches se réduisent à une seule dans certains cas, et qu'alors il n'y a qu'une racine possible, quelque valeur qu'on donne au terme tout constant de la proposée : d'où la distinction des différens ordres d'imaginaires.

Des procédés analogues conduisent à la distinction et à l'expression analytique des $\overline{m+1}$ branches qui composent en général la $m^{ième}$ développante du cercle. Au moyen de ces branches, on parvient à la construction simultanée de toutes les racines réelles de l'équation du degré $m+1$, aux caractères de la réalité de ces racines. Ces constructions donnent, par des arcs de cercle, la valeur absolue des racines cherchées. On peut aussi en conclure diverses séries pour exprimer ces racines. L'une de ces séries donne une formule nouvelle pour exprimer une fonction quelconque, de telle racine qu'on voudra, d'une équation algébrique. Cette formule, différente de celle de *Lagrange*, se rapproche, à la notation près, de celle d'*Arbogast*, pour le retour des suites. Elle a sur celle-ci l'avantage de présenter dans un seul terme, sous le signe $\int$, les limites des termes qu'on y néglige, en s'arrêtant à un terme quelconque de la série.

L'application des développantes du cercle à la construction des racines présente, comme les courbes paraboliques, les divers phénomènes de la formation et de la liaison de ces racines : elle a de plus sur ces courbes

Digitized by Google

courbes l'avantage d'indiquer la liaison des racines d'une équation algébrique, avec les racines de toutes ses dérivées successives.

Cette liaison, intéressante pour la théorie des équations, devient un inconvénient, s'il s'agit de construire l'une des racines seulement ; à cause de la longueur des calculs que nécessite la détermination des racines correspondantes à celle-là dans les dérivées de la proposée. Toute considération de ces dérivées se trouve écartée dans la construction suivante qui n'emploie que ses seuls coefficiens. La proposée étant du degré $m+1$ sans second terme ; sur un cercle tracé du rayon 1, on marquera l'origine du développement sur un point θ à l'extrémité du diamètre horizontal, et supposant au-dessus, au-dessous de ce diamètre la direction des arcs φ négatifs et positifs ; du point θ sur l'horizontale indéfiniment prolongée, on coupera une droite égale en longueur au coefficient de $\frac{x^{m-1}}{1.2....m-1}$ dans la direction de θ vers le centre du cercle, si ce coefficient est positif ; dans la direction contraire, s'il est négatif. A l'extrémité de cette droite, on tirera une perpendiculaire égale au coefficient de $\frac{x^{m-2}}{1.2....m-2}$ au-dessous de l'horizontale, si ce coefficient est positif ; au-dessus, s'il est négatif. On continuera à mener perpendiculairement les unes sur les autres m droites égales en longueur aux coefficiens de x ; ces droites étant horizontales pour les coefficiens impairs, en commençant par celui de x^{m-1} : verticales pour les coefficiens pairs ; et la double direction qu'elles peuvent prendre à droite ou à gauche de la verticale dans le premier cas, au-dessus ou au-dessous de l'horizontale dans le second cas, étant déterminée par le signe de ces coefficiens.

Cela posé, la $m^{ème}$ droite égale en longueur au terme tout constant de la proposée, détermine un arc σ sur le cours de la $m^{ème}$ développante. Si dans le cours de cet arc σ il n'y a aucun point de rebroussement, la racine cherchée est réelle et construite par l'arc correspondant à σ sur la circonférence génératrice. De plus, cette racine est celle qui

Digitized by Google

s'évanouit avec le terme tout constant de la proposée, comme cela résulte de sa construction même.

Dans le cas contraire, cette racine est imaginaire; et il suit encore de la construction ci-dessus, qu'elle ne peut l'être que du premier ordre seulement. Mais alors comme le cours entier de la $m^{ème}$ développante se trouve déterminé par le terme constant de la proposée : il sera aisé de construire telle autre racine qu'on voudra.

Désignons par *Arc.* dév. D l'arc d'une courbe dont la développante est D, et distinguons par un, deux, trois... traits cet arc suivant qu'il appartient à la 1.re, 2.e, 3.e ..... développante du cercle. Si $M, P, Q. R$..... indiquent de certaines fonctions des coefficiens de la proposée, fonctions dont la formation est facile à saisir, et n'exige que la solution de degrés inférieurs au degré de celle-ci, on peut toujours exprimer les diverses racines de la proposée par des fonctions de cette forme :

$$x = Arc.\text{dév.}[M + Arc'.\text{dév.}[N + Arc''.\text{dév.}[P + Arc'''.\text{dév.}[Q + \&c.]]]].$$

C'est ainsi que pour l'équation du troisième degré

$$\frac{x^3}{2.3} - p.x + q = 0,$$

on trouve

$$x = Arc.\text{ dév. }[p + Arc'.\text{ dév. }\left\{\frac{(2p)^{3/2}}{3} - q\right\}].$$

Cette notation a l'avantage de s'étendre à tous les degrés, et de pouvoir, avec les modifications convenables, exprimer toutes les racines de la proposée.

Elle présente le symbole des constructions géométriques, par lesquelles on détermine un arc de cercle égal à la racine cherchée. L'objet du problème général est de présenter le symbole des opérations arithmétiques, au moyen desquelles on puisse déterminer cette racine en

Digitized by Google

nombres. Le premier symbole ne peut qu'imparfaitement remplacer le second; mais peut-être ouvrira-t-il une nouvelle route pour y parvenir.

§. I.er

Des Formules qui expriment les Développantes successives d'une Courbe donnée.

[1.] Aux coordonnées que l'on emploie ordinairement pour exprimer l'équation d'une courbe, on peut substituer les élémens mêmes de celle-ci, et l'angle de contingence que forment ces élémens entre eux. Alors, pour chaque point de la courbe, l'une des coordonnées est la longueur de l'arc depuis ce point jusqu'à un point fixe sur son cours; l'autre est la différence des angles que forment les tangentes aux deux points extrêmes de cet arc avec une même ligne droite.

Cette espèce de coordonnées, qui ne diffère pas au fond des coordonnées polaires à centre variable, se présente naturellement dans la considération des développées. Si on développe, en effet, une courbe quelconque, la longueur de l'arc développé, la somme des angles de contingence que forment ses élémens entre eux, sont précisément les variables qui déterminent la nature de la courbe tracée par le développement; aussi est-ce pour déterminer les courbes qui ont leurs développées semblables à elles-mêmes, que ces coordonnées ont été d'abord employées par *Euler* (*).

[2.] r étant le rayon de courbure d'une courbe s, $d\varphi$ l'angle de contingence formé par ses élémens successifs ds et ds'; désignons par σ la développante de la courbe s, il est aisé de voir qu'on aura entre σ, s, φ, les équations

(*) Anciens Commentaires de Pétersbourg, tome XII. Calcul intégral de *Lacroix*, tome II, *page 389*.

Digitized by Google

$$\Phi = \int \frac{ds}{r} \quad \text{et} \quad \sigma = \int s\, d\Phi ;$$

si donc la courbe s est déterminée par une équation entre s et Φ, équation qui dès-lors se réduira à une autre qui donnera s par une fonction de Φ; σ sera lui-même donné par une nouvelle fonction de Φ, qui sera la fonction primitive de celle-là. On voit d'ailleurs que, dans cette nouvelle équation, Φ exprimera encore la somme des angles de contingence que forment les élémens successifs de σ. Ainsi la première développante de s et toutes les développantes successives de celle-là seront données par des équations analogues à celle dont on est parti pour s.

Nous désignerons, pour abréger, l'angle Φ ou la somme des angles de contingence de l'arc s sous le nom d'*angle de courbure* de cet arc, et nous prendrons pour Φ l'arc d'un cercle tracé du rayon 1 qui mesure cet angle. Il suit de cette définition que, toutes les fois que l'arc s de la développée et l'arc σ de la développante ont leur origine commune au point où commence le développement, les arcs de courbure de s et de σ seront égaux, et qu'il en sera de même pour l'arc de courbure de toutes les développantes de σ. En général, l'arc de courbure d'une portion quelconque de la développée sera en même temps l'arc de courbure de la portion de la développante comprise entre les rayons de courbure de celle-ci, menés par les deux points extrêmes de la première.

[3.] Soit une courbe s exprimée en valeur de son arc de courbure Φ, par l'équation $s = f:\Phi$; s et Φ étant pris dans le même sens, en sorte qu'ils croissent en même temps l'un et l'autre.

Nommons $\overline{\sigma}'$ la première développante de s, lorsqu'on développe celle-ci à partir du point $s = 0$, et dans le sens où s, Φ croissent; on aura

$$\overline{\sigma}' = 'f:\Phi + const., \quad \overline{\Sigma}' = 'f:t' + const.,$$

$\overline{\Sigma}'$ étant l'arc de $\overline{\sigma}'$ qui correspond à $\Phi = t'$.

Digitized by Google

Je désigne par σ' la différence des deux arcs $\overline{\sigma'}$ et $\overline{\Sigma'}$; $\overline{\Sigma'}$ étant $< \overline{\sigma'}$, $\varphi - t'$ sera l'arc de courbure de $\overline{\sigma'}$; et en faisant, pour abréger,

$$'f : t' = \Sigma',$$

on trouve

$$\sigma' = 'f : \varphi - \Sigma'.$$

Je développe σ' dans le sens où φ augmente et à partir de $\sigma' = 0$; on trouve

$$\overline{\sigma''} = ''f : \varphi - \varphi\Sigma' + const. ;$$

$\overline{\sigma''}$ désignant la développante de σ'. Coupant sur $\overline{\sigma''}$, à partir de son origine un arc $\overline{\Sigma''}$ pour l'extrémité duquel $\varphi = t''$,

$$\overline{\Sigma''} = ''f : t'' - t''.\Sigma' + const.,$$

ce qui donne pour la différence σ'' des deux arcs $\overline{\sigma''}$, $\overline{\Sigma''}$; en faisant, pour abréger, $\Sigma'' = ''f : t'' - t''.\Sigma'$,

$$\sigma'' = ''f : \varphi - \varphi\Sigma' - \Sigma''.$$

En développant de même σ'' dans le sens où φ augmente, à commencer du point où $\varphi = t''$, et désignant par $\overline{\sigma'''}$ la nouvelle courbe tracée par ce développement,

$$\overline{\sigma'''} = '''f : \varphi - \frac{\varphi^2}{2}.\Sigma' - \varphi\Sigma'' + const.,$$

$$\overline{\Sigma'''} = '''f : t''' - \frac{\overline{t'''}^2}{2}\overline{\Sigma'} - t'''.\Sigma'' + const. ;$$

$\overline{\Sigma'''}$ étant l'arc de σ''', dont l'extrémité postérieure répond à $\varphi = t'''$. Donc pour tous les points de σ''' qui correspondent à $\varphi > t'''$, faisant $\overline{\sigma'''} - \overline{\Sigma'''} = \sigma'''$,

Digitized by Google

$$\sigma''' = {}'''f:\varphi - \frac{\varphi^2}{2}.\Sigma' - \varphi\Sigma'' - \Sigma''' \ldots \Sigma''' = {}'''f:t''' - \frac{\overline{t'''}^2}{2}\Sigma' - t'''.\Sigma'',$$

formule où $\varphi - t'''$ est l'arc de courbure de σ'''.

Il est aisé de voir que les mêmes procédés de calcul s'étendent à toutes les développantes successives de la courbe s, en coupant sur chacune d'elles un arc $\overline{\Sigma}^{(\ )}$ au-delà duquel on commence le développement de celle-ci, et en ayant soin de suivre tous les développemens dans le sens où φ augmente. Désignant donc par $\sigma^{(m)}$ la $m^{ème}$ développante de s prise de cette manière, σ^m sera donnée par l'équation suivante :

$$(1)\begin{cases} \sigma^{(m)} = {}^{(m)}f:\varphi - \dfrac{\varphi^{m-1}}{1.2\ldots m-1}.\Sigma' - \dfrac{\varphi^{m-2}}{1.2\ldots m-2}.\Sigma'' - \dfrac{\varphi^{m-3}}{1.2\ldots m-3}\Sigma''' \\ \qquad \ldots\ldots - \dfrac{\varphi^2}{2}\Sigma^{(m-2)} - \varphi\Sigma^{(m-1)} - \Sigma^{(m)}, \\ \Sigma^{(m)} = {}^{(m)}f:t^{(m)} - \dfrac{\overline{t^{(m)}}^{m-1}}{1.2\ldots m-1}.\Sigma' - \dfrac{\overline{t^{(m)}}^{m-2}}{1.2\ldots m-2}.\Sigma'' - \dfrac{\overline{t^{(m)}}^{m-3}}{1.2\ldots m-3}\Sigma''' \\ \qquad \ldots\ldots - \dfrac{\overline{t^{(m)}}^2}{2}\Sigma^{(m-2)} - t^{(m)}.\Sigma^{(m-1)}; \end{cases}$$

expression où l'arc $\sigma^{(m)}$ de la $m^{ème}$ développante commence à $\varphi = t^{(m)}$, en sorte que $\varphi - t^{(m)}$ exprime son arc de courbure.

[4.] Si la courbe s est la circonférence d'un cercle tracé du rayon 1, on a $f:\varphi = \varphi$, ce qui réduit la formule (1) à

$$(2)\quad \sigma^m = \frac{\varphi^{m+1}}{1.2\ldots m+1} - \frac{\varphi^{m-1}}{1.2\ldots m-1}\Sigma' - \frac{\varphi^{m-2}}{1.2\ldots m-2}\Sigma'' \ldots$$
$$\ldots - \frac{\varphi^2}{2}\Sigma^{(m-2)} - \varphi.\Sigma^{(m-1)} - \Sigma^{(m)};$$

et l'on a pour déterminer Σ', Σ'', Σ''' ....., par t', t'', t''' ....., les équations

Digitized by Google

$$(3)\begin{cases}\Sigma' = \dfrac{\overline{t'}^{2}}{2};\\[2ex] \Sigma'' = \dfrac{\overline{t''}^{3}}{2.3} - t''.\Sigma,\\[2ex] \Sigma''' = \dfrac{\overline{t'''}^{4}}{2.3.4} - \dfrac{\overline{t'''}^{2}}{2}\Sigma' - t'''.\Sigma'',\\[2ex] \Sigma^{(m)} = \dfrac{\overline{t^{(m)}}^{m+1}}{1.2\ldots m+1} - \Sigma'.\dfrac{\overline{t^{(m)}}^{m-1}}{1.2\ldots m-1} - \Sigma''.\dfrac{\overline{t^{(m)}}^{m-2}}{1.2\ldots m-2}\ldots\\[2ex] \qquad\ldots - \Sigma^{(m-2)}.\dfrac{\overline{t^{(m)}}^{2}}{2} - \Sigma^{(m-1)}.t^{(m)}.\end{cases}$$

Ayant donc tracé *(fig. 1)* du centre C et du rayon 1 la circonférence θ, θ', $\theta''\ldots\varphi$; du point θ, origine de $\theta\varphi = \varphi$, on tracera par le développement de cet arc la première développante $\theta\sigma' = \overline{\sigma'}$, et coupant sur la circonférence génératrice l'arc $\theta\theta' = t'$; θ' déterminera sur $\overline{\sigma'}$ le point ε', à partir duquel on développera $\varepsilon'\sigma' = \sigma'$, ce qui tracera $\varepsilon'\sigma'' = \overline{\sigma''}$; sur la circonférence génératrice, on coupera l'arc $\theta\theta'' = t''$, ce qui déterminera les points θ'', s'', ε''; et du point ε'', on développera $\varepsilon''\sigma'' = \sigma''$, ce qui tracera $\varepsilon''\sigma''' = \overline{\sigma'''}$. On continuera cette marche de développement jusqu'à la $\overline{m-1}^{ème}$ développante $\varepsilon^{(m-2)}\sigma^{(m-1)}$ *(fig. 2)* $= \overline{\sigma^{(m-1)}}$, dont le point d'origine $\varepsilon^{(m-2)}$ répond à $\varphi = t^{(m-2)}$ sur la circonférence génératrice. Prenant sur cette circonférence l'arc $\varphi = t^{(m-1)}$, cet arc détermine sur $\overline{\sigma^{(m-1)}}$ le point $\varepsilon^{(m-1)}$, à partir duquel on développera l'arc restant $\varepsilon^{(m-1)}\sigma^{(m-1)} = \sigma^{(m-1)}$, ce qui tracera $\varepsilon^{(m-1)}\sigma = \overline{\sigma^{(m)}}$, dont l'arc $\varepsilon^{(m-1)}.\varepsilon$ s'étend depuis $\varphi = t^{(m-1)}$ répondant à l'origine de $\overline{\sigma^{(m)}}$ jusqu'à $\varphi = t^{(m)}$, qui détermine le point ε, et ce point ε sera l'origine de l'arc $\varepsilon\sigma^{(m)} = \sigma^{(m)}$, dont l'expression est donnée (équation 2) par la valeur de l'arc entier φ qui est employé dans les développemens successifs et par les arcs t', t'',

Digitized by Google

t''', &c. qui déterminent la position de ε', ε'', ε''' ..... sur chaque développante.

Observons que, d'après cette construction, $\overline{\sigma}^m$ ou l'arc entier $\varepsilon^{(m-1)}.\sigma$ *(fig. 2)*, sera donnée par la même équation que σ^m, en y changeant seulement $t^{(m)}$ et $t^{(m-1)}$ dans le terme sans φ. On a donc pour exprimer l'arc $\overline{\sigma}^m$ de la $m^{ème}$ développante, pris à partir de son origine sur $\sigma^{(m-1)}$,

$$(4)\begin{cases}\overline{\sigma}^m = \dfrac{\varphi^{m+1}}{1.2...m+1} - \Sigma'.\dfrac{\varphi^{m-1}}{1.2...m-1} - \Sigma''.\dfrac{\varphi^{m-2}}{1.2...m-2} ... - \varphi.\Sigma^{(m-1)} - \Sigma^{(m)},\\ \overline{\Sigma}^m = \dfrac{t^{(m-1)\,m+1}}{1.2...m+1} - \Sigma'.\dfrac{t^{(m-1)\,m-1}}{1.2...m-1} - \Sigma''.\dfrac{t^{(m-1)\,m-2}}{1.2...m-2} ... - t^{(m-1)}.\Sigma^{(m-1)},\end{cases}$$

Σ', Σ''... $\Sigma^{(m-1)}$ étant toujours donnés par les équations (3).

[5.] Si, dans l'équation (4), les coefficiens de φ doivent avoir de certaines valeurs déterminées d'avance, Σ', Σ'', Σ''' ... sont connus, et les arcs t', t'', t'''..., qui ne sont plus donnés immédiatement, doivent satisfaire aux équations (3).

On voit d'ailleurs qu'à l'égard de la courbe $\overline{\sigma}^{(m)}$,

$$\frac{d\,\sigma^{-(m)}}{d\varphi},\quad \frac{d^2\,\sigma^{-(m)}}{d\varphi^2} ....., \text{ &c.},$$

représentent ses développées ou la $\overline{m-1}^{ème}$, $\overline{m-2}^{ème}$ ....., &c. développante de s : donc les équations

$$\frac{d\,\sigma^{-(m)}}{d\varphi} = 0,\quad \frac{d^2\,\sigma^{-(m)}}{d\varphi^2} ....., \text{ &c.},$$

représentent les points d'origine de $\sigma^{(m-1)}$, $\sigma^{(m-2)}$, $\sigma^{(m-3)}$, &c., et donnent conséquemment pour valeur de φ les arcs $t^{(m-1)}$, $t^{(m-2)}$, $t^{(m-3)}$... &c. qui, dans la construction précédente, appartiennent à ces points d'origine. Il s'ensuit de là, que les équations (3) ne sont autre chose que les dérivées successives de l'équation (4), en y faisant seulement varier

σ^m

Digitized by Google

σ^m et Φ, égalant à zéro chaque dérivée, et mettant $t^{(m-1)}$, $t^{(m-2)}$, $t^{(m-3)}$..... t'', t' pour Φ dans les 1.re, 2.e, 3.e ... $\overline{m-2}^{ème}$, $\overline{m-1}^{ème}$ dérivées de l'équation (2).

De là un moyen facile de déterminer les arcs t', t'', t''' ..... &c. par les coefficiens de Φ dans l'équation (2).

[6.] Soit proposée l'équation algébrique du degré $m+1$ sans second terme,

$$\frac{x^{m+1}}{1.2...m+1} + a\frac{x^{m-1}}{1.2...m-1} + b\frac{x^{m-2}}{1.2...m-2} ... + n\frac{x^2}{2} + px + q = 0;$$

que je mets, pour abréger, sous la forme suivante (*) :

$$q + F:x = 0.$$

On demande de placer les points d'origine ε', ε'', ε''' ... $\varepsilon^{(m-1)}$ *(fig. 3 et 5)* de telle sorte que l'on ait pour exprimer l'arc $\alpha^{(m)}$ ou $\varepsilon^{(m-1)}\sigma^m$ de la $m^{ème}$ développante, l'équation

$$\overline{\sigma^m} + \overline{\Sigma^m} = F:\Phi,$$

en comparant $F:\Phi$ à la valeur de σ^m (équation 4); on a d'abord

$$\Sigma' + a = 0,\ \Sigma'' + b = 0,\ \Sigma''' + c = 0 ... \Sigma^{(m-2)} + n = 0,\ \Sigma^{(m-1)} + p = 0,$$

et par ces valeurs de Σ', Σ'', Σ''' ..., il faut déterminer t', t'', t''' .... On égalera donc à zéro (5) les dérivées de $F:x$; et $t^{(m-1)}$ sera donnée

par $F':x = 0$, $t^{(m-2)}$ par $F'':x = 0$ .....,

t'' par $F^{(m-2)}:x = 0$, t' par $F^{(m-1)}:x = 0$.

En effet, on a alors

(*) En faisant $\frac{x^{m+1}}{1.2...m+1} + a\frac{x^{m-1}}{1.2...m-1} ..... + n\frac{x^2}{2} px = F:x.$

Digitized by Google

$$\frac{\overline{t'}^{2}}{2} + a = 0,$$

$$\frac{\overline{t''}^{3}}{2.3} + at'' + b = 0,$$

$$\frac{\overline{t'''}^{4}}{2.3.4} + a\frac{\overline{t'''}^{2}}{2} + bt''' + c = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\overline{t^{(m-1)}}^{m}}{1.2\ldots m} + a\frac{\overline{t^{(m-1)}}^{m-2}}{1.2\ldots m-2} \ldots\ldots + n.\frac{t^{(m-1)}}{1} + p = 0;$$

et en substituant ces valeurs dans les équations (3),

$$\Sigma' = \frac{\overline{t'}^{2}}{2} = -a;$$

$$\Sigma'' = \frac{\overline{t''}^{3}}{2.3} - t''.\Sigma' = \frac{\overline{t''}^{3}}{2.3} + at'' = -b,$$

$$\Sigma''' = \frac{\overline{t'''}^{4}}{2.3.4} - \frac{\overline{t'''}^{2}}{2}\Sigma' - t'''.\Sigma'' = \frac{\overline{t'''}^{4}}{2.3.4} + a\frac{\overline{t'''}^{2}}{2} + bt''' = -c,$$

&c.

Substituant ces valeurs dans l'équation (4), elle devient

$$\sigma^{m} + \Sigma^{m} = \frac{\varphi^{m+1}}{1.2\ldots m+1} + a\frac{\varphi^{m-1}}{1.2\ldots m-1} + b\frac{\varphi^{m-2}}{1.2\ldots m-2} \ldots + p.\Phi = F:\Phi,$$

ce qui est l'expression demandée pour $\overline{\sigma^{m}}$. A l'égard de $\overline{\Sigma^{m}} = F:t^{(m-1)}$, on peut le déterminer, en éliminant Φ entre les deux équations

$$\overline{\Sigma^{(m)}} = F:\Phi, \qquad F':\Phi = 0.$$

[7.] Dans l'équation (1), Φ est égal à l'arc $t^{(m)}$ qui détermine le point d'origine de $\sigma^{(m)}$ plus à l'arc de courbure de σ^{m}. Nommant donc $\downarrow$ cet arc de courbure, $\Phi = t^{(m)} + \downarrow$, qui substitué dans l'équation (1), donne

Digitized by Google

$$\sigma^{(m)} = {}^{m}f:(t^m+\downarrow) - \frac{(t^m+\downarrow)^{m-1}}{1.2\ldots m-1}\Sigma' - \frac{(t^m+\downarrow)^{m-2}}{1.2\ldots m-2}\Sigma'' \ldots\ldots$$
$$- (t^m+\downarrow)\Sigma^{(m-1)} - \Sigma^{(m)},$$

série qui, après le développement des puissances de $(\downarrow + t^{(m)})$, étant partagée en deux autres, l'une ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de $\downarrow$, depuis $\downarrow^{m+1}$ jusqu'à $\downarrow^{0}$; l'autre, par rapport aux puissances croissantes au-dessus de $\downarrow^{m+1}$, devient

$$\sigma^{(m)} = \begin{cases} A\frac{\downarrow^{m+1}}{1.2\ldots m+1} + B\frac{\downarrow^{m}}{1.2\ldots m} + C\frac{\downarrow^{m-1}}{1.2\ldots m-1} \ldots + P\downarrow + Q \\ + \frac{\downarrow^{m+2}}{1.2\ldots m+2}.f'':t^{(m)} + \frac{\downarrow^{(m+3)}}{1.2\ldots m+3}.f'''':t^m + \&c.; \end{cases}$$

et on a pour $A, B, C \ldots\ldots P, Q$, les équations

$$A = f':t^{(m)},$$
$$B = f:t^{(m)},$$
$$C = {}'f:t^{(m)} - \Sigma',$$
$$D = {}''f:t^{(m)} - t^{(m)}.\Sigma' - \Sigma'',$$
$$E = {}'''f:t^{(m)} - \frac{\overline{t^{(m)}}^{2}}{2}.\Sigma' - t^{(m)}.\Sigma'' - \Sigma''',$$
$$F = {}^{IV}f:t^{(m)} - \frac{\overline{t^{(m)}}^{3}}{2.3}.\Sigma' - \frac{\overline{t^{(m)}}^{2}}{2}.\Sigma'' - t^{(m)}.\Sigma''' - \Sigma^{IV},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Q = {}^{m}f:t^{(m)} - \frac{\overline{t^{(m)}}^{m-1}}{1.2..m-1}.\Sigma' - \frac{\overline{t^{(m)}}^{m-2}}{1.2\ldots m-2}.\Sigma'' \ldots - t^{(m)}.\Sigma^{(m-1)} - \Sigma^{(m)} = 0.$$

Si on compare ces expressions avec celles de $s, \sigma', \sigma'', \sigma''' \ldots\ldots \sigma^m$ [3.], on reconnaît que $B, C, D, E \ldots P$, expriment respectivement les arcs de

$$s, \quad \sigma', \quad \sigma'', \quad \sigma''' \ldots\ldots \sigma^{(m-1)},$$

Digitized by Google

qui ont pour arcs de courbure

$$t^{(m)}, \quad t^{(m)} - t', \quad t^{(m)} - t'', \quad t^{(m)} - t''' \ldots t^{(m)} - t^{(m-1)};$$

en sorte que tous ces arcs des développantes successives de s s'étendent, d'un côté, jusqu'au point de leur cours qui répond à $\Phi = t^{(m)}$; de l'autre, jusqu'au point marqué sur chacune d'elles pour origine de leur développement.

On peut conclure de là que, quelle que soit la courbe $\sigma^{(m)}$, l'arc $\varepsilon^m \sigma^m$ de cette courbe est donné en valeur de son arc de courbure par l'équation suivante *(fig. 2)*,

$$\varepsilon^{(m)} \sigma^{(m)} = \downarrow . (\varepsilon^{m-1} . t^m) + \frac{\downarrow^2}{1.2} . (\varepsilon^{m-2} . t^{m-1})$$
$$+ \frac{\downarrow^3}{1.2.3} . [\varepsilon^{m-3} . t^{m-2}] + \frac{\downarrow^4}{1.2.3.4} . [\varepsilon^{m-4} . t^{m-3}] + \&c.,$$

ou $\varepsilon^m \sigma^m$ et $\downarrow$, variant seuls à-la-fois, les arcs $\varepsilon^{(m-1)} t^{(m)}$, $\varepsilon^{m-2} t^{m-1}$, &c. qui sont arbitraires, peuvent introduire dans la série telles constantes qu'on voudra pour les coefficiens de $\downarrow$.

[8.] La série qui précède peut se démontrer directement par le théorème de *Taylor*. Sans nous y arrêter, nous observerons qu'elle est toujours terminée, si $\sigma^{(m)}$ est l'une des développantes du cercle.

Ainsi, en suivant le même procédé de développement déjà expliqué [4.], on aura pour exprimer l'arc $\varepsilon^v \sigma^v$ de la 5.me développante du cercle *(fig. 1)*, l'équation

$$\varepsilon^v \sigma^v = \downarrow . [q^v . \varepsilon^{iv}] + \frac{\downarrow^2}{1.2} . [r^v . \varepsilon'''] + \frac{\downarrow^3}{2.3} . [t^v . \varepsilon'']$$
$$+ \frac{\downarrow^4}{2.3.4} . [s^v . \varepsilon'] + \frac{\downarrow^5}{2.3.4.5} . (\theta^v \theta) + \frac{\downarrow^6}{1.2.3.4.5.6},$$

$\downarrow$ étant égal à l'arc $\theta^v \Phi$ qui mesure sur la circonférence génératrice l'arc de courbure de $\varepsilon^v \sigma^v$.

Cette formule très-simple s'étend sans difficulté à une développante

Digitized by Google

d'un ordre quelconque, et le plus haut exposant de Φ y est toujours supérieur d'une unité à l'ordre de la développante qui est ainsi exprimée par l'équation algébrique entière du degré $m+1$ avec tous ses termes.

[9.] Dans la construction précédente, on a supposé que σ et Φ croissent toujours en même temps. Cette supposition n'a donné qu'une seule des branches que composent les développantes successives d'une courbe donnée. On parvient aisément, par les constructions qui suivent, à former et à exprimer toutes ces branches.

De même que $\varepsilon^{(m-1)}.\sigma^{(m-1)} = \sigma^{(m-1)} - \varepsilon^{(m-2)}.\varepsilon^{(m-1)}$ *(fig. 2)* donne par son développement de $\varepsilon^{(m-1)}$ vers $\sigma^{(m-1)}$ la branche $\varepsilon^{(m-1)}.\sigma^{(m)}$ de la $m^{ième}$ développante [*voyez* les art. 4 et 5]; l'arc restant de $\sigma^{(m-1)}$ ou $\varepsilon^{(m-1)}.\varepsilon^{(m-2)}$ donnera, par son développement de $\varepsilon^{(m-1)}$ vers $\varepsilon^{(m-2)}$, la nouvelle branche $\varepsilon^{(m-1)}\,a$ de la $m^{ième}$ développante.

A chaque point de la première branche, Φ est $> t^{(m-1)}$; le rayon de courbure est $\sigma^{(m-1)} - \varepsilon^{m-2}.\varepsilon^{m-1}$, et l'incrément $d\Phi$ est positif.

A chaque point de la seconde branche, depuis $\varepsilon^{(m-1)}$ ou $\Phi = t^{(m-1)}$ jusqu'au point a ou $\Phi = t^{(m-2)}$, le rayon de courbure est au contraire $\varepsilon^{(m-2)}.\varepsilon^{(m-1)} - \overline{\sigma}^{(m-1)}$, et l'incrément $d\Phi$ est négatif : on a donc également pour tous les points de ces deux branches,

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon^{(m-1)}.\overline{\sigma}^{(m)} \\ \varepsilon^{m-1}\,a\end{matrix}\right\} = \int d\Phi\,[\sigma^{m-1} - \varepsilon^{m-1}.\varepsilon^{m-2}].$$

Si donc on rapporte l'origine de ces deux branches au même point ε^{m-1} ou $\Phi = t^{(m-1)}$, la constante est la même; et en faisant, pour abréger,

$$\frac{\varphi^{m+1}}{1.2\ldots m+1} - \Sigma'.\frac{\varphi^{m-1}}{1.2\ldots m-1} \ldots - \Phi.\Sigma^{m-1} = F:\Phi,$$

on a, pour tous les points de $\varepsilon^{(m-1)}.\sigma^{(m)}$, $\varepsilon^{(m-1)}\,a$, l'équation identique

Digitized by Google

$$\left.\begin{matrix} \varepsilon^{m-1}.\sigma^{m} \\ \varepsilon^{m-1}.a \end{matrix}\right\} = F:\Phi - F:t^{(m-1)}. \qquad (\gamma)$$

D'où il s'ensuit que, si, d'un point pris à volonté sur une développante d'un ordre quelconque, on développe en sens contraire les deux arcs de cette développante qui aboutissent à ce point, il forme lui-même un point de rebroussement dans la courbe qui résulte de ce développement; et que les arcs des deux branches de cette courbe étant rapportés à ce point commun comme origine, sont donnés par la même équation (γ).

[10.] La branche $\varepsilon^{m-1}a$ est tracée par le développement de $\varepsilon^{(m-1)}.\varepsilon^{(m-2)}$. Qu'on imagine un fil appliqué sur $\varepsilon^{(m-1)}.\varepsilon^{(m-2)}$ qui a tracé en le développant $\varepsilon^{(m-1)}a$; au point a, ce fil sera $\varepsilon^{(m-1)}a = \varepsilon^{(m-1)}.\varepsilon^{(m-2)}$. Je suppose qu'au-delà du point a, ce fil continue à se mouvoir dans le même sens, il s'enveloppera alors autour de la branche $\varepsilon^{(m-2)}b$, formée par le développement de $\varepsilon^{(m-2)}.\varepsilon^{(m-3)}$ [9.]; et il est évident qu'il continuera ce mouvement jusqu'à ce qu'il ait enveloppé sur cette branche un arc $\varepsilon^{(m-2)}.\varepsilon^{(m-1)}:2$, égal en longueur à $\varepsilon^{(m-1)}.\varepsilon^{(m-2)}$. Or, il est facile de se convaincre que l'arc $a\,\varepsilon^{(m-1)}:2$, qui est tracé par cet enveloppement, est continu à l'arc $\varepsilon^{(m-1)}a$, tracé par le développement antérieur; en sorte que ce double mouvement formera une seule branche $\varepsilon^{(m-1)}.\varepsilon^{(m-1)}:2$, dont les arcs au-delà du point a, tels que $\varepsilon^{(m-1)}.s''$, seront donnés par la même équation que les arcs $\varepsilon^{(m-1)}.s'$ en deçà de ce point. Ainsi, dans les équations (γ), la seconde exprime le cours entier de la seconde branche $\varepsilon^{(m-1)}\varepsilon^{(m-1)}:2$, formée d'abord par le développement du fil sur $\varepsilon^{(m-1)}.\varepsilon^{(m-2)}$, tracée ensuite par l'enveloppement du même fil autour de $\varepsilon^{(m-1)}.\varepsilon^{(m-1)}:2$.

[11.] Une courbe étant donnée et un point marqué sur son cours pour l'origine de son développement, le cours entier de la développante sera déterminé, dans tous les cas, au moyen de la construction précédente *(fig. 3)*. Soit $ss:1.s:2.s:3\ldots\ldots$, la courbe donnée s,

Digitized by Google

qui a les points de rebroussement $s:1$, $s:2\ldots$; que le point $\sigma:1$, correspondant à $\varphi = t:1$, soit marqué pour origine de son développement. Autour de ce point comme origine, la développante σ forme d'abord les deux branches $\sigma:1.\sigma$, $\sigma:1.\sigma:2$, dont les arcs sont exprimés par l'équation (γ),

$$\left.\begin{matrix}\sigma:1.\sigma\\ \sigma:1.t\end{matrix}\right\} = F:\varphi - F:t:1,$$

la seconde branche étant d'abord formée par le développement d'un fil sur $s1\sigma1$, ensuite par l'enveloppement du même fil sur $s:1.\sigma:2$.

Au-dela du point $\sigma:2$ qu'on continue à développer l'arc $\sigma:2.s:2$ de s, du point $\sigma:2$ vers $s:2$ ce qui tracera la branche $\sigma:2.\sigma:3$, d'abord par le développement du fil sur $\sigma:2.s:2$, ensuite par l'enveloppement de ce fil autour de $s:2.\sigma:3$.

A l'égard des arcs de cette branche, soit $t:2$ la valeur de φ au point $\sigma:2$, $t:2$ sera connu, puisque l'arc $s:1.\sigma:2$ l'est sur le cours de s. Or, on voit aisément qu'un arc de la seconde branche, tel que $\sigma:2.t$, étant rapporté au point $\sigma:2$ comme origine, est donné par $\sigma:2.t = F:t:2 - F:\varphi$: donc [9.] cette équation exprimera aussi un arc quelconque $\sigma:2.r$ de la branche $\sigma:2.\sigma:3$.

σ formera donc au-delà du point $\sigma:2$ une seconde branche, dont les arcs $\sigma:2.r$ sont donnés par l'équation

$$\sigma:2.r = F:t:2 - F:\varphi.$$

Au-delà du point $\sigma:3$ qu'on continue à développer $\sigma:3.s:3$ de $\sigma:3$ vers $s:3$, ce qui formera une nouvelle branche, terminée, si s a un nouveau point de rebroussement; infinie, si le cours de s est continu au-delà de $\sigma:3$. De plus, un arc $\sigma:3.p$ de cette branche sera

$$\sigma:3.p = F:\varphi - F:t:3,$$

$t:3$ étant la valeur de φ au point $\sigma:3$.

Digitized by Google

Il suit de cette énumération, qu'on peut pousser aussi loin qu'on voudra,

1.° Que si s a n points de rebroussement, σ en aura en général $n+1$;

2.° Qu'à ces $n+1$ points de rebroussement aboutiront les $n+2$ branches qui forment le cours de σ;

3.° Que si $t:1$, $t:2$, $t:3$ ..... désignent les valeurs de φ pour chacun de ces points, les $n+1$ branches de σ seront données deux à deux par des équations de cette forme :

$$\left.\begin{matrix}\sigma: \\ \sigma:\end{matrix}\right\} = F:\varphi - F:t: \qquad \left.\begin{matrix}\sigma: \\ \sigma:\end{matrix}\right\} = F:t: - F:\varphi, \qquad (\delta)$$

Les premières ayant lieu, si l'on rapporte les arcs des branches $\sigma:$ à un σ d'un indice impair, à commencer par $\sigma:1$ *(fig. 3)*; les secondes, au contraire, si l'on rapporte l'origine de ces branches à un σ d'un indice pair, à commencer par $\sigma:2$.

Enfin que, dans ces équations, chaque $t:$ doit avoir l'indice du point σ auquel on rapporte l'origine de ces branches.

[12.] Comme le rayon de courbure de σ est nul aux points $\sigma:1$, $\sigma:2$, $\sigma:3$ ....., les valeurs de φ qui satisferont à $\frac{d\sigma}{d\varphi} = 0$, seront celles de $t:1$, $t:2$, $t:3$...., d'où un moyen analogue à celui de l'art. 5, pour exprimer ces divers arcs en Σ', Σ'', Σ''' ..... par les diverses racines d'une même dérivée de la proposée.

Si le point $\sigma:1$ est tellement placé sur s *(fig. 3)*, que l'arc $\sigma:1.s:1$ soit plus grand que $s:1.s:2$; les trois branches $\sigma:1.\sigma:2$, $\sigma:2.\sigma:3$; $\sigma:3.\sigma:4$, sont remplacées par une seule formant un nœud autour du point $s:2$; ainsi les branches disparaissent deux à deux dans le cours de σ, qui est encore déterminé pour ce cas-là.

Observons qu'alors le rayon de courbure de σ au point s est égal à $s:1.\sigma:1 - s:1.s:2$; en sorte que $t:1$ n'est plus la valeur de φ qui

Digitized by Google

qui satisfait à $\frac{d\sigma}{d\varphi} = 0$. De là le moyen de trouver les valeurs de φ correspondantes aux divers arcs de σ; quoique, dans l'étendue de ces arcs, il n'y ait aucune valeur de φ pour $\frac{d\sigma}{d\varphi} = 0$.

[13.] Nous prendrons pour exemple les développantes du cercle.

Pour fixer les idées du point θ pris à volonté, on marquera la direction des arcs positifs de θ vers $\theta' : 1$, des arcs négatifs de θ vers $\theta' : 2$.

Ayant commencé à développer du point θ *(fig. 5)* l'arc indéfini $\theta\theta' : 1\ (+\varphi)$, ce qui donnera $\theta\sigma' : 1$ ou $\sigma' : 1$; et l'arc indéfini $\theta\theta' : 2\ (-\varphi)$, ce qui donnera $\theta\sigma' : 2$ ou $\sigma' : 2$; la première développante du cercle est formée des deux branches $\sigma' : 1$, $\sigma' : 2$, ayant leur origine commune au point θ pour $\varphi = 0$, et ces deux branches sont données l'une et l'autre par l'équation

$$\left.\begin{matrix}\sigma' : 1 \\ \sigma' : 2\end{matrix}\right\} = \frac{\varphi^2}{2}.$$

[14.] Sur $\sigma' : 1$ on marquera le point $\varepsilon' : 1$ pour origine du développement de σ'. L'angle $\theta\theta' : 1 = t' : 1$ qui correspond à ce point, détermine [11.] le cours entier de la seconde développante, qui est formée de trois branches; les deux premières $\varepsilon' : 1 . \sigma''$ ou $\sigma'' : 1$, $\varepsilon' : 1 . \varepsilon' : 2$ ou $\sigma'' : 2$, rapportées à $\varphi = t' : 1$, sont

$$\left.\begin{matrix}\sigma'' : 1 \\ \sigma'' : 2\end{matrix}\right\} = \frac{\varphi^3}{2.3} - \Sigma' : \varphi - \overline{\Sigma}'' : 1, \quad \overline{\Sigma}'' : 1 = \frac{\overline{t' : 1}^3}{2.3} - \Sigma' : t' : 1;$$

la troisième $\varepsilon' : 2 . \sigma'' : 2$ ou $\sigma'' : 3$, partant de $\varphi = t' : 2$, sera

$$-\sigma'' : 3 = \frac{\varphi^3}{2.3} - \Sigma' : \varphi - \overline{\Sigma}'' : 2, \quad \overline{\Sigma}'' : 2 = \frac{\overline{t' : 2}^3}{2.3} - \Sigma' t' : 2,$$

Le cours de la seconde développante ainsi déterminé, qu'on marque pour origine de son développement le point $\varepsilon'' : 1$ pour lequel

$$\varphi = \theta\theta'' : 1 = t'' 1,$$

Digitized by Google

$t'':1$ détermine le cours entier de la troisième développante σ''', qui est formée de quatre branches;

Pour les deux premières :

$$\left.\begin{matrix}\epsilon'':1\,.\,\sigma'''\,..\,\sigma\,.\,''':1\\ \epsilon'':1\,.\,\epsilon'':2\,...\,\sigma''':2\end{matrix}\right\} = \frac{\varphi^4}{2.3.4} - \Sigma'.\frac{\varphi^2}{2} - \Sigma''.\varphi - \overline{\Sigma}''':1,$$

$$\overline{\Sigma}''':1 = \frac{\overline{t''}^4:1}{2.3.4} - \Sigma'.\frac{\overline{t''}^2:1}{2} - \Sigma''.t'':1;$$

Pour les deux dernières :

$$\left.\begin{matrix}\epsilon'':3\,.\,\epsilon'':2\,..\,\sigma''':3\\ \epsilon'':3\,.\,\sigma''':2\,...\,\sigma''':4\end{matrix}\right\} = \frac{\varphi^4}{2.3.4} - \Sigma'.\frac{\varphi^2}{2} - \Sigma''\varphi - \overline{\Sigma}''':3,$$

$$\overline{\Sigma}''':3 = \frac{\overline{t''}^4:3}{2.3.4} - \Sigma'.\frac{\overline{t''}^2:3}{2} - \Sigma''.t'':3;$$

$\sigma''':1$, $\sigma''':2$ ayant leur origine à $\varphi = t'':1$; $\sigma''':3$, $\sigma''':4$ à $\varphi = t'':3$.

Que si l'on veut rapporter les deux branches intermédiaires au point $\epsilon'':2$ pour $\varphi = t'':2$; en faisant les arcs de $\epsilon'':2\,.\,\epsilon'':1 = \sigma''':2$, $\epsilon'':2\,.\,\epsilon'':3 = \sigma''':3$;

$$\left.\begin{matrix}-\sigma''':2\\ -\sigma''':3\end{matrix}\right\} = \frac{\varphi^4}{2.3.4} - \Sigma'.\frac{\varphi^2}{2} - \Sigma''\varphi - \overline{\Sigma}''':2;$$

$$\Sigma''':2 = \frac{\overline{t''}^4:2}{2.3.4} - \Sigma'.\frac{\overline{t''}^2:2}{2} - \Sigma''.t'':2.$$

A l'égard de $t'':1$, $t'':2$, $t'':3$, ce sont les trois racines de

$$\frac{\varphi^3}{2.3} - \Sigma'\varphi - \Sigma'', \quad [12.].$$

[15.] En suivant la même marche, il est aisé de voir que la quatrième développante du cercle aura dans son cours quatre points singuliers,

$$\epsilon''':1, \quad \epsilon''':2, \quad \epsilon''':3, \quad \epsilon''':4,$$

Digitized by Google

répondant aux arcs

$$\theta\theta''' : 1 = t''' : 1, \quad \theta\theta''' : 2 = t''' : 2, \quad \theta\theta''' : 3 = t''' : 3, \quad \theta\theta''' : 4 = t''' : 4;$$

que les cinq branches qui composent la quatrième développante, partant deux à deux de chacun de ces points de rebroussement, on a pour l'équation de chaque paire de branches,

$$\left.\begin{matrix} \sigma^{IV} : 1 \text{ (*)} & & \sigma^{IV} : 3 \\ & \text{ou} & \\ \sigma^{IV} : 2 & & \sigma^{IV} : 4 \end{matrix}\right\} = \frac{\varphi^5}{2.3.4.5} - \Sigma' . \frac{\varphi^3}{2.3} - \Sigma'' \frac{\varphi^2}{2} - \Sigma''' . \varphi - \Delta,$$

Δ étant la fonction entière, sans terme constant $\frac{\varphi^5}{2.3.4.5} - \ldots$, en y mettant sa valeur au point singulier qui est l'origine de σ : ; ce sera

$$t''' : 1 \text{ pour } \left\{\begin{matrix} \sigma^{IV} : 1 \\ \sigma^{IV} : 2 \end{matrix}\right., \quad t''' : 3 \text{ pour } \left\{\begin{matrix} \sigma^{IV} : 3 \\ \sigma^{IV} : 4 \end{matrix}\right..$$

Au contraire, si on rapporte ces branches à un ε d'un indice pair, leurs arcs avec le signe — seront exprimés par une équation semblable; mais il faudra mettre $t''' : 2$ dans

$$\Delta \text{ pour } \left\{\begin{matrix} \overline{\sigma^{IV}} : 2 \\ \overline{\sigma^{IV}} : 3 \end{matrix}\right., \quad t''' : 4 \text{ pour } \left\{\begin{matrix} \overline{\sigma^{IV}} : 4 \\ \overline{\sigma^{IV}} : 5 \end{matrix}\right..$$

[16.] Dans la construction de l'article 4, les points θ', θ'', θ'''..... sont disposés sur la circonférence génératrice de telle sorte, que l'on doit avoir

$$t' > 0, \quad t'' > t', \quad t''' > t'', \quad t^{IV} > t''' \ldots . \ t^{(m-1)} > t^{(m-2)};$$

alors l'équation (4) $\overline{\sigma^{(m)}} = F : \varphi - F : t^{(m-1)}$ donne pour $\overline{\sigma^{(m)}}$ la branche infinie de la $m^{ème}$ développante, qui s'étend de $\varphi = t^{(m-1)}$ à $\varphi = \infty$, $t^{(m-1)}$ étant la plus grande racine de $F' : \varphi = 0$.

(*) En supposant $\sigma^{IV} : 1 = \varepsilon''' : 1 \sigma^{IV}$, $\sigma^{IV} : 2 = \varepsilon''' : 1 . \varepsilon''' : 2$, $\sigma^{IV} : 3 = \varepsilon''' : 3 . \varepsilon''' : 2$, $\sigma^{IV} : 4 = \varepsilon''' : 3 . \varepsilon''' : 4$; ou $\overline{\sigma^{IV}} : 2 = \varepsilon''' : 2 . \varepsilon''' : 1$, $\overline{\sigma^{IV}} : 3 = \varepsilon''' : 2 . \varepsilon''' : 3$, $\overline{\sigma^{IV}} : 4 = \varepsilon''' : 4 . \varepsilon''' : 3$, $\overline{\sigma^{IV}} : 5 = \varepsilon''' : 4 . \sigma^{IV}$.

Digitized by Google

En général, $F':\Phi = o$ aura m racines que je range par ordre;

$$t^{(m-1)}:1,\quad t^{(m-1)}:2,\quad t^{(m-1)}:3,\quad t^{(m-1)}:4\ldots.\ t^{(m-1)}:m,$$

depuis la plus grande positive $t^{m-1}:1$ jusqu'à la plus petite négative $t^{(m-1)}:m$. Ces m, valeurs de Φ, donnent [12.] dans le cours de la $m^{ème}$ développante un nombre m de points singuliers,

$$\Sigma^{(m-1)}:1,\quad \Sigma^{(m-1)}:2,\quad \Sigma^{(m-1)}:3,\quad \Sigma^{(m-1)}:4,\quad \Sigma^{(m-1)}:m,$$

auxquels aboutissent les $\overline{m+1}$ branches qui forment le cours de $\sigma^{(m)}$,

$$\sigma^{(m)}:1,\quad \sigma^{(m)}:2,\quad \sigma^{(m)}:3,\quad \sigma^{(m)}:4\ldots\sigma^{(m)}:m,\quad \sigma^{(m)}:m+1.$$

Accouplant ces branches deux à deux dans l'ordre qui précède, et rapportant leur origine commune à un $\Sigma^{(m-1)}$ d'un indice impair, le même que celui de la première branche de chaque couple, elles sont exprimées par la même quantité $F:\Phi - F:t^{(m-1)}$, ou l'indice de t^{m-1}: doit être le même que celui de $\Sigma^{(m-1)}$:, on a donc

$$(a)\quad \begin{cases} \left.\begin{matrix}\sigma^{(m)}:1\\ \sigma^{(m)}:2\end{matrix}\right\} = F:\Phi - F:t^{(m-1)}:1, \\ \left.\begin{matrix}\sigma^{(m)}:3\\ \sigma^{(m)}:4\end{matrix}\right\} = F:\Phi - F:t^{(m-1)}:3, \\ \text{Si donc } m \text{ est impair, les deux dernières branches sont comprises dans} \\ \left.\begin{matrix}\sigma^{(m)}:m\\ \sigma^{(m)}:m+1\end{matrix}\right\} = F:\Phi - F:t^{(m-1)}:m. \end{cases}$$

Au contraire, en accouplant ces branches deux à deux, à commencer par la seconde $\sigma^{m}:2$, elles ont un point commun au Σ^{m-1}: d'un indice pair, qui est le même que celui de la première branche du couple, et sont données par

Digitized by Google

$$(b)\begin{cases} \left.\begin{matrix} -\overline{\sigma^m} : 2 \\ -\overline{\sigma^m} : 3 \end{matrix}\right\} = F:\varphi - F:t^{(m-1)}:2\,; \\ \left.\begin{matrix} -\overline{\sigma^m} : 4 \\ -\overline{\sigma^m} : 5 \end{matrix}\right\} = F:\varphi - F:t^{(m-1)}:4\,; \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Si donc m est pair, les deux dernières branches sont comprises dans

$$\left.\begin{matrix} -\overline{\sigma^m} : m \\ -\overline{\sigma^m} : m+1 \end{matrix}\right\} = F:\varphi - F:t^{(m-1)}:m.$$

Ces équations peuvent se déduire immédiatement des précédentes. En effet, une branche quelconque, la $n+1^{ème}$ par exemple, est donnée, équation (a), par

$$\sigma^{(m)}:n+1 = F:\varphi - F:t^{(m-1)}:n\,;$$

et comme cette branche s'étend de

$$\varphi = t^{(m-1)}:n \quad \text{à} \quad \varphi = t^{(m-1)}:n+1\,;$$

on a pour sa longueur entière

$$(\sigma^{(m)}:n+1) = F:t^{(m-1)}:n+1 - F:t^{(m-1)}:n\,;$$

d'où

$$(\sigma^{(m)}:n+1) - \sigma^{(m)}:n+1 = F:t^{(m-1)}:n+1 - F:\varphi\,;$$

mais il est aisé de voir que $(\sigma^{(m)}:n+1) - \sigma^{(m)}:n+1$ n'est autre chose que l'arc de la même branche aboutissant au même point que $\sigma^{(m)}:n+1$, mais dont l'origine est rapportée à $\Sigma^m:n+1$, au lieu de $\Sigma^m:n$; ainsi

$$(\sigma^m:n+1) - \sigma^m:n+1 = \sigma^m:(n+1) = -[F:\varphi - F:t^{(m-1)}:n+1],$$

comme dans les équations (b) (*).

(*) On a supposé dans cette construction toutes les racines de $F':\varphi = 0$ réelles; dans

Digitized by Google

S. II.

Application des Formules précédentes à la Construction des Racines des Équations algébriques.

[17.] Qu'il s'agisse de construire l'une des racines de l'équation

$$\frac{x^{m+1}}{1.2...m+1} - a\frac{x^{m-1}}{1.2...m-1} + b\frac{x^{m-2}}{1.2...m-2} + c\frac{x^{m-3}}{1.2...m-3} + \ldots + px + q = 0,$$

faisant, pour abréger,

$$F:x = \frac{x^{m+1}}{1.2...m+1} - a\frac{x^{m-1}}{1.2...m-1} + b\frac{x^{m-2}}{1.2...m-2} \ldots\ldots + p.x;$$

nous supposerons, en premier lieu, que $F':x = 0$ a tous ses facteurs réels; alors $t' = +\sqrt{(a)}$ et les dérivées de $F:x$ donneront chacune une seule racine qui satisfera aux conditions

$$t'' > t', \quad t''' > t'' \ldots\ldots t^{(m-1)} > t^{(m-2)}.$$

Ces valeurs de t', t''.... détermineront *(fig. 1)* θ', θ''.... sur la circonférence génératrice, et les points successifs de développement ε', ε''.....

On prendra donc sur $\overline{\sigma^{(m)}}$ l'arc

$$\varepsilon^{m-1}.\sigma^m = -q - \overline{\Sigma}^{(m)} = -[q + F:t^{(m-1)}],$$

ce qui donnera le point correspondant Φ sur la circonférence génératrice, et l'arc $\theta\Phi$ de cette circonférence sera la racine cherchée.

Puisque toutes les valeurs de Φ qui correspondent à la branche $\varepsilon^{(m-1)}.\sigma^m$ sont $> t^{(m-1)}$; $\theta\Phi$ construira $x:1$, ou la plus grande racine

---

le cas contraire, le nombre des points de rebroussement de $\sigma^{(m)}$ sera égal à celui des racines réelles de $F:x = 0$. σ^m aura une branche de plus; et ces branches, exprimées encore par les équations (a) ou (b), donneront les mêmes résultats.

Digitized by Google

positive de la proposée. De plus, $\overline{\sigma^{(m)}}$ est toujours pris positivement dans la formule 4; on a donc pour condition de la réalité de $x:1$,

$$q + F:t^{(m-1)} < 0;$$

d'où il suit que la construction ci-dessus donnera $x:1$ toutes les fois qu'il est réel.

Supposons $q + F;t^{m-1} > 0$, alors $x:1$ est imaginaire; on mettra pour lors $-x$ pour x dans la proposée, ce qui donnera une transformée que l'on traitera comme celle-ci; pour obtenir d'abord les conditions de la réalité de la dernière racine $x:m+1$ de la proposée, ensuite la construction de cette racine, si cette condition est satisfaite.

Enfin, si $x:1$, $x:m+1$ sont imaginaires, on construira l'une des autres racines par une des branches intermédiaires de la $m^{ème}$ développante.

[18.] Proposons-nous pour exemple l'équation du cinquième degré,

$$\frac{x^5}{2.3.4.5} - a\frac{x^3}{2.3} + b\frac{x^2}{2} + cx + d = 0;$$

on prendra $t' = +\sqrt{(a)}$, et pour

$$\left.\begin{matrix} t'':1 \\ t''':1 \end{matrix}\right\} \text{ la plus grande racine de } \begin{cases} \frac{x^3}{2.3} - ax + b = 0; \\ \frac{x^4}{2.3.4} - a\frac{x^2}{2} + bx + c = 0. \end{cases}$$

On aura d'abord pour condition de la réalité de $x:1$, $d + F:t''':1 < 0$, et la racine cherchée $x:1$ sera l'arc $\theta\Phi$ *(fig. 1)*, correspondant à l'extrémité σ^{IV} de l'arc $\varepsilon'''.\sigma^{IV} = -[d+F:t''':1]$. Si $F:t''':1+d$ est >0, on mettra $-x$ pour x dans la proposée, ce qui la transformera en

$$\frac{x^5}{2.3.4.5} - a\frac{x^3}{2.3} - b\frac{x^2}{2} + c.x - d = 0 \quad \text{ou} \quad \overline{F}:x - d = 0,$$

Digitized by Google

qui donnera d'abord pour condition de la réalité de sa première racine $\overline{x}:1$; $.\overline{F}:t''':1 - d<0$, et on construira $\overline{x}:1$ comme $x:1$, en prenant un arc $\theta\theta'''$ égal à la première racine $\overline{t}''':1$ de $\overline{F}':x=0$, et coupant sur $\varepsilon'''.\sigma^{IV}$ un arc $\varepsilon''' q = -[\overline{F}:\overline{t}''':1 - d]$, et pour $\overline{x}:1$ l'arc correspondant $\theta\theta^{V}$; et comme $\overline{x}:1 = -\overline{x}:5$, on aura pour la construction de $x:5$, dernière racine de la proposée,

$$\overline{F}:\overline{t}''':1 - d<0, \quad x:5 = -\theta\theta^{V}.$$

Il est d'ailleurs aisé de reconnaître que le binome $\overline{F}:\overline{t}''':1 - d$ se réduit à $-F:t''':4 - d$, $t''':4$ étant la dernière racine de $F':x=0$, ce qui réduit la condition de la réalité de $x:5$ à $F:t''':4 + d>0$.

Si donc on a en même temps $d + F:t''':1>0$; $d + F:t''':4<0$ les constructions précédentes manquent, puisque $x:1$, $x:5$ sont imaginaires.

Alors sur la troisième branche $\varepsilon''':2.\varepsilon''':3$ de σ^{IV} [15.], on prendra *(fig. 3)* l'arc $\varepsilon''':2.\varepsilon^{IV}:3 = d + F:t''':2$, $t''':2$ étant la seconde racine de $F':x=0$, et le point correspondant sur la circonférence génératrice au point σ^{IV} construira la racine cherchée. Observons que cette construction donne la double condition

$$\varepsilon''':2.\varepsilon^{IV}:3>0, \quad \varepsilon''':2.\varepsilon''':3>\varepsilon''':2.\varepsilon^{IV}:3,$$

conditions qui se réduisent à celles-ci,

$$F:t''':2 + d>0, \quad F:t''':3 + d<0;$$

de plus, il est aisé de faire voir que ces conditions sont implicitement contenues dans celles-ci,

$$d + F:t''':1>0, \quad d + F:t''':4<0;$$

en sorte qu'elles subsistent toujours avec elles.

Cette dernière construction donnera donc toujours une racine de la proposée,

Digitized by Google

proposée, si $x:1$ et $x:5$ sont imaginaires. En effet, la racine construite par cette branche intermédiaire est $<t''':2$ et $>t''':3$; c'est donc la troisième racine $x:3$ de la proposée, racine toujours réelle, si $x:1$ et $x:5$ ne le sont pas.

[19.] Il reste le cas où l'équation prime de la proposée ;

$$(1) \qquad \frac{x^4}{2.3.4} - a\frac{x^2}{2} + bx + c = 0,$$

n'a pas tous ses facteurs réels; alors elle en aura deux ou point. Dans le premier cas, la seconde développante du cercle conserve sa forme *(fig. 5)*, lorsque l'équation

$$(2) \qquad \frac{x^3}{2.3} - ax + b = 0$$

a ses trois facteurs réels ; mais des quatre branches qui la composent, deux seulement peuvent satisfaire à l'équation (1). Sur ces deux branches, et par les points qui y correspondent aux deux racines de cette équation, on construira la quatrième développante et l'une des racines de la proposée, par l'une des trois branches de celle-ci [12.].

Il en sera de même si l'équation (2) a un seul facteur réel ; mais alors la seconde développante, au lieu de former trois branches *(fig. 5)*, sera composée d'une seule *(fig. 4)*, formant un nœud autour du point θ. Cette courbe sera tracée par le développement de la première développante $\theta\sigma'$, au moyen d'un fil, qui, au point θ, a la longueur $\theta\varepsilon' = a$; en sorte qu'à chaque point de $\varepsilon'\sigma''$, le rayon de courbure de $\varepsilon'\sigma''$ soit égal à $\theta\varepsilon' = a$, plus au rayon de courbure de θs. Ce cas est celui indiqué à l'article [12.] déjà cité.

Enfin si l'équation (1) n'a aucun facteur réel, la quatrième développante formera une seule branche nouée autour du point θ, qui construira, par le procédé indiqué [18.], la seule racine réelle de la proposée.

[20.] Puisque, dans les équations (a), (b) [16.], les branches de σ^m,

Digitized by Google

sont exprimées deux à deux par une même fonction de φ. Si la première branche d'un couple construit une valeur de x par un certain arc coupé sur cette branche [17.], la seconde du même couple construira une autre valeur de x par un arc de cette seconde branche égal à l'arc coupé sur la première. Ainsi *(fig. 3)*, ayant construit [17.] $x:1$ au moyen de l'arc $\sigma':n$ de la première branche, on construira autant de nouvelles valeurs de x, en prenant, sur la seconde branche l'arc $\sigma:1\,t=\sigma:1\,.\,n$; sur la troisième, l'arc $\sigma:2\,q=\sigma:2\,.\,t$, &c. De là une construction facile de tant de valeurs de x qu'on voudra, et la distinction de ces valeurs, puisqu'elles sont placées une à une entre les racines de la dérivée de la proposée.

Nous en ferons l'application à la construction simultanée de toutes les racines réelles d'une équation algébrique.

Renversant l'ordre des dérivées de $q+F:x=0$, on a la série d'équations

$$(1)\quad \frac{x^2}{2}-a=0\,;$$

$$(2)\quad \frac{x^3}{2.3}-ax+b=0\,,$$

$$(3)\quad \frac{x^4}{2.3.4}-a\frac{x^2}{2}+bx+c=0\,,$$

$$(4)\quad \frac{x^5}{2.3.4.5}-a\frac{x^3}{2.3}+b\frac{x^2}{2}+cx+d=0\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(m)\quad \frac{x^{m+1}}{1.2\ldots m+1}-a\frac{x^{m-1}}{1.2\ldots m-1}+b\frac{x^{m-2}}{1.2\ldots m-2}\ldots+px+q=0.$$

Du point θ [13.], *(fig. 5)*, on coupera sur $\sigma':\theta\varepsilon':1=a$, ce qui donne le point $\varepsilon':2$, en prenant $\theta\varepsilon':2=\theta\varepsilon':1$; les arcs correspondans $\theta\theta':1\,.\,(t':1)$, $\theta\theta':2\,.\,(t':2)$ sont les deux racines de l'équation (1).

Du point ε', on prendra sur σ'' [13.],

Digitized by Google

$$\varepsilon' : 1 \,.\, \varepsilon'' : 1 = -b + \tfrac{2}{3} a \sqrt{(2a)},$$

ce qui donne le point $\varepsilon'' : 2$ par $\varepsilon' : 1 \,.\, \varepsilon'' : 2 = \varepsilon' : 1 \,.\, \varepsilon'' : 1$, le point $\varepsilon'' : 3$ par $\varepsilon' : 2 \,.\, \varepsilon'' : 3 = \varepsilon' : 2 \,.\, \varepsilon'' : 2$; les arcs correspondans $\theta\theta'' : 1 \,.\, (t'' : 1)$, $\theta\theta'' : 2 \,.\, (t'' : 2)$, $\theta\theta'' : 3 \,.\, (t'' : 3)$, sont les trois racines de l'équation (2).

Du point $\Sigma'' : 1$, on marquera sur σ''' l'arc

$$\varepsilon'' : 1 \, \varepsilon''' : 1 = -\left[c + \frac{\overline{t'' : 1}^{4}}{2.3.4} - a \frac{\overline{t'' : 1}^{3}}{2} + b t'' : 1 \right],$$

ce qui donnera $\varepsilon''' : 2$ par $\varepsilon'' : 1 \,.\, \varepsilon''' : 2 = \varepsilon'' : 1 \,.\, \varepsilon''' : 1$, $\varepsilon''' : 3$ par $\varepsilon'' : 2 \,.\, \varepsilon''' : 3 = \varepsilon'' : 2 \,.\, \varepsilon''' : 2$, $\varepsilon''' : 4$ par $\varepsilon'' : 3 \,.\, \varepsilon''' : 4 = \varepsilon'' : 3 \,.\, \varepsilon''' : 3$ les arcs $\theta\theta''' : 1 \, (t''' : 1)$, $\theta\theta''' : 2 \,.\, (t''' : 2)$, $\theta\theta''' : 3 \,.\, (t''' : 3)$, $\theta\theta''' : 4 \,.\, (t''' : 4)$, seront les racines de l'équation (3).

Du point $\varepsilon''' : 1$, on coupera sur σ^{IV}

$$\varepsilon''' : 1 \, \varepsilon^{IV} : 1 = -\left[\frac{\overline{t''' : 1}^{5}}{2.3.4.5} - a \frac{\overline{t''' : 1}^{3}}{2.3} + b \frac{\overline{t''' : 1}^{2}}{2} + c t''' : 1 + d \right],$$

ce qui donnera les points $\varepsilon^{IV} : 2$, $\varepsilon^{IV} : 3$, $\varepsilon^{IV} : 4$, $\varepsilon^{IV} : 5$; et par les arcs correspondans, les racines de l'équation (4).

[21.] Le même procédé s'étend jusqu'à la développante $\sigma^{(m)}$, et construit par celle-ci toutes les racines réelles de l'équation (m).

Soient $s^m : 1$, $s^m : 2$, $s^m : 3$..... les arcs de $\sigma^m : 1$, $\sigma^m : 2$.... qui satisfont à la proposée, on aura, équation (a),

$$\left.\begin{matrix} s^m : 1 \\ s^m : 2 \end{matrix}\right\} = -[q + F : t^{m-1} : 1], \quad \left.\begin{matrix} s^m : 3 \\ s^m : 4 \end{matrix}\right\} = -[q + F : t^{m-1} : 3] \ldots . \&c.$$

Si donc m est impair, les deux dernières branches

$$\left.\begin{matrix} s^{(m)} : m \\ s^{(m)} : m + 1 \end{matrix}\right\} = -[q + F : t^{m-1} : m],$$

et les valeurs correspondantes de φ seront les racines de l'équation (m), [20.].

Digitized by Google

Au contraire, on peut faire usage des équations (b); alors $\bar{s}^m:2$, $\bar{s}^m:3\ldots$ étant les arcs cherchés sur $\bar{\sigma}^m:2$, $\bar{\sigma}^m:3\ldots$, on a pour les déterminer,

$$\left.\begin{matrix}\bar{s}^m:2\\ \bar{s}^m:3\end{matrix}\right\} = q + F:t^{(m-1)}:2,$$

$$\left.\begin{matrix}\bar{s}^m:4\\ \bar{s}^m:5\end{matrix}\right\} = q + F:t^{(m-1)}:4\ldots \text{ et } m \text{ étant pair,}$$

$$\left.\begin{matrix}\bar{s}^m:m\\ \bar{s}^m:m+1\end{matrix}\right\} = q + F:t^{(m-1)}:m;$$

dans ces équations $\bar{s}^m:2 = \bar{\sigma}^m:2 - s^m:2$, &c.; en sorte qu'elles donnent identiquement les mêmes valeurs de Φ pour un même x.

[22.] Soit n un nombre entier $<m$, la branche, $\sigma^m:n$ s'étend du point $\epsilon^{(m)}:n-1$ au point $\epsilon^{(m)}:n$; au premier répond $\Phi = t^{(m-1)}:n-1$, au second $\Phi = t^{(m-1)}:n$; mais $x:n$ ou la $n^{ème}$ racine de l'équation (m) est nécessairement contenue entre $t^{(m-1)}:n-1$ et $t^{(m-1)}:n$. Donc le point extrême de l'arc qui représente $x:n$ sur la circonférence génératrice, est nécessairement placé dans l'étendue de l'arc de cette circonférence qui correspond à $\sigma^m:n$: or, cela ne peut avoir lieu qu'autant que $s^m:n$ est >0 et $<\sigma^m:n$; on a donc pour la réalité de $x:n$ les deux conditions $s^m:n>0$, $\sigma^m:n - s^m:n<0$.

Cela posé, il faut distinguer les deux cas de n pair ou impair. Pour n impair, les équations (a) donnent

$$s^m:n = -[q+F:t^{m-1}:n], \quad \sigma^m:n = F:t^{(m-1)}:n+1 - F:t^{(m-1)}:n;$$

au contraire, pour n pair,

$$s^m:n = q+F:t^{m-1}:n, \quad \sigma^m:n = F:t^{(m-1)}:n - F:t^{(m-1)}:n+1.$$

Digitized by Google

On a donc pour la réalité de $x:n$,

$$\left.\begin{array}{l} q+F:t^{(m-1)}:n<0 \\ q+F:t^{(m-1)}:n>0 \end{array}\right\} \text{si } n \text{ est impair,}$$

$$\left.\begin{array}{l} q+F:t^{(m-1)}:n>0 \\ q+F:t^{(m-1)}:n<0 \end{array}\right\} \text{si } n \text{ est pair.}$$

D'où résulte, pour que $q+F:x=0$ ait tous ses facteurs réels en même temps que $F':x=0$, la série de conditions,

$$q+F:t^{(m-1)}:1<0, \quad q+F:t^{m-1}:2>0, \quad q+F:t^{m-1}:3<0\ldots$$

Supposons $(q+F:x)(F'':x)=z$, il est aisé de faire voir par ce qui précède, qu'en substituant dans z pour x les valeurs de $t:^{(m-1)}$; les valeurs résultantes pour z ont toujours le signe —. Si donc on élimine x entre $F':x=0$, $z=(q+F:x)F'':x$, la résultante en z doit avoir tous ses facteurs négatifs, ce qui est le théorème de *Degua*.

En général, $F':x=0$ ayant tous ses facteurs réels, $q+F:x=0$ aura autant de couples de racines imaginaires, qu'il y aura de variations de signes dans la transformée en z; et quelle que soit la nature des facteurs de $F':x=0$, le nombre des variations de signes dans la transformée en z sera la limite du plus petit nombre de couples d'imaginaires qui peuvent se trouver dans la proposée.

[23.] Dans la construction de l'article [20.], on suppose tacitement que $F':x=0$ a tous ses facteurs réels. Dans le cas contraire, σ a un moindre nombre de branches qui donnent pour les racines de $q+F:x=0$ une construction absolument semblable à celle de l'article cité. Le nombre et la forme de ces branches sont d'ailleurs donnés, dans tous les cas, par les procédés de la section suivante, procédés indépendans de toutes considérations des dérivées de la proposée.

Digitized by Google

§. III.e

Construction de l'une des Racines d'une Équation algébrique, par la seule considération des Coefficiens de celle-ci.

[24.] DANS les équations (a) [16.], qui comprennent toutes les branches de σ^m, en rapportant leur origine à un $\Sigma^{(m-1)}$ d'un indice impair, se trouve nécessairement la branche dont l'un des points répond à $\varphi = 0$; désignant donc cette branche par $(\sigma^m : 0)$, on aura

$$(\sigma^m : 0) = F : \Phi - F : t^{(m-1)} : n,$$

n étant impair (éq. a). Soit $(\Sigma^m : 0)$ l'arc de cette branche qui s'étend depuis $\Phi = t^{m-1} : n$ jusqu'à $\Phi = 0$, $(\Sigma^m : 0) = -F : t^{(m-1)} : n$: mais $(\sigma^m : 0) - (\Sigma^m : 0)$ est évidemment l'arc de la $m^{ème}$ développante, prenant son origine au point où $\varphi = 0$, et se dirigeant vers un $\Sigma^{(m-1)}$ à indice pair. Désignant donc cet arc par $\sigma^m : 0, 2$, on a

$$\sigma^m : 0, 2 = f : \Phi.$$

En rapportant la même branche à un $\Sigma^{(m-1)}$ d'un indice pair, les équations (b) de l'article cité, donnent $\sigma^m : 0, 1 = -F : \varphi$, en désignant par $\sigma^m : 0, 1$ l'arc de la $m^{ème}$ développante, prenant son origine à $\Phi = 0$, et se dirigeant vers un $\Sigma^{(m-1)}$ d'un indice impair.

Si donc, en partant du point de la $m^{ème}$ développante pour lequel $\Phi = 0$; on nomme $\left\{\begin{matrix}\sigma^m : 0, 1 \\ \sigma^m : 0, 2\end{matrix}\right\}$ l'arc de cette courbe qui se dirige vers un $\Sigma^{(m-1)}$ d'un indice $\left\{\begin{matrix}\text{impair} \\ \text{pair}\end{matrix}\right\}$, on a

$$\text{(A)} \qquad \sigma^m : 0, 1 = -F : \Phi, \quad \sigma^m : 0, 2 = +F : \Phi.$$

[25.] Par le point d'origine de $\sigma^m : 0, 1$, $\sigma^m : 0, 2$, je mène une tangente dont la longueur soit Σ. Σ peut être dirigé dans le sens de

Digitized by Google

$\sigma^m:0,1$, ou dans celui de $\sigma^m:0,2$. Dans le second cas, en enveloppant $\sigma^m:0,2$, l'extrémité de Σ trace une courbe $\sigma^{(m+1)}:0$, dont le rayon de courbure à chaque point est $\Sigma - \sigma^m:0,2$: on a donc

$$\sigma^{m+1} = \mp['F:\varphi - \Sigma.\varphi],$$

le signe $+$ étant pour le cas où $d\varphi$, $d\sigma^{m+1}$,0 sont de même signe, le signe $-$ pour le cas contraire. Et comme, par un mouvement en sens contraire, Σ développe $\sigma^m:0,1$ en formant un rayon de courbure $\Sigma+\sigma^m:0,1$; l'autre branche de σ^{m+1}, à partir de $\varphi = 0$, est exprimé par $\pm['F:\varphi - \Sigma\varphi]$.

Il suit de là qu'à partir du point $\varphi = 0$, les deux arcs que forme la $m+1^{ème}$ développante, sont

(B) $\sigma^{(m+1)}:0,1 = -['F:\varphi - \Sigma\varphi] \ldots \sigma^{(m+1)}:0,2 = {}'F:\varphi - \Sigma\varphi,$

$\sigma^{m+1}:0,2$ étant toujours dirigé vers un $\Sigma^{(m)}$ d'un indice pair
$\sigma^{m+1}:0,1$ ..... vers un $\Sigma^{(m)}$ d'un indice impair } [24.].

Au contraire, que Σ se dirige dans le sens de $\sigma^m:0,1$; on prouvera de même qu'à partir du point $\varphi = 0$, les deux arcs que forme alors la $m+1^{ème}$ développante sont alors

(C) $\sigma^{(m+1)}:0,1 = -['F:\varphi + \Sigma\varphi] \ldots \sigma^{(m+1)}:0,2 = {}'F:\varphi + \Sigma\varphi,$

$\sigma^{m+1}:0,2$ étant toujours dirigé vers un $\Sigma^{(m)}$ d'un indice pair,

$\sigma^{m+1}:0,1$ vers un $\Sigma^{(m)}$ d'un indice impair.

[26.] Observons que Σ est le rayon de courbure de $\sigma^{(m+1)}$ au point de son cours qui correspond à $\varphi = 0$, ou le rayon osculateur de $\sigma^{(m)}$ au même point. Ainsi, dans les équations $\left\{\begin{matrix}(B)\\(C)\end{matrix}\right\}$, Σ exprime le rayon osculateur d'un arc $\left\{\begin{matrix}\sigma^m:0,2\\\sigma^m:0,1\end{matrix}\right\}$ dirigé vers un $\Sigma^{(m-1)}$ d'un indice $\left\{\begin{matrix}\text{pair,}\\\text{impair.}\end{matrix}\right.$

Digitized by Google

De là un procédé facile pour rendre le coefficient de Φ positif ou négatif dans σ^{m+1}, suivant qu'au point de $\Phi = 0$, Σ sera le rayon osculateur d'un arc $\sigma^m{:}0,1$ ou $\sigma^m{:}0,2$, dirigé vers un $\Sigma^{(m-1)}$ d'un indice impair ou pair.

Comme le même procédé s'étend de σ^{m+1} à σ^{m+2}, de σ^{m+2} à σ^{m+3}, les équations (A), (B), (C), suffiront dans tous les cas pour donner tels signes qu'on voudra aux coefficiens de Φ dans une développante d'un ordre quelconque (*).

[27.] Du point θ *(fig. 6)*, ayant tracé la première développante des arcs $\theta\Phi[+\Phi]$, $\theta\overline{\Phi}[-\Phi]$ sur le rayon $\theta(C)[1]$ indéfiniment prolongé, je coupe $\theta\varepsilon''{:}0 = a$ de θ vers (A). Dans le cours de la première développante, θ est le seul point de rebroussement. Ses deux arcs $\theta\sigma'(\sigma')$, $\theta\overline{\sigma'}(\overline{\sigma'})$, dirigés vers les points où $\Phi = +\infty$ et où $\Phi = -\infty$, le sont donc l'un et l'autre vers un Σ^0 d'un indice pair : donc $\theta\varepsilon''{:}0 = a$ étant le rayon osculateur de ces arcs, on a [26.],

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon''{:}0.\sigma''{:}2 \text{ ou } \sigma''{:}2\\ \varepsilon''{:}0.\sigma''{:}1 \quad -\sigma''{:}1\end{array}\right\} = {}'F{:}\Phi - a\Phi = -\frac{\Phi^3}{2.3} - a.\Phi,$$

le signe de $\sigma''{:}2$, $\sigma''{:}1$ étant déterminé dans cette équation par la règle [24.].

Si, au contraire, on prend $\theta\varepsilon''{:}0 = a$ de θ vers (B) *(fig. 7)*, on a

$$\left.\begin{array}{r}\sigma''{:}2\\ -\sigma''{:}1\end{array}\right\} = \frac{\Phi^3}{2.3} + a.\Phi;$$

car la seconde développante n'ayant alors aucun point de rebroussement, $\Phi = +\infty$ répond à un indice pair, $\Phi = -\infty$ répond à un indice impair, d'où le signe $+$ pour $\sigma''{:}2$, $-$ pour $\sigma''{:}1$. [24.]

(*) Dans le cours de σ^m, le point répondant à $\varphi = +\infty$, doit être compté pour indice pair. Le point répondant à $\varphi = -\infty$ pour un indice pair, si m est pair; impair, si m l'est.

Digitized by Google

[28.] L'arc $\sigma'':2$ se dirige vers $\varepsilon':2$, ce qui est le cas de l'équation (B). Par le point $\varepsilon'':0$ répondant à $\Phi=0$, je mène $\varepsilon'':0.\varepsilon''':0=b$ rayon osculateur de $\sigma'':2$ *(fig. 6)*, on a

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon''':0.\sigma''':2\ldots+\sigma''':2\\ \varepsilon''':0.\sigma''':1\ldots-\sigma''':1\end{matrix}\right\}='F:\Phi-b\Phi=\frac{\varphi^4}{2.3.4}-a\frac{\varphi^2}{2}-b\Phi;$$

car il est aisé de reconnaître que $\varepsilon'':2$ est toujours le second point de rebroussement dans le cours de σ'''.

Au contraire, que l'on prenne $\varepsilon'':0.\overline{\varepsilon'''}:0$ au-dessous de l'horizontale, il devient alors rayon osculateur de $\sigma''':1$, ce qui est le cas de l'équation (C); et

$$\left.\begin{matrix}\overline{\varepsilon'''}:0.\overline{\sigma'''}:2\,;\ldots+\overline{\sigma'''}:2\\ \overline{\varepsilon'''}:0.\overline{\sigma'''}:3\,;\ldots-\overline{\sigma'''}:1\end{matrix}\right\}=\frac{\varphi^4}{2.3.4}-a\frac{\varphi^2}{2}+b\Phi.$$

Si l'on veut que le coefficient de Φ^2 ait le signe $+$, on prendra [27.] $\theta\varepsilon'':0=a$ de θ vers (B) *(fig. 7)*, le reste de la construction sera le même en prenant $\varepsilon'':0.\varepsilon''':0$ $\left\{\begin{matrix}\text{au-dessus}\\ \text{au-dessous}\end{matrix}\right\}$ de l'horizontale, suivant que b a le signe $\left\{\begin{matrix}+\\ -\end{matrix}\right\}$. Mais alors le point de rebroussement $\varepsilon'':1$ est unique dans le cours de σ'''. Les arcs de σ''' seront donc négatifs vers $\varepsilon'':1$, positifs dans le sens contraire. Et

$$\left.\begin{matrix}(\varepsilon''':0.\sigma''':1);\ -\sigma''':1\\ (\varepsilon''':0.\sigma''':2);\ +\sigma''':2\end{matrix}\right\}=\frac{\varphi^4}{2.3.4}+a\frac{\varphi^2}{2}-b\Phi,$$

$$\left.\begin{matrix}(\overline{\varepsilon'''}:0.\overline{\sigma'''}:1);\ -\overline{\sigma'''}:1\\ (\overline{\varepsilon'''}:0.\overline{\sigma'''}:2);\ +\overline{\sigma'''}:2\end{matrix}\right\}=\frac{\varphi^4}{2.3.4}+a\frac{\varphi^2}{2}+b\Phi.$$

[29.] Comme les arcs $\overline{\sigma'''}:2$, $\sigma''':2$ se dirigent vers les ε'' à indice

Digitized by Google

pair $\overline{\epsilon}'':2$, $\epsilon'':2$ dans le cours de σ''' [28.]. Si on prend $\epsilon''':0.\epsilon^{IV}:0$, ou $\overline{\epsilon}''':0.\overline{\epsilon}^{IV}:0 = c$ pour rayon osculateur de ces arcs; on aura (éq. B) *(fig. 6)*,

$$\left.\begin{array}{l}(\epsilon^{IV}:0.\sigma^{IV}:2);\ +\sigma^{IV}:2\\(\epsilon^{IV}:0.\sigma^{IV}:1);\ -\sigma^{IV}:1\end{array}\right\} = \frac{\varphi^5}{2.3.4.5} - a\frac{\varphi^3}{2.3} - b\frac{\varphi^2}{2} - c\Phi,$$

$$\left.\begin{array}{l}(\overline{\epsilon}^{IV}:0.\overline{\sigma}^{IV}:4);\ +\overline{\sigma}^{IV}:2\\(\overline{\epsilon}^{IV}:0.\overline{\sigma}^{IV}:3);\ -\overline{\sigma}^{IV}:1\end{array}\right\} = \frac{\varphi^5}{2.3.4.5} - a\frac{\varphi^3}{2.3} + b\frac{\varphi^2}{2} - c\Phi.$$

Le signe + de $\sigma^{IV}:2$, $\overline{\sigma}^{IV}:2$ étant déterminé par leur direction vers un ϵ''' d'un indice pair, le signe — de $\sigma^{IV}:1$, $\overline{\sigma}^{IV}:1$ par leur direction vers un ϵ''' d'un indice impair [26.].

Au contraire, si l'on veut que le coefficient de Φ soit négatif dans σ^{IV}, on prendra $\epsilon''':0.s^{IV}:0$ ou $\overline{\epsilon}''':0.\overline{s}^{IV}:0 = c$ pour rayon osculateur de $\sigma''':1$, $\overline{\sigma}''':1$, et ceux-ci tendant vers un ϵ'' à indice impair [26.],

$$\left.\begin{array}{l}(S^{IV}:0.s^{IV}:2);\ +s^{IV}.2\\(S^{IV}:0.s^{IV}:3);\ -s^{IV}:1\end{array}\right\} = \frac{\varphi^5}{2.3.4.5} - a\frac{\varphi^3}{2.3} - b\frac{\varphi^2}{2} + c\Phi,$$

$$\left.\begin{array}{l}(\overline{S}^{IV}:0.\overline{s}^{IV}:2);\ +\overline{s}^{IV}:2\\(\overline{S}^{IV}:0.\overline{s}^{IV}:3);\ -\overline{s}^{IV}:1\end{array}\right\} = \frac{\varphi^5}{2.3.4.5} - a\frac{\varphi^3}{2.3} + b\frac{\varphi^2}{2} + c\Phi \textit{ (fig. 6)}.$$

Que si on voulait que a eût le signe + dans ces équations, il suffirait de prendre $\theta\epsilon'':0 = a$ de θ vers (B) *(fig. 7)*, et de compter les arcs $\sigma^{IV}:1$, $\sigma^{IV}:2$, $\overline{\sigma}^{IV}:1$, $\overline{\sigma}^{IV}:2$ . . . &c., comme ils sont marqués dans la figure; car il est aisé de s'assurer que dans ce cas-là le point ϵ''' est le premier, et conséquemment impair dans le cours de σ^{IV} au-dessous de l'horizontale AB, le second, au contraire, pair et au-dessus de AB.

[30.] Des points $\epsilon^{IV}:0$, $S^{IV}:0$, $\overline{\epsilon}^{IV}:0$, $\overline{S}^{IV}:0$, je mène au-dessous

Digitized by Google

de l'horizontale $\varepsilon^{IV}:o.\varepsilon^{V}:o$, $S^{IV}:o.S^{V}:o$, $\overline{\varepsilon}^{IV}:o.\overline{\varepsilon}^{V}:o$, $\overline{S}^{IV}:o.\overline{S}^{V}:o$ égaux à d; comme d est alors le rayon osculateur d'un σ^{IV} à indice pair, on a pour les arcs des courbes décrites par ces rayons osculateurs autour de σ^{IV} comme lieu de leurs centres,

$$\pm\sigma^{V} = \frac{\varphi^{6}}{2.3.4.5.6} \pm a\frac{\varphi^{4}}{2.3.4} \pm b\frac{\varphi^{3}}{2.3} \pm c\frac{\varphi^{2}}{2} - d\Phi \ldots \textit{(fig. 6 et 7)};$$

les signes de a, b, c, étant déterminés [29.], et celui de σ^{V} par sa direction vers un ε^{IV} d'un indice pair ou impair. Au contraire, si on prend au-dessus de l'horizontale une perpendiculaire égale à d; comme alors, elle devient rayon osculateur d'un σ^{IV} impair, on a

$$\pm\sigma^{V} = \frac{\varphi^{6}}{2.3.4.5.6} \pm a\frac{\varphi^{4}}{2.3.4} \pm b\frac{\varphi^{3}}{2.3} \pm c\frac{\varphi^{2}}{2} + d\Phi.$$

[31.] En voilà assez sur cette énumération, qu'on peut aussi obtenir directement par des intégrales successives, en ayant soin de faire les constantes nulles pour $\Phi = o$. Observons que $F:\Phi$ étant du degré $m+1$ pour $\sigma^{(m)}$, et le coefficient de Φ^{m}, celui de Φ^{o}, toujours nuls dans $F:\Phi$, $(2)^{m-1}$ est le nombre de combinaisons que présentent les coefficiens de Φ, en variant leurs signes. Mais dans les *figures 5 et 6*, il y a deux régions pour σ'' suivant que l'on mène $\theta\Sigma'':o = a$ vers (A) ou (B), quatre pour σ''' suivant qu'à l'extrémité de a, b est perpendiculaire au-dessus ou au-dessous de l'horizontale, huit pour σ^{IV} suivant que dans les quatre précédentes on tire c horizontalement vers (A) ou vers (B), et en général, $(2)^{m-1}$ régions pour $\sigma^{(m)}$; ainsi, chacune de ces régions présentant en particulier l'une des $\overline{2}^{m-1}$ combinaisons des signes de $\overline{\sigma}^{m}$: elles suffisent pour construire $F:\Phi$, quels que soient les signes des coefficiens de Φ.

[32.] En général, $\sigma^{(m)}$ étant le lieu des centres des cercles osculateurs de $\sigma^{(m-1)}$, le rayon osculateur R de $\sigma^{(m)}$ au point $\Phi = o$, est égal à l'arc $\Sigma^{(m)}$ de $\sigma^{(m)}$, qui est intercepté entre ce point et le point

Digitized by Google

d'origine du développement. Soit t la valeur de φ à ce dernier point. Pour $\varphi = o$, on a alors $R = \Sigma^{(m)}$.

Mais on peut considérer $\sigma^{(m+1)}$ comme formé par l'enveloppement d'une droite quelconque R autour de $\sigma^{(m)}$; alors R est indéterminé, il peut être > ou < $\Sigma^{(m)}$.

Dans le premier cas, $\sigma^{(m+1)} = R\varphi - {}'F:\varphi$; si $\sigma^m = F:\varphi$, l'origine de $\sigma^{(m)}$ étant au point ou $\varphi = o$. De plus, θ étant donné par l'équation $R = F:\theta$; $\sigma^{(m+1)}$ s'étend jusqu'au point ou $\Sigma^{(m+1)} = R\theta - {}'F:\theta$ et ou $\varphi = \theta$. Au-delà de $\varphi = \theta$, le développement de $\sigma^{(m)} - R$ donne $\sigma^{(m+1)} = {}'F:\varphi - R\varphi + const.$; nommant donc

$\left.\begin{matrix}\sigma^{m+1}:\theta,o\\ \sigma^{m+1}:\theta,1\end{matrix}\right\}$ l'arc de $\sigma^{(m+1)}$ prenant son origine à $\varphi = \theta$, et dirigé dans le sens de φ $\left\{\begin{matrix}<\theta;\sigma^{m+1}:\theta,o\\ >\theta;\sigma^{m+1}:\theta,1\end{matrix}\right\} = {}'F:\varphi - R\varphi - \Sigma^{(m+1)}$.

Ainsi $\varphi = \theta$ répond alors à un point de rebroussement dans le cours de $\sigma^{(m+1)}$; et $\sigma^{m+1}:\theta,1$, formé d'abord par le développement de $\sigma^{(m)} - R$, est tracé ensuite par l'enveloppement de la branche contiguë à celle-là. C'est ce qui a lieu dans le cours entier de σ^{m+1}, lorsque $F:\varphi = R$ a toutes ses racines réelles : sur quoi, *voy.* l'art. [17.].

Au contraire, si R est > Σ^m son extrémité, tandis qu'il enveloppe $\sigma^{(m)}$, trace d'abord $\sigma^{m+1} = R\varphi - {}'F:\varphi$. A l'extrémité de Σ^m, $\Sigma^{(m+1)} = R\theta - {}'F:\theta$, θ étant donné par l'équation $\Sigma^m = F:\theta$; et le rayon de courbure, au lieu d'être nul, est égal à $R - \Sigma^{(m)}$. De plus, il est aisé de s'assurer que l'extrémité de $\Sigma^{(m)}$ ne peut être alors qu'un point de rebroussement dans le cours de σ^m ; en sorte que

$\left.\begin{matrix}\sigma^m:\theta,o\\ \sigma^m:\theta,1\end{matrix}\right\}$ étant l'arc de $\sigma^{(m)}$ prenant son origine en $\varphi = \theta$, et se dirigeant dans le sens de φ $\left\{\begin{matrix}<\theta:\sigma^m:\theta,o\\ >\theta:\sigma^m:\theta,1\end{matrix}\right\} = F:\theta - F:\varphi$.

Digitized by Google

Donc au point où $\varphi = \theta$, $R - \Sigma^{(m)}$ est le rayon osculateur des deux arcs $\sigma^m : \theta, o$, $\sigma^m : \theta, 1$, qui se touchent à ce point. Donc, en développant $\sigma^m : \theta, 1$, comme $\sigma^m : \theta, o$, la développante de $\sigma^m : \theta, 1$, est

$$\sigma^{m+1} = \int d\varphi \, [R - \Sigma^m + \sigma^m : \theta, 1] = R\varphi - {}'F : \varphi.$$

Ainsi, au lieu d'un point de rebroussement répondant à $\varphi = \theta$, σ^{m+1} forme alors autour de ce point un nœud tel que $\epsilon' : 1 \,.\, \epsilon'' : 2 \,.\, \epsilon''$, *(fig. 8)*.

De là il est aisé de conclure que la première racine de $R - F : \varphi = o$, ou celle qui s'évanouit avec le terme, tout constant dans l'équation prime de la proposée, est alors imaginaire. C'est le cas de la *figure 4*, ou a est $> o$ dans $\frac{x^3}{2.3} + ax + b = o$.

[33.] Que $\Sigma^{(m)}$ désigne l'arc de $\sigma^{(m)}$ intercepté entre le point où $\varphi = o$ et le premier point de rebroussement dans son cours. Il suit de l'article précédent, que le procédé indiqué [31.] est général pour toutes les valeurs possibles de Σ, ou quelles que soient la longueur et la direction qu'il faille supposer à la droite Σ, pour obtenir le coefficient de φ dans $\sigma^{(m+1)}$.

Car ce procédé distingue d'abord le double cas du signe $+$ ou $-$; et quel que soit Σ, il est nécessairement $=$, ou $>$, ou $<$ que $\Sigma^{(m)}$. Or, on a vu [32.] que la valeur de σ^{m+1} est la même dans les trois hypothèses.

Ajoutons que $x : o$, $x' : o$, désignant la racine de la proposée et celle de son équation prime qui s'évanouissent avec le terme constant,

Si Σ est $< \Sigma^{(m)}$, $x' : o$ est réel;

Si Σ est $> \Sigma^{(m)}$, $x' : o$ est imaginaire;

Si $\Sigma = \Sigma^{(m)} \ldots$, $x' : o = x : o$, et qu'alors la proposée a deux racines égales entre elles et à $x' : o$.

[34.] Étant donc proposée l'équation

Digitized by Google

$$\frac{x^{m+1}}{1.2...m+1} - a\frac{x^{m-1}}{1.2...m-1} + b\frac{x^{m-2}}{1.2...m-2} \ldots + l\frac{x^2}{2} + px + q = 0,$$

sa racine $x:0$ sera construite par le procédé suivant, qui est également remarquable par sa simplicité et par sa généralité.

Sur l'horizontale AB *(fig. 9)*, indéfiniment prolongée, du rayon $\theta C = 1$, on tracera la circonférence $\theta\varphi\overline{\varphi}$

du point θ, origine des arcs $\left\{\begin{matrix}\theta\varphi, +\varphi\\ \theta\varphi, -\varphi\end{matrix}\right\}$, on coupera sur AB, $\theta a = a$

de θ vers $\left\{\begin{matrix}A \text{ si } a \text{ a le signe } +,\\ B \text{ si } a \text{ a le signe } -;\end{matrix}\right.$

du point a, on tirera sur $a\theta$ la perpendiculaire $ab = b$ $\left\{\begin{matrix}\text{au-dessus}\\ \text{au-dessous}\end{matrix}\right.$

de l'horizontale, si b a le signe $\left\{\begin{matrix}-,\\ +;\end{matrix}\right.$

du point b, on tirera sur ab la perpendiculaire $bc = c$,

de a vers $\left\{\begin{matrix}A \text{ en dehors de } ab,\\ B \text{ en dedans de } ab,\end{matrix}\right\}$ si c a le signe $\left\{\begin{matrix}+,\\ -;\end{matrix}\right.$

du point c, on tirera sur bc la perpendiculaire $cd = d$ $\left\{\begin{matrix}\text{au-dessus}\\ \text{au-dessous}\end{matrix}\right.$

de l'horizontale, si d a le signe $\left\{\begin{matrix}-,\\ +.\end{matrix}\right.$

On continuera à tirer ainsi perpendiculairement les unes aux autres m droites égales en longueur $a, e, f, l \ldots . p, q$, ou aux m coefficiens de x dans la proposée : le sens de ces droites étant

pour le $\left\{\begin{matrix}4^{\text{ème}}, 6^{\text{ème}}, 8^{\text{ème}} \ldots . 2p^{ème},\\ 3^{\text{ème}}, 5^{\text{ème}}, 7^{\text{ème}} \ldots . (2p+1)^{ème},\end{matrix}\right.$ $\left\{\begin{matrix}\text{vertical au-dessus ou au-dessous de l'horizontale}\\ \text{horizontal dirigé à droite ou à gauche de la verticale}\end{matrix}\right.$

Digitized by Google

coefficient de la proposée, compté à partir du premier a, et leur direction dans cette double situation étant déterminée par le signe de la lettre qu'ils représentent.

Cela posé, la $m^{ème}$ lettre ou q déterminera sur la $m^{ème}$ développante un arc de celle-ci égal à q, et l'arc correspondant sur la circonférence génératrice sera la racine cherchée $x:0$.

[35.] Soit proposée pour exemple l'équation

$$x^5 - 80.x^3 - 360.x^2 - 480.x - 180 = 0;$$

on la mettra d'abord sous cette forme :

$$\frac{x^5}{2.3.4.5} - 4\frac{x^3}{2.3} - 6\frac{x^2}{2} - 4x - 1,5 = 0.$$

Du point θ et du rayon $C\theta = 1$ (*fig. 10*), ayant tiré l'arc indéfini $-\varphi$, on prendra

$$\theta a = 4, \quad ab = 6, \quad bc = 4, \quad cd = 1,5;$$

ce qui donne le point σ^v sur $c\sigma^v$, et pour l'arc cherché $\theta\varphi = -36^o$ à un degré près; d'où $x:0 = -0,63$ à un centième près.

[36.] Si, sur une développée, on marque le point d'origine de son développement, on sait que le cours entier de sa développante est connu. Il est évident que le cours entier de cette développante sera encore déterminé, si la développée étant connue, on donne pour un point quelconque de cette dernière la valeur et la direction de son rayon osculateur. Les droites $a, b, c, d \ldots p, q$, déterminent donc le cours entier des σ dont elles représentent le rayon de courbure au point correspondant à $\varphi = 0$.

C'est ainsi que le rayon étant 1 et le point θ marqué à volonté sur la circonférence génératrice; ce point θ détermine σ', σ' et a déterminent σ'', σ'' et b déterminent le cours entier de σ''', &c.

De là un procédé général pour déterminer le cours entier de $\sigma^{(m)}$

Digitized by Google

par $a, b, c \ldots p, q$, [23.]; et le moyen de déterminer toutes les racines réelles de $q + F:x = 0$, quelle que soit la nature des racines de $F':x = 0$; et indépendamment de ces racines, ce qui complète, dans tous les cas, la construction simultanée de toutes les racines réelles d'une équation algébrique [21.].

[37.] Au point où $\varphi = 0$, aboutissent deux branches de $\sigma^{(m)}$ l'une $\sigma^m:0,1$ / l'autre $\sigma^m:0,2$ } dirigées vers un $\Sigma^{(m-1)}$ d'un indice { impair, pair.

Si, dans la proposée, q a le signe $\left\{\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right\}$, il faut prendre q sur

$$\left\{\begin{matrix}\sigma^m:0,1\\ \sigma^m:2,2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}-\\+\end{matrix}\right\}\left\{\frac{\varphi^{m+1}}{1.2.m+1}\right\}\ldots\ldots + p\varphi.$$

Soit $\left\{\begin{matrix}\Sigma^m:0,1\\ \Sigma^m:0,2\end{matrix}\right\}$ la longueur de l'arc entier de $\left\{\begin{matrix}\sigma^m:0,1\\ \sigma^m:0,2\end{matrix}\right\}$ depuis $\varphi = 0$ jusqu'au premier point de rebroussement de son cours. La construction ci-dessus exige que l'on ait $\Sigma^m:0,1 - q > 0$ ou $\Sigma^m:0,2 - q > 0$; c'est la condition de la réalité de $x:0$.

Il suit de là que $x:0$ est construit toutes les fois qu'il est réel. Dans le cas contraire, c'est l'avantage de la méthode de faire connaître que $x:0$ est imaginaire.

Mais le cours entier de σ^m étant connu, on pourra construire, à défaut de $x:0$, telle autre racine que l'on voudra.

On conclut de ce qui précède,

1.° Que si $\Sigma^{(m)} - q$ est < 0, $x:0$ est imaginaire du premier ordre seulement; ainsi quel que soit le degré pair ou impair d'une équation algébrique, $x:0$ est toujours ou réel ou imaginaire du premier ordre seulement :

2.° Que si $\sigma^{(m)}$ ne forme aucun nœud dans l'étendue de son cours, depuis 0 jusqu'à $\sigma^{(m)} = q$, les racines $x':0$, $x'':0$, $x''':0\ldots\ldots$, de toutes

Digitized by Google

toutes les dérivées de la proposée, sont toutes réelles ; en sorte que $x:o$, qui est toujours la plus petite des racines réelles de son signe dans la proposée, sera encore la plus petite de ces racines, en y rendant réelles celles qui peuvent être imaginaires :

3.° Que dans le cas contraire, une ou plusieurs des $x':o$, $x'':o$, $x''':o$, sont imaginaires, d'où résulte le corollaire inverse précédent.

---

§. IV.e

Des Séries qui expriment l'une des Racines ou une Fonction quelconque de celle-ci.

[38.] Que l'on prenne *(fig. 2)*, sur le cours de la $m^{ème}$ développante l'arc $\epsilon^m s^m = S$, dont l'arc de courbure soit μ. Désignons par s l'arc $\epsilon^m.\sigma^m$ de cette développante, dont l'arc de courbure soit $\downarrow$, $\downarrow - \mu$ sera l'arc de courbure de $s-S$; et on aura par le théorème de *Taylor*,

$$\downarrow = p + [s-S].\frac{d\mu}{dS} + \frac{(s-S)^2}{2}.\frac{d^2\mu}{dS^2} + \frac{(s-S)^3}{2.3}.\frac{d^3\mu}{dS^3} + \&c.$$

J'indique, pour abréger, les arcs correspondans à S sur les développantes inférieures

$$s^{m-1}.\Sigma^{m-1} \text{ par } S', \quad s^{m-2}.\Sigma^{m-2} \text{ par } S'', \quad \&c.,$$

$d\mu$ étant l'arc de courbure des élémens dS', dS'', dS''', qui correspondent à dS, on a

$$d\mu = \frac{dS}{S'} = \frac{dS'}{S''} = \frac{dS''}{S'''} \ldots\ldots \&c.,$$

ce qui donne

$$dS' = \frac{S''}{S'}\,dS, \quad dS'' = \frac{S'''}{S'}\,dS, \quad \&c.,$$

d'où l'on tire

Digitized by Google

$$\begin{cases} \frac{d\mu}{dS} = \frac{1}{S'}, \\ \frac{d^2\mu}{dS^2} = \frac{d\frac{1}{S'}}{dS} = -\frac{S''}{S'^3}, \\ \frac{d^3\mu}{dS^3} = -\frac{d\frac{S''}{S'^3}}{dS} = -\frac{S'''}{S'^4} + 3\frac{\overline{S''}^2}{S'^5}, \quad \&c. \end{cases}$$

Substituant ces valeurs dans $\downarrow$,

$$(a)\quad \downarrow = \mu + \frac{s-S}{S'} - \frac{\overline{s-S}^2}{2}\cdot\frac{S''}{S'^3} + \frac{\overline{s-S}^3}{2.3.4}\cdot\left[-\frac{S'''}{S'^4} + 3\frac{\overline{S''}^2}{S'^5}\right]\ldots$$
$$+ \frac{\overline{(s-S)}^4}{2.3.4}\cdot\left[-\frac{S^{IV}}{S'^5} + 10\frac{S''.S'''}{S'^6} - 3.5\frac{\overline{S''}^3}{S'^7}\right] + \&c.;$$

mais, [8.]

$$(b)\quad s = \frac{\downarrow^{m+1}}{1.2\ldots m+1} + a\frac{\downarrow^{m-1}}{1.2\ldots m-1} + b\frac{\downarrow^{m-2}}{1.2\ldots m-2} \ldots\ldots$$
$$+ f'\frac{\downarrow^2}{2} + p\downarrow = f:\downarrow,$$

en prenant $t^m.\varepsilon^{(m-1)} = p$, $t^{(m-1)}.\varepsilon^{(m-2)} = f$, &c.

La série (a) donne donc la valeur de $\downarrow$ dans l'équation (b) en valeur d'un arc μ donné par $S = f:\mu$.

[39.] Observons que, dans la série (a), S', S'', S''', &c. se réduisent à $f':\mu$, $f'':\mu$, $f''':\mu$, &c. Quelle que soit donc l'équation proposée, en la représentant par

$$y = f:x,$$

la valeur de x, dans cette équation, sera exprimée en série par

$$x = \mu + \frac{f:x-f:\mu}{f':\mu} - \frac{\overline{f:x-f:\mu}^2}{2}\cdot\frac{f'':\mu}{f':\mu^3} + \frac{\overline{f:x-f:\mu}^3}{2.3}\cdot\left[\frac{-f''':\mu}{f':\mu^4} + 3\frac{\overline{f'':\mu}^3}{f':\mu^5}\right]\ldots$$
$$+ \frac{\overline{f:x-f:\mu}^4}{2.3.4}\cdot\left[-\frac{f^{IV}:\mu}{f':\mu^5} + 10.\frac{f'':\mu.f''':\mu}{f':\mu^6} - 3.5.\frac{\overline{f'':\mu}^4}{f':p^7}\right] + \&c.$$

Digitized by Google

Si donc la proposée est $f:x=0$, on a

$$x=\mu-\frac{f:\mu}{f':\mu}-\frac{\overline{f:\mu}^{2}}{2}\frac{f'':\mu}{f'^{2}:\mu^{3}}+\frac{\overline{f:\mu}^{3}}{2.3}\cdot\left[\frac{f''':\mu}{f':\mu^{4}}-\frac{3f'':\mu}{f':\mu^{5}}\right]+\&c.,$$

ce qui est la formule connue d'*Euler* (Calcul différentiel, art. 234).

[40.] On aurait pu obtenir la série (a), en partant de l'équation $d\varphi=\frac{ds}{s'}$; et intégrant par parties, ce qui donne la faculté d'introduire autant de termes qu'on voudra dans $\downarrow$, et de comprendre dans un seul terme, sous le signe $\int$, la somme de tous les termes qui suivent.

Mais cette série devient bien plus générale par le procédé que nous allons indiquer. Que la proposée soit $f:x=\Delta$; et supposons que Δ devient $\Delta-z$, quand x devient x, $x-i$, on aura

$$di=\frac{dz}{f':x-i}.$$

Je multiplie les deux membres de cette équation par une fonction quelconque $\varphi':x-i$ de $x-i$, telle que

$$d\varphi:x-i=-di.\varphi':x-i,$$

ce qui donne

$$di\times\varphi':x-i=dz.\frac{\varphi':x-i}{f':x-i};$$

intégrant par parties, de manière que i et z soient nuls en même temps, et faisant dans l'intégrale $x-i=\mu$, on trouve

$$(c)\quad \varphi:x=\varphi:\mu+(\Delta-f:\mu)\frac{\varphi':\mu}{f':\mu}+\overline{\Delta-f:\mu}^{2}.\frac{1}{2f':\mu}.\frac{d\frac{\varphi':\mu}{f':\mu}}{d\mu}\ldots$$

$$+\frac{\overline{(\Delta-f:\mu)}^{n}}{1.2\ldots n}.\frac{1}{f':\mu}.\frac{d\left\{\frac{1}{f':\mu}\,d\left\{\frac{1}{f':\mu}\ldots\ldots d\frac{\varphi':\mu}{f':\mu}\right\}\right\}}{d\mu^{n-1}};$$

Digitized by Google

la somme des termes qui suivent au-delà du $\overline{n+1}^{ème}$ terme de cette série étant

$$\int \frac{\zeta^n . dZ}{1.2...n} \cdot \frac{1}{f':x-i} \cdot \frac{d\left\{\frac{1}{f':x-i}\, d\left\{\frac{1}{f':x-i} \ldots\ldots d\frac{\varphi':x-i}{f':x-i}\right\}\right\}}{\{-di\}^n};$$

cette intégrale devant être prise depuis $Z=o$ jusqu'à $Z=\Delta-f:\mu$, en sorte qu'on peut toujours en apprécier les limites par le théorème connu de *Lagrange*.

[41.] La série (c) donne une fonction quelconque (φ) de x, cette variable étant donnée elle-même par l'équation $f:x=\Delta$ ou $f:$, peut désigner elle-même une fonction quelconque.

Prenons $f:x=\Sigma:x+\sigma:x$; $\Sigma:$, $\sigma:$, désignant deux nouvelles fonctions de x qui sont assujetties à cette seule condition que leur somme soit égale à $f:x$. Supposons que $\Sigma:x=o$ donne $x=\mu$, $f:\mu$ se réduit à $\sigma:\mu$, et la série (c) devient

$$(d)\quad \varphi:x=\varphi:\mu+(\Delta-\sigma:\mu)\frac{\varphi':\mu}{f':\mu}+\frac{[\Delta-\sigma:\mu]^2}{2}\times\frac{1}{f':\mu}\cdot\frac{d\frac{\varphi':\mu}{f':\mu}}{d\mu}+\&c.$$

qui donne $\varphi:x$ par la racine μ d'une équation $\Sigma:\mu=o$, la fonction Σ pouvant elle-même être prise à volonté, pourvu que celle que désigne σ soit alors donnée par $\sigma:x=f:x-\Sigma:x$.

Puisque

$$f:x=\Sigma:x+\sigma:x,\quad f':x=\Sigma':x+\sigma':x,\quad \text{d'où}\quad f':\mu=\Sigma':\mu+\sigma':\mu;$$

et ordonnant $\frac{1}{f':\mu}$, $\frac{1}{f':\mu^2}$, &c. dans l'équation (d), relativement aux puissances inverses de $\Sigma':\mu$, on obtiendra une nouvelle série pour $\varphi:x$.

Pour en donner l'exemple le plus simple, nous prendrons $\varphi:x=x$ et Δ étant nul, en sorte que la proposée soit $f:x=o$, ce qui n'en

Digitized by Google

limite pas la généralité, on obtiendra, en suivant le procédé indiqué, la valeur suivante pour x,

$$x=\left\{\begin{array}{l}\mu-\dfrac{f:\mu}{\Sigma':\mu}+\dfrac{1}{2}\dfrac{d\left\{\frac{f:\mu}{\Sigma':\mu}\right\}^2}{d\mu}-\dfrac{1}{2.3}\dfrac{d^2.\left\{\frac{f:\mu}{\Sigma':\mu}\right\}^3}{d\mu^2}+\dfrac{1}{2.3.4}\dfrac{d^3.\left\{\frac{f:\mu}{\Sigma':\mu}\right\}^4}{d\mu^3}+\&c.\\ \quad-\dfrac{1}{4}\dfrac{d\frac{1}{\Sigma':\mu^2}}{d\mu}+2f:\mu\{f':\mu-\Sigma':\mu\}\dfrac{d\frac{1}{\Sigma':\mu}}{d\mu}+\&c. \qquad (e)\\ \quad+\dfrac{f:\mu}{2.3}.\left\{\dfrac{d^2\frac{1}{\Sigma:\mu^3}}{d\mu^2}-\dfrac{1}{2\Sigma':\mu}.\dfrac{d^2\frac{1}{\Sigma':\mu^2}}{d\mu^2}\right\}+\&c.,\end{array}\right.$$

où μ exprime la valeur de x dans la fonction prise à volonté $\Sigma:x=0$.

Le cas le plus simple pour Σ est celui où on prend

$$\Sigma:x = a - x;$$

alors

$$\Sigma':\mu=-1, \quad f:x=\Sigma:x+\sigma:x=-x+a+\sigma:x;$$

effaçant les termes qui se détruisent dans la série (e), elle devient

$$x=a+\sigma:a+\frac{1}{2}.\frac{d.\overline{\sigma:a}^2}{da}+\frac{1}{2.3}.\frac{d^2.\overline{\sigma:a}^3}{d:a^2}+\frac{1}{2.3}.\frac{d^3.\overline{\sigma:a}^4}{d:a^3}+\&c.$$

pour exprimer la valeur de x donnée par l'équation $x=a+\sigma:x$. Cette série est celle qui résulte du théorème connu de *Lagrange* (*).

En suivant le même procédé, on exprimera $\varphi:x$ par une série analogue à la série (e) pour x; supposant ensuite $\Sigma':\mu=-1$, on trouvera, comme un cas particulier de la première, la série connue pour exprimer $\varphi:x$, x étant donnée par l'équation

$$x = a + \sigma:x.$$

[42.] Dans le mémoire cité, *Lagrange* a fait voir comment, en dis-

(*) Mémoires de Berlin, année 1758, *page 275*.

Digitized by Google

tinguant entre elles les racines d'une équation algébrique du degré n, on peut exprimer par des séries régulières une fonction quelconque de chacune de ces racines. En suivant sa méthode, on ne peut introduire dans la série qui exprime $\Phi:x$ que les valeurs de x qui résultent de la comparaison de deux des termes de la proposée ; en sorte que $\Sigma:x$ ne peut avoir d'autre forme que la suivante, $A + Bx^m$.

Il est aisé de faire voir que dans l'équation (e), on peut composer $\Sigma:x$ de formes incomparablement plus nombreuses et toutes différentes de celles-là, en combinant 3 à 3, 4 à 4, 5 à 5, &c. tous les termes de la proposée.

De là un moyen de présenter chacune des racines de la proposée sous un grand nombre de formes que la méthode citée ne donne pas; mais les détails de ce procédé seraient étrangers au principal objet de ce mémoire, il nous suffit de l'y avoir indiqué.

Digitized by Google

EXPÉRIENCES

POUR DÉTERMINER LA DENSITÉ DE LA TERRE;

PAR HENRY CAVENDISH,

Membre de la Société royale de Londres;

Traduit de l'Anglais (*Philosophical Transactions*, tome 88, année 1798); par M. N. M. CHOMPRÉ.

L'importance de ce Mémoire et la difficulté de se le procurer, ont fait penser qu'il serait utile d'en publier une traduction complette dont M. *Chompré* a bien voulu se charger.

JOHN MICHELL, de la Société royale de Londres, avait imaginé une méthode de déterminer la densité de la Terre, en rendant sensible l'attraction de la matière en petites masses; mais, occupé d'autres objets, il ne termina son appareil que peu de temps avant sa mort, et il ne vécut pas assez pour l'employer à aucune expérience. Cet appareil passa entre les mains de l'honorable *Francis John Hyde Wollaston*, professeur à Cambridge, qui a bien voulu m'en faire don, n'ayant pas les facilités nécessaires pour en faire l'usage qu'il eût desiré.

L'appareil est très-simple : c'est un bras ou fléau de bois, long de six pieds (*) [1,83 met.], fait de manière à être à-la-fois très-fort et très-

(*) Toutes les mesures sont anglaises, et suivies, ainsi que les poids anglais, dans cette traduction, de leur évaluation en valeurs métriques. *(Note du Traducteur.)*

Digitized by Google

léger. Il est suspendu, dans une position horizontale, par un fil métallique délié, long de 40 pouces [1,02 mètres]; de chaque extrémité pend une balle de plomb, du diamètre de 2 pouces [51 millimètres] environ, et le tout est enfermé dans une boîte de bois étroite, pour garantir l'appareil des agitations de l'air.

Comme la force requise pour faire tourner le fléau autour de son centre se réduit à ce qui est nécessaire pour tordre le fil qui le suspend, il est évident que si le fil est suffisamment délié, la plus petite force, telle que l'attraction d'un plomb de quelques centimètres de diamètre, déplacera sensiblement le fléau. M. *Michell* se proposait d'employer, pour produire cet effet, des boules de plomb de 8 pouces [203 millimèt.] de diamètre. L'une de ces boules devait être placée d'un côté de la boîte, vis-à-vis l'une des deux balles, aussi près de cette balle qu'on l'eût pu convenablement, et l'autre boule vis-à-vis l'autre balle, mais de l'autre côté de la boîte; de sorte que l'attraction de chacun de ces deux poids devait concourir à attirer le fléau hors de sa position : après quoi, sa nouvelle position étant bien constatée, les deux poids devaient être placés aux côtés opposés de la boîte, de manière à attirer le fléau en sens contraire; puis, en déterminant encore cette dernière position, la demie différence entre cette position et la précédente, devait faire connaître le chemin parcouru par le fléau, en vertu de l'attraction des poids.

Pour en déduire la densité de la Terre, il est nécessaire de déterminer quelle force est requise pour faire parcourir au fléau un espace donné. Pour y parvenir, M. *Michell* se proposait de mettre le fléau en mouvement, et d'observer le temps de ses vibrations, d'où il eût aisément tiré la détermination cherchée (*).

(*) M. *Coulomb* a, dans plusieurs cas, employé des moyens semblables pour essayer de faibles attractions; mais M. *Michell* m'avait informé de son intention de faire cette expérience, et de la méthode qu'il se proposait de suivre, avant la publication d'aucune des expériences de M. *Coulomb*.

M.

Digitized by Google

M. *Michell* avait préparé deux supports de bois; il devait y placer les poids de plomb, qu'il eût avancés, et, à ce qu'il paraît, de la main simplement, jusqu'à ce qu'ils fussent presque en contact avec la boîte.

Comme la force avec laquelle les balles sont attirées par ces poids est presque infiniment petite, n'excédant pas 0,00000002 de leur poids, il est clair qu'une très-petite force perturbatrice suffira pour nuire au succès de l'expérience; et on a lieu de penser, d'après les expériences qui seront rapportées, que la force perturbatrice dont il est le plus difficile de se défendre, est celle qui provient des variations de température : car, si l'un des côtés de la boîte est plus chaud que l'autre, l'air en contact avec le côté plus chaud, se raréfiera et s'élèvera; l'air de l'autre côté descendra; et il s'établira ainsi un courant qui dérangera sensiblement le fléau (*).

Convaincu de la nécessité d'éviter cette source d'erreur, je pris le parti de placer l'appareil dans une chambre constamment fermée, d'observer de dehors le mouvement du fléau, au moyen d'un télescope, et de suspendre les poids de plomb de manière que je pusse les mouvoir sans entrer dans la chambre. Cette différence dans la manière d'observer exigeait quelques changemens dans l'appareil de M. *Michell;* et comme cet appareil ne me paraissait pas d'ailleurs aussi convenable qu'on pouvait le desirer à quelques égards, je me décidai à le refaire en très-grande partie.

(*) M. *Cassini* avait placé à l'observatoire de Paris un compas de variation, construit de manière à rendre visibles de très-petits changemens de position, et l'aiguille y était suspendue par un fil de soie. M. *Cassini* reconnut qu'en restant près de la boîte pour observer, il occasionnait une digression sensible dans l'aiguille. Je ne doute pas que cet écart ne fût l'effet d'un courant d'air. Deux causes concouraient à augmenter ce courant; la boîte était en métal, et transmettait par conséquent la chaleur plus promptement que si elle eût été en bois; et, de plus, elle était profonde de quelques pouces. Pour diminuer l'effet du courant d'air, il faut que la boîte dans laquelle se meut l'aiguille, n'ait que la profondeur nécessaire pour empêcher l'aiguille de toucher ou le fond de la boîte ou sa partie supérieure.

Digitized by Google

La *fig. 1, pl. I.re*, est une section longitudinale et verticale de l'instrument et de la chambre dans laquelle il est placé. *ABCDDCBAEFFE* est la boîte; *x* et *x* sont les deux balles, qui sont suspendues par les fils de métal *hx*, au fléau *ghmh*, lequel est lui-même suspendu par le fil métallique délié *gl*. Ce fléau consiste en une verge ou baguette de bois mince, ferme et léger, renforcé par un fil d'argent *hgh*, ce qui le met en état de résister, quoique très-léger, au poids des balles (*).

La boîte est supportée par quatre vis sur des poteaux fixés solidement sur le plancher, et est maintenue dans une position horizontale. Pour ne pas rendre la figure confuse, on n'y a représenté que deux de ces vis *S* et *S*. *GG* et *GG* sont les murs de la chambre ou cabinet; *W* et *W* sont les poids de plomb, qui sont suspendus à la cheville centrale *Pp* par les baguettes de cuivre *RrPrR*, et la traverse de bois *rr*. La cheville passe, à travers un trou, dans la poutre *HH;* elle tourne sur elle-même, dans ce trou, perpendiculairement au-dessus du centre de l'instrument, et une rondelle *p* l'empêche de sortir de la poutre. *MM* est une poulie fixée à cette cheville, et *Mm*, une corde enveloppant la poulie, et traversant le mur *GG;* au moyen de quoi, l'observateur peut faire tourner la cheville, et par conséquent changer la situation des poids.

La *fig. 2, pl. II.e*, offre un plan de l'instrument. *AAAA* est la boîte; *SSSS*, les quatre écrous qui la supportent; *hh*, le fléau et les balles; *W* et *W*, les poids; *MM*, la poulie qui les fait mouvoir. Quand les poids sont dans cette position, tous deux concourent à attirer le fléau dans la direction *hW;* mais si on les place dans la situation *w*

(*) La baguette de M. *Michell* était entièrement de bois, et beaucoup plus forte et plus épaisse que celle-ci, sans être beaucoup plus pesante; mais elle était courbe, quand elle m'a été remise. J'ai préféré d'en faire une autre, et de cette forme, parce qu'elle est plus aisée à construire, qu'elle éprouve moins de résistance de la part de l'air; et qu'à raison du moins de complication de forme, je pouvais plus facilement calculer l'attraction de cette baguette par les poids.

Digitized by Google

et *w*, représentée par les lignes ponctuées, l'un et l'autre tendent alors à attirer le fléau dans la direction contraire *hw*.

Pour empêcher ces poids de heurter l'instrument, des pièces de bois fixées au mur du cabinet, les arrêtent, lorsqu'ils arrivent à un cinquième de pouce [5 millim.] de la boîte; et j'ai éprouvé que les poids peuvent frapper ces pièces avec une force considérable, sans que l'instrument en soit sensiblement ébranlé.

Pour déterminer la position du fléau, des plaques d'ivoire, divisées en 20.es de pouce [1,27 millim.] sont placées en dedans de la boîte, aussi près de chaque extrémité du fléau qu'il se peut sans le toucher. Les divisions sont subdivisées en cinq parties par un petit vernier, de même en ivoire, placé à chaque bout du fléau; en sorte qu'on peut aisément observer la position du fléau jusqu'aux centièmes de pouce [0,25 millim.], et à de moindres quantités encore par estimation. On voit ces divisions avec de courts télescopes *T* et *T (fig. 1)*, et à travers des ouvertures pratiquées aux bouts de la boîte, et fermées avec du verre. Des lampes *L* et *L*; garnies de verres convexes, et convenablement placées, éclairent les divisions : aucune autre lumière n'est admise dans la chambre.

Les divisions sur les plaques d'ivoire croissent dans la direction *Ww (fig. 2)*, de manière que, lorsque les poids sont placés dans les positions *w* et *w*, représentées par les cercles ponctués, la direction dans laquelle le fléau est attiré, fait répondre l'index à un nombre plus élevé sur les pièces d'ivoire. Par cette raison, j'appelle *position positive* cette position des poids.

Fk (fig. 1) est une verge en bois qui, au moyen d'une vis sans fin, fait tourner le support auquel est attaché le fil métallique *gl;* ce qui met l'observateur en état de faire tourner ce fil, jusqu'à ce que le fléau se trouve au milieu de la boîte, sans qu'on ait à craindre qu'il touche l'un ou l'autre côté. Le fil *gl* est fixé par en haut à son support, et par en bas au centre du fléau, au moyen de collets de cuivre, dans lesquels il est serré par des vis.

Digitized by Google

Dans ces deux figures, les différentes parties sont dessinées sur l'échelle d'un treizième, et à-peu-près dans les proportions des unes aux autres.

Avant d'exposer les expériences, je crois à propos de dire quelque chose de la manière d'observer. Je suppose le fléau en repos, et sa position observée. Faites mouvoir les poids, alors non-seulement le fléau sera attiré de côté, mais encore il sera mis en vibration et pour un temps considérable; en sorte que pour déterminer de combien il est écarté de sa première position, il est nécessaire d'observer les points extrêmes des vibrations, pour en déduire la détermination du point auquel il s'arrêterait, si son mouvement était détruit, ou du point de repos, comme je l'appellerai. Pour cela, j'observe trois points extrêmes successifs d'une vibration; je considère le milieu entre le premier et le troisième de ces points, comme étant le point extrême de vibration dans une direction, et je prends comme point de repos le milieu entre cet extrême et le second extrême : car, comme les vibrations vont continuellement en diminuant, il est évident que le milieu entre deux points extrêmes ne donnerait pas le vrai point de repos.

On pourrait croire qu'il serait plus exact d'observer un plus grand nombre de points extrêmes de vibration, de déterminer ainsi le point de repos d'après divers relevés de trois extrêmes, et de prendre le résultat moyen; mais il faut remarquer que, quelque soin qu'on apporte à écarter toute force perturbatrice, le fléau reste rarement dans un repos absolu pendant une heure, et qu'il est mieux, par cette raison, de déterminer le point de repos, en partant des observations faites, autant qu'on le peut, aussitôt après qu'on a fait mouvoir les poids.

Il faut ensuite déterminer la durée de la vibration. Pour y parvenir, j'observe les deux points extrêmes d'une vibration et les temps où le fléau arrive à deux divisions données entre ces extrêmes, ayant soin, autant que je puis prévoir le point-milieu, que ces divisions se trouvent de chaque côté, et à peu de distance, de ce point. Je calcule ensuite le point-

Digitized by Google

milieu de la vibration, et par une proportion, je trouve le temps où le fléau arrive à ce point-milieu. Après un nombre de vibrations, je répète cette opération, et je divise l'intervalle de temps entre les arrivées du fléau aux deux points-milieu déterminés, par le nombre des vibrations; ce qui me donne le temps d'une vibration. L'exemple suivant rendra cet exposé plus clair.

POINTS EXTRÊMES.	DIVISIONS.	TEMPS.	POINT DE REPOS.	TEMPS DU MILIEU de la vibration.
27,2				
	25	10h 23' 4"	.....	10h 23' 23"
	24	57		
22,1	.....	.....	24,60	
27	.....	.....	24,70	
22,6	.....	.....	24,75	
26,8	.....	.....	24,80	
23	.....	.....	24,85	
26,6	.....	.....	24,90	
	25	11 5 22	.....	11 5 22
	24	6 48		
23,4				

La première colonne donne les points extrêmes des vibrations; la seconde, les divisions intermédiaires; la troisième, le temps où le fléau atteint ces divisions; et la quatrième, le point de repos, qu'on trouve comme il suit : le milieu entre le premier et le troisième des points extrêmes est 27,1, et le milieu entre ce premier milieu et le second point extrême est 24,6, point de repos résultant des trois premiers points extrêmes. De même, on trouvera, par le second, le troisième et le quatrième extrêmes, 24,7 pour le point de repos, et ainsi de suite. La cinquième colonne donne le temps où le fléau arrive au

Digitized by Google

point-milieu de la vibration. Ce temps se trouve ainsi : le milieu entre 27,2 et 22,1 est 24,65, et c'est le point-milieu de la première vibration ; et comme le fléau arrive à 25 à $10^h\ 23'\ 4''$, et à 24 à $10^h\ 23'\ 57''$, je trouve, par une proportion, qu'il arrive à 24,65 à $10^h\ 23'\ 23''$. On voit de même que le fléau arrive au milieu de la septième vibration à $11^h\ 5'\ 22''$; d'où il résulte que six vibrations ont été accomplies en $41'\ 59''$, ou une vibration en $7'\ 0''$.

Pour apprécier cette méthode, il faut considérer de quelle manière la vibration est affectée par la résistance de l'air, et par le déplacement du point de repos.

Supposons que le fléau, dans la première vibration, se meuve de D en B *(fig. 3, pl. II)* ; et dans la seconde, de B en d, Bd étant moindre que DB, à raison de la résistance. Partagez DB en M, Bd en m, et Mm en n, et soit x un point quelconque dans la vibration ; alors, si la résistance est proportionnelle au carré de la vîtesse, le temps total d'une vibration est très-peu altéré ; mais, T étant au temps d'une vibration comme le diamètre d'un cercle est à sa demi-circonférence, le temps du mouvement, de B à n, excède une demi-vibration, à-peu-près de la quantité $\frac{T \times Dd}{8Bn}$; et le temps du mouvement, de B à m, sera plus court, de cette même quantité, qu'une demi-vibration ; et le temps du mouvement, de B à x, dans la seconde vibration, excède celui du mouvement, de x à B, dans la première, de la quantité

$$\frac{T \times Dd \times Bx^2}{4Bn^2 \times \sqrt{(Bx \times x\delta)}},$$

en supposant Dd partagé en deux en δ ; en sorte que, si l'on prend un milieu entre le temps de la première arrivée du fléau à x, et de son retour au même point, ce milieu sera un temps plus court que le vrai temps de son arrivée à B, de la quantité

$$\frac{T \times Dd \times Bx^2}{8Bn^2 \times \sqrt{(Bx \times x\delta)}}.$$

Digitized by Google

L'effet du mouvement dans le point de repos est que, quand le fléau se meut dans la même direction que le point de repos, le temps du mouvement, d'un point extrême d'une vibration à l'autre extrême, est augmenté, et qu'il est diminué si les deux directions sont en sens contraire. Mais, si le point de repos se meut uniformément, le temps du mouvement, d'un extrême au point-milieu de la vibration, sera égal à celui du mouvement, du point-milieu à l'autre extrême; et, de plus, le temps de deux vibrations successives sera très-peu altéré: par conséquent, le temps du mouvement, du point-milieu d'une vibration au point-milieu de la suivante, sera de même très-peu altéré.

Il paraît donc qu'à cause de la résistance de l'air, le temps où le fléau arrive au point-milieu de la vibration, n'est pas exactement le milieu entre les temps de ses arrivées aux points extrêmes; ce qui apporte quelque inexactitude dans ma méthode de trouver le temps d'une vibration. Cependant on doit observer que, comme le temps de l'arrivée au point-milieu précède le milieu de la vibration, tant dans la première que dans la dernière vibration, et à-peu-près en général, l'erreur produite par cette cause doit être de nulle considération. Au surplus, je ne vois pas de méthode qui soit susceptible de moins d'objections.

On peut déterminer le temps d'une vibration, soit par des essais préalables, soit à chaque expérience, en vérifiant le temps des vibrations du fléau, produites par le mouvement des poids. Il est mieux de le faire à chaque expérience; car si quelque attraction accidentelle, par exemple, l'électricité dans les carreaux de vitre à travers lesquels on observe le mouvement du fléau, venait à accroître la force nécessaire pour attirer l'extrémité du fléau, elle diminuerait aussi le temps de la vibration; et conséquemment, l'erreur dans le résultat sera beaucoup moindre, si l'on déduit des expériences, lorsqu'on vient de les faire, la force nécessaire pour l'attraction du fléau, que si on l'évaluait d'après des expériences préalables.

Digitized by Google

EXPOSÉ DES EXPÉRIENCES.

Dans mes premières expériences, le fil auquel était suspendu le fléau était de cuivre argenté, et long de 39,25 pouces [997 millim.]; un pied [305 millim.] de ce fil pesait 2,4 grains [13,4 centigram.]. Sa *rigidité* (*) était telle que le fléau accomplissait une vibration en quinze minutes environ. Je reconnus aussitôt que cette rigidité n'était pas suffisante, l'attraction des poids entraînant tellement les balles, qu'elle les faisait toucher aux parois de la boîte. Je me déterminai néanmoins à faire quelques expériences avec ce fil avant de le changer.

Les verges de suspension des poids de plomb étaient de fer dans cet essai; car, comme j'avais pris soin qu'il n'y eût rien de magnétique dans le fléau, il semblait peu important que ces verges fussent ou ne fussent pas aimantées : cependant, pour plus de sécurité, je détachai les poids de plomb, et j'essayai quel effet produiraient les verges par elles-mêmes. Je trouvai d'abord, par le calcul, que l'attraction de gravité de ces verges sur les balles était à celle des poids à-peu-près comme 17 à 2500; en sorte que, comme l'attraction des poids paraissait suffire, d'après une épreuve précédente, pour faire parcourir au fléau quinze divisions à-peu-près, l'attraction des verges seules devait lui faire parcourir environ 0,1 d'une division, et par conséquent 0,2 en faisant passer les verges, de la position rapprochée positive, à la négative, ou réciproquement.

Le résultat de l'expérience fut que, pendant les premières quinze minutes après le transport des verges, d'une position rapprochée à l'autre, très-peu de mouvement fut produit dans le fléau, et à peine au-delà de ce qui devait être produit par l'action de la gravité; mais ensuite le mouvement s'accrut, de sorte qu'après un quart-d'heure ou une demi-heure de plus, le fléau se trouva avoir parcouru $\frac{1}{2}$ ou $1\frac{1}{2}$ division, dans

(*) Ce terme, dans le cours de ce Mémoire, désigne particulièrement la résistance à la *torsion*; la *roideur* est la résistance à la *flexion*. *(Note du Traducteur.)*

la

Digitized by Google

la même direction qu'il avait dû suivre par l'action de la gravité. En ramenant les verges de fer à la position précédente, le fléau se mut en arrière, de la même manière qu'il l'avait fait d'abord en avant.

Il est à observer que le mouvement du fléau, dans ces expériences, n'était guère que celui qui souvent aurait pu se manifester sans aucune cause apparente. Cependant, comme dans les trois épreuves qui furent faites avec ces verges de fer, le mouvement fut constamment de la même espèce, quoique différant, en quantité, d'une demi-division à une division et demie, il semble qu'on est très-fondé à croire que ce mouvement était produit par les verges.

Cet effet me paraissant dû au magnétisme, quoiqu'il ne fût pas tel que je l'eusse attendu de cette cause, je substituai des verges de cuivre à celles de fer, et je les essayai comme ci-dessus. Le résultat fut qu'il parut encore se produire quelque effet de même espèce, mais plus irrégulier; de sorte que je l'attribuai à quelque cause accidentelle. Je rattachai donc les poids de plomb, et je procédai aux expériences.

On observera que l'effet produit, à ce qu'il semblait, par les verges de fer, en les faisant passer de la position positive rapprochée à la négative, ou réciproquement, n'excédait pas une division, en prenant le terme moyen; tandis que l'effet produit en faisant mouvoir les poids, de la position *intermédiaire* (à égale distance de la position positive et de la position négative) à la position rapprochée, était d'environ quinze divisions : en sorte que si j'avais continué d'employer les verges de fer, l'erreur que cette cause eût apportée dans le résultat, aurait à peine excédé un trentième du total.

Digitized by Google

1.re EXPÉRIENCE. *5 Août.*

LES POIDS DANS LA POSITION INTERMÉDIAIRE.

POINTS EXTRÊMES.	DIVISIONS.	TEMPS.	POINT DE REPOS.	TEMPS DU MILIEU de LA VIBRATION.	DIFFÉRENCE.
	11,4	9h 42′ 0″		h ′ ″	′ ″
	11,5	55 0			
	11,5	10 5 0	11,50		
A 10h 5′, les poids mis à la position positive.					
23,4					
27,6	.....	.....	25,82		
24,7	.....	.....	26,07		
27,3	.....	.....	26,10		
25,1					
A 11h 6′, les poids remis à la position intermédiaire.					
5					
	11	0 0 48	.....	0 5 13	
	12	1 30			
18,2	.....	.....	12	.....	14 56
	12	16 29	.....	16 9	
	11	17 20			
6,6	.....	.....	11,92	.....	14 36
	11	30 24	.....	30 45	
	12	31 11			
16,3	.....	.....	11,72	.....	15 13
	12	45 58	.....	45 58	
	11	47 4			
7,7					

Mouvement, en déplaçant les poids de l'intermédiaire à la positive... = 14,32

de la positive à l'intermédiaire.... = 14,1

Temps d'une vibration..... = 14′ 55″

Digitized by Google

On doit observer que, dans cette expérience, l'attraction des poids a attiré le fléau de 11,5 à 25,8 ; ensorte que si l'on n'eût usé de précaution, l'effet eût été tel que le fléau serait arrivé vers 40, et que par conséquent les balles eussent heurté la boîte. Pour l'empêcher, lorsque le fléau avait parcouru environ 15 divisions, je ramenais les poids à la position intermédiaire, et les y laissais jusqu'à ce que le fléau eût accompli à-peu-près sa vibration entière; je les remettais alors à la position positive. Par cet expédient, les vibrations étaient diminuées de manière que les balles ne touchaient pas les côtés de la boîte; et c'est ce qui ne m'a pas permis d'observer le premier point extrême de la vibration. J'ai employé la même méthode après le retour des poids à la position intermédiaire, et dans les deux expériences qui suivent.

Les vibrations, en déplaçant les poids de la position intermédiaire à la positive, étaient si petites, que j'ai cru inutile d'observer le temps de la vibration. Quand les poids étaient ramenés à la position intermédiaire, je déterminais le temps de l'arrivée du fléau au point-milieu de chaque vibration, pour voir jusqu'à quel point s'accordaient entre eux les temps des différentes vibrations. Dans la plupart des expériences qui suivent, je me suis contenté d'observer ce temps d'arrivée au point-milieu, seulement pour la première et la dernière vibration.

Digitized by Google

2.e EXPÉRIENCE. *6 Août.*

LES POIDS DANS LA POSITION INTERMÉDIAIRE.

POINTS EXTRÊMES.	DIVISIONS.	TEMPS.	POINT DE REPOS.	TEMPS DU MILIEU de LA VIBRATION.	DIFFÉRENCE.
	11	10h 4′ 0″		h ′ ″	′ ″
	11	11 0			
	11	17 0			
	11	25 0	11		
	Les poids mis à la position positive.				
29,3					
24,1	.....	.....	26,87		
30	.....	.....	27,57		
26,2	.....	.....	28,02		
29,7	.....	.....	28,12		
26,9	.....	.....	28,05		
28,7	.....	.....	27,85		
27,1	.....	.....	27,82		
28,4					
	Les poids remis à la position intermédiaire.				
6					
	12	1 3 50	.....	1 4 1	
	13	4 34			
18,5	.....	.....	12,37	.....	14 52
	13	18 29	.....	18 53	
	12	19 18			
6,5	.....	.....	11,67	.....	14 46
	11	33 48	.....	33 39	
	12	34 51			
15,2	.....	.....	11	.....	13 46
	13	45 8	.....	47 25	
	12	46 22			
7,1	.....	.....	10,75	.....	15 25
	11	2 3 48	.....	2 2 50	
	12	5 18			
13,6					

Mouvement du fléau, en déplaçant les poids de l'intermédiaire à la positive, = 15,87
de la positive à l'intermédiaire, = 15,45

Temps d'une vibration..... = 14′ 42″

Digitized by Google

3.e EXPÉRIENCE. *7 Août.*

LES POIDS ÉTANT DANS LA POSITION POSITIVE, ET LE FLÉAU UN PEU EN MOUV.t

POINTS EXTRÊMES.	DIVISIONS.	TEMPS.	POINT DE REPOS.	TEMPS DU MILIEU de LA VIBRATION.	DIFFÉRENCE.
31, 5		h ′ ″		h ′ ″	′ ″
29	.....	.....	30, 12		
31	.....	.....	30, 02		
29, 1					
	Les poids mis à la position intermédiaire.				
9					
	14	10 34 18	.....	10 34 55	
	15	35 8			
20, 5	.....	.....	14, 80	.....	14 44
	15	49 31	.....	49 39	
	14	50 27			
92	.....	.....	14, 07	.....	14 38
	14	11 5 7	.....	11 4 17	
	15	6 18			
17, 4	.....	.....	13, 52	.....	14 47
	14	11 18 46	.....	19 4	
	13	19 58			
10, 1	.....	.....	13, 30	.....	14 27
	13	33 46	.....	33 31	
	14	35 26			
15, 6					
	Les poids mis à la position positive.				
32					
	28	0 2 48	.....	0 2 59	
	27	3 56			
23, 7	.....	.....	27, 80		
31, 8	.....	.....	28, 27		
25, 8	.....	.....	28, 62		
	27	44 58	.....	47 40	
	28	46 50			
31, 1					

Mouvement du fléau, en déplaçant les poids de la position positive à l'interm. = 15, 22
de l'intermédiaire à la positive, = 14, 5

Temps d'une vibration, position intermédiaire..... = 14′ 39″
positive..... = 14 54

Digitized by Google

Ces expériences suffisent pour faire voir que l'attraction des poids sur les balles est très-sensible ; et de plus, elles sont assez régulières pour déterminer d'une manière très-approchée la quantité de cette attraction, puisque les résultats extrêmes ne diffèrent pas entre eux de plus d'une dixième partie. Mais on y découvre une circonstance dont la raison ne se présente pas d'abord, savoir que l'effet de l'attraction semble augmenter pendant une demi-heure, ou une heure, après le déplacement des poids; et on peut observer que, dans les trois expériences, la position moyenne a été en augmentant, pendant ce temps, après que les poids eurent passé à la position positive; et en décroissant, après que de cette position ils eurent passé à la position intermédiaire.

La première cause qui s'offrit à moi, c'est qu'il pouvait y avoir un manque d'élasticité dans le fil de métal suspendant le fléau, ou dans quelque partie de l'attache de ce fil; en sorte que ce fil céderait plus à une pression donnée, après une longue durée de cette pression, qu'il ne le faisait d'abord.

Pour en faire l'épreuve, je déplaçai l'index de manière que le fléau, s'il n'eût été arrêté par les côtés de la boîte, serait parvenu à environ 50 divisions; et comme il ne pouvait aller au-delà de 35, il s'ensuit qu'il était retenu dans une position distante de 15 divisions de celle qu'il aurait naturellement prise d'après le degré de rigidité du fil de métal, ou, en d'autres termes, la torsion de ce fil était de 15 divisions. Après deux ou trois heures dans cette position, l'index fut ramené de manière à laisser le fléau en liberté de prendre sa position naturelle.

Il faut observer que si un fil de métal éprouve une torsion, seulement un peu au-delà de ce que comporte son élasticité, alors, au lieu de rester tordu, d'acquérir en une fois une torsion permanente, il se tord graduellement; et quand il est laissé à lui-même, il perd par degrés une partie de la torsion qu'il avait acquise : de sorte que si, dans cette expérience, le fil, pour avoir été maintenu sous une force de torsion pendant deux ou trois heures, eût cédé graduellement à cette

Digitized by Google

force, ou eût commencé à contracter une torsion permanente, il se serait rétabli graduellement, en le laissant en liberté, et le point de repos eût reculé graduellement. Or, quoique l'expérience ait été répétée deux fois, je n'ai pu apercevoir aucun effet semblable.

Le fléau fut ensuite suspendu par un fil plus rigide.

4.e EXPÉRIENCE. *12 Août.*

LES POIDS DANS LA POSITION INTERMÉDIAIRE.

POINTS EXTRÊMES.	DIVISIONS.	TEMPS.	POINT DE REPOS.	TEMPS DU MILIEU de LA VIBRATION.	DIFFÉRENCE.
	21,6	9h 30′ 0″		h ′ ″	′ ″
	21,5	52 0			
	21,5	10 13 0	21,50		
	Les poids déplacés de la position intermédiaire à la positive.				
27,2					
22,1	.....	.....	24,60		
27	.....	.....	24,67		
22,6	.....	.....	24,75		
26,8	.....	.....	24,80		
23,0	.....	.....	24,85		
26,6	.....	.....	24,90		
23,4					
	Les poids mis à la position négative.				
15					
	17	19 25	.....	10 20 31	
	19	20 41			
22,4	.....	.....	18,72	.....	7 0
	20	26 45	.....	27 31	
	19	27 22			
15,1	.....	.....	18,52	.....	6 57
	19	35 1	.....	34 28	
	20	48			
21,5	.....	.....	18,35	.....	7 23

Digitized by Google

Suite de la 4.^e EXPÉRIENCE.

POINTS EXTRÊMES.	DIVISIONS.	TEMPS.	POINT DE REPOS.	TEMPS DU MILIEU de LA VIBRATION.	DIFFÉRENCE.
	20	10^h 40' 23"	.....	10^h 41' 51"	' "
	19	41 18			
15, 3	.....	.....	18, 22	.....	6 48
	18	48 36			
	19	49 24	.....	48 39	
20, 8	.....	.....	18, 10	.....	6 58
	19	54 45			
	18	55 45	.....	55 37	
15, 5					
	Les poids mis à la position positive.				
31, 3					
	25	11 10 25	.....	11 10 40	
	23	11 3			
17, 1	.....	.....	24, 02	.....	7 3
	22	17 6			
	23	26	.....	17 43	
30, 6	.....	.....	24, 17	.....	7 1
	25	24 33			
	23	25 17	.....	24 44	
18, 4	.....	.....	24, 32	.....	7 5
	23	31 21			
	25	32 9	.....	31 49	
29, 9	.....	.....	24, 40	.....	6 59
	25	38 39			
	23	39 31	.....	38 48	
19, 4	.....	.....	24, 50	.....	7 6
	23	45 16			
	25	46 12	.....	45 54	
29, 3					

Mouvement du fléau, en déplaçant les poids de la position interm. à la positive, = 3, 1
de la positive à la négative..... = 6, 18
de la négative à la positive..... = 5, 92

Temps d'une vibration dans la position négative..... = 7' 1"
dans la position positive..... = 7 3

5.^e

Digitized by Google

5.e EXPÉRIENCE. *20 Août.*

LES POIDS ÉTANT DANS LA POSITION POSITIVE,
LE FLÉAU A ÉTÉ MIS EN VIBRATION, EN FAISANT MOUVOIR L'INDEX.

POINTS EXTRÊMES.	DIVISIONS.	TEMPS.	POINT DE REPOS.	TEMPS DU MILIEU de LA VIBRATION.	DIFFÉRENCE.
29, 6		h ′ ″		h ′ ″	′ ″
21, 1	.....	.....	25, 20		
29, 0	.....	.....	25, 17		
21, 6					
	Les poids mis à la position négative.				
22, 6					
	20	10 22 47	.....	10 23 11	
	19	23 30			
16, 3	.....	.....	19, 27		
21, 9	.....	.....	19, 15		
16, 5	.....	.....	19, 10		
21, 5	.....	.....	19, 07		
16, 8	.....	.....	19, 07		
21, 2	.....	.....	19, 07		
17, 1	.....	.....	19, 05		
20, 8	.....	.....	19, 02		
17, 4	.....	.....	19, 05		
20, 6	.....	.....	19, 02		
	20	11 32 16	.....	11 33 53	
	19	33 58			
17, 5	.....	.....	18, 97	.....	7 13
	19	41 16	.....	41 6	
	20	43 0			
20, 3					

Digitized by Google

Suite de la 5.e EXPÉRIENCE.

LES POIDS MIS À LA POSITION POSITIVE.

POINTS EXTRÊMES.	DIVISIONS.	TEMPS.	POINT DE REPOS.	TEMPS DU MILIEU de LA VIBRATION.	DIFFÉRENCE.
20, 2		h ′ ″		h ′ ″	′ ″
	24	11 49 10	.....	11 49 37	
	26	50 19			
29, 4	.....	.....	24, 95	.....	7 7
	26	56 15	.....	56 44	
	25	47			
20, 8	.....	.....	24, 92		
28, 7	.....	.....	24, 87		
21, 3	.....	.....	24, 85		
28, 1	.....	.....	24, 75		
21, 5	.....	.....	24, 67		
27, 6	.....	.....	24, 67		
22, 0	.....	.....	24, 70		
	24	0 45 48	.....	0 46 21	
	25	46 43			
27, 2	.....	.....	24, 70	.....	7 1
	25	53 11	.....	53 22	
	24	54 9			
22, 4			.....		

Mouvement du fléau, en déplaçant les poids de la position positive à la négative, = 5, 90

de la négative à la positive..... = 5, 98

Temps d'une vibration, les poids étant dans la position négative..... = 7′ 5″

dans la position positive..... = 7 5

Digitized by Google

Dans la quatrième expérience, l'effet des poids semblait augmenter pendant leur repos, dans tous les trois déplacemens des poids, conformément à ce qui avait été observé avec le précédent fil métallique. Mais, dans la cinquième expérience, il n'en a pas été de même ; car, quoiqu'en déplaçant les poids de la positive à la négative, l'effet ait semblé croître pendant leur repos, il a diminué, au contraire, après le déplacement de la négative à la positive.

Je recherchai alors, par des essais, si cet effet n'était pas dû au magnétisme. La caisse qui renfermait le fléau, était placée presque parallélement à l'équateur magnétique ; par conséquent, s'il y avait quelque chose de magnétique dans les balles et dans les poids, les balles devaient emprunter leur polarité de la Terre ; et les poids aussi, après être restés quelque temps dans la position ou positive ou négative, devaient acquérir une polarité dans la même direction et attirer les balles. En transférant les poids dans la position contraire, le pôle d'abord dirigé au nord, devait se diriger au sud, et repousser la balle de laquelle il se trouverait rapproché. Mais, comme la répulsion d'une balle vers le sud produit sur le fléau le même effet que l'attraction de l'autre balle vers le nord, cela ne devait produire aucun effet sur la position du fléau ; cependant, quelque temps après, les pôles du poids devaient s'échanger, commencer à attirer les balles, et produire dès-lors un effet de la nature de celui qui faisait le sujet de l'observation dont il s'agit.

Pour vérifier si les choses se passaient ainsi, je détachai les poids de la partie supérieure des verges de cuivre qui les suspendaient, mais en retenant la partie inférieure, c'est-à-dire celle qui traversait ces poids ; je les fixai ensuite dans la position positive, et de manière qu'ils pouvaient tourner sur cette partie inférieure de la verge de cuivre, comme sur un axe vertical. J'ajoutai un appareil au moyen duquel je pouvais, sans ouvrir la porte de la chambre, les faire tourner d'une demi-révolution sur ces axes verticaux.

Digitized by Google

Je laissai pendant un jour tout l'appareil dans cet état. Le lendemain j'observai le fléau, et l'ayant trouvé stationnaire, je fis faire aux poids une demi-révolution sur leurs axes; mais je n'aperçus aucun mouvement dans le fléau. Je laissai les poids dans cette position environ une heure; puis je les retournai à leur position précédente, mais sans aucun effet sur le fléau. Cette expérience, répétée deux autres jours, eut le même résultat.

Il est donc certain que l'effet en question n'est pas dû au magnétisme des poids; car si cela était, en leur faisant faire une demi-révolution sur leurs axes, ils auraient immédiatement changé leur attraction magnétique en répulsion, et produit un mouvement dans le fléau.

Pour m'en assurer d'autant plus, je substituai aux poids de plomb deux aimans de 10 pouces [254 millim.], l'appareil restant d'ailleurs le même, et les aimans étant placés horizontalement, dirigés vers les balles, et avec leurs pôles-nord tournés vers le nord: mais, en leur faisant faire une demi-révolution, je ne vis pas qu'aucune altération fût produite dans la position du fléau; ce qui non-seulement confirme la déduction tirée de l'expérience précédente, mais démontre même que dans les expériences faites avec les verges de fer, l'effet produit ne pouvait être dû au magnétisme.

J'imaginai alors que l'effet pouvait provenir d'une différence de température entre les poids et la caisse; car il est évident que, si les poids étaient beaucoup plus chauds que la caisse, ils devaient échauffer la partie de la caisse qui était près d'eux, et produire un courant d'air qui rapprocherait d'eux les balles. Quoiqu'il ne me parût pas vraisemblable que la différence de chaleur entre les poids et la caisse, pût être suffisante pour produire aucun effet sensible, ou même que dans les précédentes expériences les poids eussent eu plus de chaleur que la caisse, je résolus d'en faire l'examen. Pour cela, je mis de côté l'appareil employé dans les dernières expériences; je suspendis les poids, comme auparavant, avec les verges de cuivre; je les plaçai dans la position

Digitized by Google

intermédiaire; je mis une lampe sous chacun d'eux, et je plaçai un thermomètre avec sa boule appliquée au côté extérieur de la caisse, près du point dont l'un des poids s'approchait dans la position positive; enfin je fis en sorte que je pouvais distinguer les divisions à l'aide d'une lunette. Cela fait, je fermai la porte, et quelque temps après, je fis passer les poids à la position positive. D'abord le fléau ne dévia que comme à l'ordinaire; mais au bout d'une demi-heure, l'effet augmenta tellement que le fléau était détourné de 14 divisions, au lieu de trois environ qu'il eût parcourues, si la lampe n'eût pas été employée; et le thermomètre était élevé à-peu-près d'un degré et demi, c'est-à-dire de 61° à 62° $\frac{1}{2}$ (*). En ouvrant la porte, je trouvai que les poids n'étaient échauffés que de manière à ne pas produire sur les doigts le sentiment du froid.

L'effet d'une différence de température paraissant si considérable, je pratiquai un petit trou dans l'un des poids, à la profondeur de trois-quarts de pouce [19 millim.] environ; j'y introduisis la boule d'un petit thermomètre, et je fermai avec du ciment l'ouverture du trou. La boule d'un autre petit thermomètre fut appliquée sur la caisse, aussi près qu'il se pouvait sans danger, du point dont le poids s'approchait. La position de ces thermomètres était telle que, quand les poids seraient dans la position négative, tous deux pourraient être vus à travers l'une des lunettes, au moyen d'une lumière réfléchie par un miroir concave.

(*) Échelle de *Fahrenheit* [16°,11 à 16°,95 centigrades.]

Digitized by Google

6.e EXPÉRIENCE. *6 Septembre.*

LES POIDS DANS LA POSITION INTERMÉDIAIRE.

POINTS EXTRÊMES.	DIVISIONS.	TEMPS.	POINT DE REPOS.	THERMOMÈTRE DANS L'AIR.	THERMOMÈTRE DANS LE POIDS.
	18, 90	9h 43′	.....	55°, 5	
	18, 85	10 3	18, 85	*(Far.)*	
	Les poids mis à la position négative.				
13, 1	.....	10 12	.....	55, 5	55°, 8
18, 4	.....	18	15, 82		*(Far.)*
13, 4	.....	25			
Non observé.					
13, 6	.....	39	.....	55, 5	55, 8
17, 6	.....	46	15, 65		
13, 8	.....	53	15, 65		
17, 4	.....	11 0	15, 65		
14, 0	.....	7	15, 65		
17, 2	.....	14	.....	55, 5	
	Les poids mis à la position positive.				
25, 8	.....	23			
17, 5	.....	30	21, 55		
25, 4	.....	37	21, 60		
18, 1	.....	44	21, 65		
25, 0	.....	51			
Non observé.					
24, 7	.....	0 5			
19, 0	.....	12	21, 77		
24, 4	.....	19			

Mouvement du fléau, en déplaçant les poids de l'intermédiaire à la négative, = 3, 03

de la négative à la positive..... = 5, 9

Digitized by Google

7.e EXPÉRIENCE. *18 Septembre.*

LES POIDS DANS LA POSITION INTERMÉDIAIRE.

POINTS EXTRÊMES.	DIVISIONS.	TEMPS.	POINT DE REPOS.	THERMOMÈTRE DANS L'AIR.	THERMOMÈTRE DANS LE POIDS.
	19, 4	8h 30′	.....	56°, 7 *(F.)*	
	19, 4	9 32	.....	56, 6	
	Les poids mis à la position négative.				
13, 6	.....	40	.....	.....	57°, 2 *(F.)*
18, 8	.....	47	16, 25		
13, 8	.....	54			
	Huit points extrêmes non observés.				
16, 9	.....	10 58			
14, 5	.....	11 5	15, 62		
16, 6	.....	12			
	Les poids mis à la position positive.				
26, 4	.....	20	.....	56, 5	
17, 2	.....	28	21, 72		
26, 1	.....	35			
	Quatre points extrêmes non observés.				
19, 3	.....	0 10			
25, 1	.....	17	22, 30		
19, 7	.....	24			

Mouvement du fléau, en déplaçant les poids de l'intermédiaire à la négative. = 3, 15

de la négative à la positive..... = 6, 10

Digitized by Google

8.e EXPÉRIENCE. *23 Septembre.*

LES POIDS DANS LA POSITION INTERMÉDIAIRE.

POINTS EXTRÊMES.	DIVISIONS.	TEMPS.	POINT DE REPOS.	THERMOMÈTRE DANS L'AIR.	THERMOMÈTRE DANS LE POIDS.
	19, 3	9h 46′	.....	53°, 1 *(F.)*	
	19, 2	10 45	19, 20	53, 1	
	Les poids mis à la position négative.				
13, 5	.....	56	.....	.....	53°, 6 *(F.)*
18, 6	.....	11 3	16, 07		
13, 6	.....	10			
	Quatre points extrêmes non observés.				
17, 4	.....	44			
14, 1	.....	51	15, 70		
17, 2	.....	58	.....	.....	53, 6
	Les poids mis à la position positive.				
15, 7	.....	0 1			
26, 7	.....	8	21, 42		
16, 6	.....	15	.....	53, 15	
	Deux points extrêmes non observés.				
25, 9	.....	36			
18, 1	.....	43	21, 90		
25, 5	.....	50		.....	

Mouvement du fléau, en déplaçant les poids de l'intermédiaire à la négative, = 3, 13

de la négative à la positive..... = 5, 72

Dans

Digitized by Google

Dans ces trois expériences, l'effet du poids a paru augmenter de deux à cinq dixièmes d'une division, en une heure de repos; et les thermomètres ont fait connaître que les poids étaient plus chauds de trois ou cinq dixièmes de degré *(Far.)* [0°,17 ou 0°,28 centigr.] que l'air en contact avec la caisse. Dans les deux dernières expériences, je mis, à la nuit, une lampe dans la chambre, espérant rendre l'air plus chaud que les poids, mais sans effet : la chaleur des poids excédait celle de l'air dans ces deux expériences plus que dans la première.

Dans la soirée du 17 octobre, les poids étant placés dans la position intermédiaire, des lampes furent mises au-dessous pour les échauffer; la porte fut fermée, et on laissa les lampes brûler jusqu'au bout. Le lendemain matin, on trouva, en faisant passer les poids à la position négative, qu'ils étaient de 7° ½ [4°,17 centigr.] plus chauds que l'air contigu à la caisse. Après une heure dans cette position, ils étaient refroidis d'un degré et demi, de sorte qu'ils n'étaient plus que de 6° [3°,33 centigr.] plus chauds que l'air. On les mit ensuite à la position positive; et dans chacune des deux positions, le fléau, après une heure de repos dans les poids, se trouva détourné d'environ 4 divisions de plus qu'il ne l'était auparavant.

22 mai 1798. L'expérience fut répétée de la même manière, si ce n'est que les lampes furent disposées pour ne brûler que peu de temps, et qu'on ne laissât écouler que deux heures avant de déplacer les poids. A peine alors se trouvèrent-ils de 2° [1°,11 centigr.] plus chauds que la caisse, et le fléau était détourné (après que les poids eurent resté une heure dans la position où le déplacement les avait mis) à-peu-près de 2 divisions de plus qu'il ne l'était auparavant.

Le 23 mai, l'expérience fut encore répétée de même, mais en refroidissant les poids par une couche de glace, retenue en place par des

Digitized by Google

feuilles de fer-blanc, qui, au déplacement des poids, tombaient sur le plancher, et cessaient d'intercepter la vue. En conduisant les poids à la position négative, ils furent trouvés de 8° [4°,44 centigrad.] environ plus froids que l'air; et leur effet sur le fléau parut diminuer pendant leur repos, au lieu de s'accroître comme dans les dernières expériences, puisqu'une heure après le mouvement des poids, le fléau était détourné, de 2 divisions et demie environ, moins qu'il ne l'était auparavant.

Il paraît donc suffisamment prouvé que l'effet en question est produit, de la manière que nous l'avons expliqué, par la différence de température entre les poids et la caisse; car dans les 6.e, 7.e et 8.e (*) expériences, où les poids n'étaient pas beaucoup plus chauds que la caisse, leur effet n'a augmenté que peu pendant leur repos; tandis qu'il a augmenté beaucoup quand ils ont été beaucoup plus chauds, et diminué beaucoup quand ils ont été beaucoup plus froids que la caisse.

Je dois dire que, dans cet appareil, la boîte où les balles sont en jeu, est assez profonde, et que les balles pendent presque jusqu'au fond; ce qui rend l'effet du courant d'air plus sensible qu'il ne serait autrement, défaut que j'ai l'intention de corriger dans quelques autres expériences que je tenterai.

(*) L'original porte, par erreur, 6.e, 8.e et 9.e *(Note du Traducteur.)*

Digitized by Google

9.e EXPÉRIENCE. *29 Avril.*

LES POIDS À LA POSITION POSITIVE.

POINTS EXTRÊMES.	DIVISIONS.	TEMPS.	POINT DE REPOS.	TEMPS DU MILIEU de LA VIBRATION.	DIFFÉRENCE.
		h ' "		h ' "	
34,70					
35,00	.....	.....	34,84		
34,65					
	Les poids mis à la position négative.				
23,80					
	28	11 18 29	.....	11 18 43	
	29	58			
33,20	.....	.....	28,52		
	29	25 27	.....	25 40	
	28	57			
23,90	.....	.....	28,25		
32,00	.....	.....	28,01		
24,15	.....	.....	27,82		
31,00	.....	.....	27,63		
24,40	.....	.....	27,55		
30,40	.....	.....	27,47		
	28	0 7 4	.....	0 7 26	
	27	53			
24,70					

Mouvement du fléau..... = 6,32

Temps de vibration..... = 6' 58"

Digitized by Google

10.e EXPÉRIENCE. *5 Mai.*

LES POIDS À LA POSITION POSITIVE.

POINTS EXTRÊMES.	DIVISIONS.	TEMPS. h ′ ″	POINT DE REPOS.	TEMPS DU MILIEU de LA VIBRATION. h ′ ″	DIFFÉRENCE. ′ ″
34,50					
33,50	.....	.....	33,97		
34,40					
	Les poids mis à la position négative.				
22,30					
	28	10 43 42	.....	10 43 36	
	29	44 6			
33,20	.....	.....	27,82	.....	7 0
	28	50 33			
	27	51 0	.....	50 36	
22,60	.....	.....	27,72		
32,50	.....	.....	27,70		
23,20	.....	.....	27,58		
31,45	.....	.....	27,40		
23,50	.....	.....	27,28		
	27	11 25 20			
	28	58	.....	11 25 24	
30,70	.....	.....	27,21	.....	7 3
	28	32 0			
	27	32 40	.....	32 27	
23,95	.....	.....	27,21	.....	6 56
	27	39 19			
	28	40 2	.....	39 23	
30,25					

Mouvement du fléau ..... = 6,15

Temps de vibration ..... = 6′ 59″

Digitized by Google

11.e EXPÉRIENCE. *6 Mai.*

LES POIDS À LA POSITION POSITIVE.

POINTS EXTRÊMES.	DIVISIONS.	TEMPS.	POINT DE REPOS.	TEMPS DU MILIEU de LA VIBRATION.
34, 90		h ′ ″		h ′ ″
34, 10	.....	.....	34, 47	
34, 80	.....	.....	34, 49	
34, 25				
	Les poids mis à la position négative.			
23, 30				
	28	9 59 59	.....	10 0 8
	29	10 0 27		
33, 30	.....	.....	28, 42	
	29	6 52	.....	7 5
	27	7 51		
23, 80	.....	.....	28, 35	
32, 50	.....	.....	28, 30	
24, 40				
Non observé.				
24, 80				
31, 30	.....	.....	28, 17	
	29	48 37	.....	49 8
	28	49 21		
25, 30	.....	.....	28, 20	
	28	56 8	.....	56 13
	29	56 56		
30, 90				

Mouvement du fléau ..... = 6, 07

Temps de vibration ..... = 7′ 1″

Dans les trois précédentes expériences, l'index avait été placé, à dessein, de manière qu'avant l'expérience les balles en repos étaient aussi près des côtés de la caisse qu'elles pouvaient l'être sans danger de la

Digitized by Google

toucher; car il est à observer que, quand le fléau est à 35, les balles commencent à toucher. Dans les deux expériences qui suivent, l'index était à sa position ordinaire.

12.e EXPÉRIENCE. *9 Mai.*

LES POIDS À LA POSITION NÉGATIVE.

POINTS EXTRÊMES.	DIVISIONS.	TEMPS.	POINT DE REPOS.	TEMPS DU MILIEU de LA VIBRATION.
	17,4	9h 45′ 0″		h ′ ″
	17,4	58 0		
	17,4	10 8 0		
	17,4	10 0	17,40	
	Les poids mis à la position positive.			
28,85				
	24	20 50	.....	10 20 59
	22	21 46		
18,40	.....	.....	23,49	
28,30	.....	.....	23,57	
19,30	.....	.....	23,67	
27,80	.....	.....	23,72	
20,00	.....	.....	23,80	
27,40	.....	.....	23,83	
	24	11 3 13	.....	11 3 14
	23	54		
20,55	.....	.....	23,87	
	23	9 45	.....	10 18
	24	10 28		
27,00				

Mouvement du fléau..... = 6, 09

Temps de vibration..... = 7′ 3″

Digitized by Google

13.e EXPÉRIENCE. *25 Mai.*

LES POIDS À LA POSITION NÉGATIVE.

POINTS EXTRÊMES.	DIVISIONS.	TEMPS.	POINT DE REPOS.	TEMPS DU MILIEU de LA VIBRATION.
16, 0		h ′ ″		h ′ ″
18, 3	.....	.....	17, 20	
16, 2				
	Les poids mis à la position positive.			
29, 6				
	25	10 22 22	.....	10 22 56
	24	0 45		
17, 4	.....	.....	23, 32	
	23	29 59	.....	30 3
	24	30 23		
28, 9	.....	.....	23, 40	
	24	36 58	.....	37 7
	23	37 24		
18, 4	.....	.....	23, 52	
	23	44 3	.....	44 14
	24	31		
28, 4	.....	.....	23, 62	
19, 3	.....	.....	23, 70	
27, 8	.....	.....	23, 70	
	24	11 5 26	.....	11 5 31
	23	6 1		
19, 9	.....	.....	23, 72	
	23	12 12	.....	12 35
	24	50		
27, 3				

Digitized by Google

Suite de la 13.e EXPÉRIENCE.

LES POIDS MIS À LA POSITION NÉGATIVE.

POINTS EXTRÊMES.	DIVISIONS.	TEMPS.	POINT. DE REPOS.	TEMPS DU MILIEU de LA VIBRATION.
		h ′ ″		h ′ ″
13, 5				
21, 8	.....	.....	17, 75	
	18	11 37 34	.....	11 37 39
	17	38 10		
13, 9	.....	.....	17, 67	
	17	44 26	.....	44 45
	18	45 4	.....	
21, 1	.....	.....	17, 62	
14, 4	.....	.....	17, 60	
20, 5	.....	.....	17, 52	
14, 7	.....	.....	17, 47	
20, 0	.....	.....	17, 42	
	18	0 19 57	.....	0 20 24
	17	20 52		
15 0	.....	.....	17, 37	
	17	27 15	.....	27 30
	18	28 15	.....	
19, 5		.....	.....	

Mouvement du fléau, en déplaçant les poids de la position négative à la positive, = 6, 12

de la positive à la négative..... = 5, 97

Temps de vibration, dans la positive..... = 7′ 6″

dans la négative..... = 7 7

Digitized by Google

14.e EXPÉRIENCE. *26 Mai.*

LES POIDS À LA POSITION NÉGATIVE.

POINTS EXTRÊMES.	DIVISIONS.	TEMPS.	POINT DE REPOS.	TEMPS DU MILIEU de LA VIBRATION.
		h ′ ″		h ′ ″
	16, 1	9h 18′ 0″		
	16, 1	24 0		
	16, 1	46 0		
	16, 1	49 0	16, 10	
	Les poids mis à la position positive.			
27, 7				
	23	10 0 46	.....	10 1 1
	22	1 16		
17, 3	.....	.....	22, 37	
	22	7 58	.....	8 5
	23	8 27		
27, 2	.....	.....	22, 50	
	23	15 2	.....	15 9
	22	32		
18, 3	.....	.....	22, 65	
26, 8	.....	.....	22, 75	
19, 1	.....	.....	22, 85	
26, 4	.....	.....	22, 97	
	23	43 40	.....	43 32
	22	44 22		
20, 0	.....	.....	23, 15	
	22	49 53	.....	50 41
	23	50 37		
26, 2				

Digitized by Google

Suite de la 14.e EXPÉRIENCE.

LES POIDS MIS À LA POSITION NÉGATIVE.

POINTS EXTRÊMES.	DIVISIONS.	TEMPS. h ′ ″	POINT DE REPOS.	TEMPS DU MILIEU de LA VIBRATION. h ′ ″
12, 4				
	16	11 7 53		
	17	8 27	.....	11 8 25
21, 5	.....	.....	17, 02	
	17	15 30		
	16	16 3	.....	15 27
12, 7	.....	.....	16, 90	
20, 7	.....	.....	16, 85	
13, 3	.....	.....	16, 82	
20, 0	.....	.....	16, 72	
13, 6	.....	.....	16, 67	
	16	50 33		
	17	51 19	.....	50 58
19, 5	.....	.....	16, 65	
	17	57 53		
	16	58 44	.....	58 6
14, 0				

Mouvement du fléau, en déplaçant les poids de la position négative à la positive, = 6, 27
de la positive à la négative..... = 6, 13
Temps de vibration à la positive..... = 7′ 6″
à la négative..... = 7 6

Dans l'expérience qui suit, avant de déplacer les poids, on avait disposé les balles en repos, de manière qu'elles fussent aussi près qu'il était possible des parois de la caisse, comme dans les expériences 9.e, 10.e et 11.e, mais du côté opposé.

Digitized by Google

15.e EXPÉRIENCE. *27 Mai.*

LES POIDS À LA POSITION NÉGATIVE.

POINTS EXTRÊMES.	DIVISIONS.	TEMPS.	POINT DE REPOS.	TEMPS DU MILIEU de LA VIBRATION.
3, 90		h ' "		h ' "
3, 35	.....	.....	3, 61	
3, 85	.....	.....	3, 61	
3, 40				
	Les poids mis à la position positive.			
15, 40				
	10	10 5 59	.....	10 5 56
	9	6 27		
4, 80	.....	.....	9, 95	
	9	12 43	.....	13 5
	10	13 11		
14, 80	.....	.....	10, 07	
	10	20 24	.....	20 13
	9	56		
5, 90	.....	.....	10, 23	
14, 35	.....	.....	10, 35	
6, 80	.....	.....	10, 46	
13, 90	.....	.....	10, 52	
	11	48 30	.....	48 42
	10	49 11		
7, 50	.....	.....	10, 60	
	10	55 26	.....	55 48
	11	56 10		
13, 50				

Mouvement du fléau..... = 6, 34

Temps de vibration..... = 7' 7"

Les deux expériences suivantes ont été faites par M. *Gilpin*, qui a bien voulu m'aider dans ces recherches.

Digitized by Google

16.e EXPÉRIENCE. *28 Mai.*

LES POIDS À LA POSITION NÉGATIVE.

POINTS EXTRÊMES.	DIVISIONS.	TEMPS.	POINT DE REPOS.	TEMPS DU MILIEU de LA VIBRATION.
		h ′ ″		h ′ ″
22, 55				
8, 40	.....	.....	15, 09	
21, 00	.....	.....	14, 90	
9, 20				
	Les poids mis à la position positive.			
26, 60				
	22	10 22 53	.....	10 23 15
	21	23 20		
15, 80	.....	.....	21	
	20	30 7	.....	30 30
	21	36		
25, 80	.....	.....	21, 05	
	22	37 23	.....	37 45
	21	55		
16, 80	.....	.....	21, 11	
	20	44 29	.....	45 1
	21	45 4		
25, 05	.....	.....	21, 11	
	22	51 54	.....	52 20
	21	52 32		
17, 57	.....	.....	21, 20	
	21	59 31	.....	59 34
	22	11 0 13		
24, 60	.....	.....	21, 28	
	22	6 24	.....	11 6 49
	21	7 9		
18, 30				

Mouvement du fléau..... = 6, 1

Temps de vibration..... = 7′ 16″

Digitized by Google

17.e EXPÉRIENCE. *30 Mai.*

LES POIDS À LA POSITION NÉGATIVE.

POINTS EXTRÊMES.	DIVISIONS.	TEMPS.	POINT DE REPOS.	TEMPS DU MILIEU de LA VIBRATION.
		h ′ ″		h ′ ″
	17, 20	10h 19′ 0″		
	17, 10	25 0		
	17, 07	29 0		
	17, 15	40 0		
	17, 45	49 0		
	17, 42	51 0		
	17, 42	11 1 0	17, 42	
	Les poids mis à la position positive.			
28, 80				
	24	11 23	.....	11 11 37
	23	49		
18, 10	.....	.....	23, 20	
	22	18 13	.....	18 42
	23	43		
27, 80	.....	.....	23, 12	
	24	25 19	.....	25 40
	23	49		
18, 80	.....	.....	23, 20	
	23	32 41	.....	32 43
	24	33 13		
27, 38	.....	.....	23, 31	
	24	39 28	.....	39 44
	23	40 3		
19, 70	.....	.....	23, 44	
	23	46 33	.....	46 46
	24	47 11		
27, 00	.....	.....	23, 52	
	24	53 36	.....	53 48
	23	54 17		
20, 40	.....	.....	23, 57	
	23	0 0 34	.....	0 0 55
	24	1 18		
26, 50	.....	.....	23, 55	
	24	7 34	.....	7 50
	23	8 21		
20, 80	.....	.....	23, 59	
	23	14 30	.....	14 58
	24	15 24		
26, 25				

Digitized by Google

Suite de la 17.e EXPÉRIENCE.

LES POIDS MIS À LA POSITION NÉGATIVE.

POINTS EXTRÊMES.	DIVISIONS.	TEMPS.	POINT DE REPOS.	TEMPS DU MILIEU de LA VIBRATION.
		h ′ ″		h ′ ″
13,3				
	17	0 32 19	.....	0 32 44
	18	48		
22,4	.....	.....	17,95	
	18	39 46	.....	39 44
	17	40 19		
13,7	.....	.....	17,85,	
	17	46 26	.....	46 48
	18	47 0		
21,6	.....	.....	17,72	
	18	53 43	.....	53 50
	17	54 20		
14,0	.....	.....	17,60	
	17	1 0 39	.....	1 0 55
	18	1 20		
20,8	.....	.....	17,47	
	18	7 39	.....	7 59
	17	8 21		
14,3	.....	.....	17,37	
	17	14 54	.....	15 4
	18	15 42		
20,1	.....	.....	17,27	
	18	21 32	.....	22 5
	17	22 22		
14,6				

Mouvement du fléau, en déplaçant les poids du négatif au positif..... = 5,78

du positif au négatif..... = 5,64

Temps de vibration au positif..... = 7′ 2″

au négatif..... = 7 3

Digitized by Google

De la Méthode de calculer la Densité de la Terre, d'après ces Expériences.

Je suppose d'abord que le fléau et les verges de cuivre sont sans pesanteur, et que les poids n'ont une attraction sensible qu'à l'égard de la balle la plus proche. J'examinerai ensuite quelles corrections sont nécessaires, à raison du fléau et des verges, et autres causes de peu de valeur.

Il faut trouver, avant tout, la force requise pour attirer le fléau de côté; ce qui doit se déterminer, comme nous l'avons déjà dit, par le temps d'une vibration.

La distance entre les centres des deux balles est de 73,3 pouces [1861,8 millim.]; par conséquent, chacun de ces centres est distant de 36,65 [930,9 millim.] du centre de mouvement. La longueur du pendule qui bat la seconde dans ce climat est 39,14 [994,15 millim.]: donc, si la rigidité du fil métallique qui suspend le fléau est telle, que la force qui doit être appliquée à chaque balle pour détourner le fléau d'une quantité exprimée par l'angle A, soit au poids de cette balle comme l'arc de A est au rayon, le fléau doit vibrer dans le même temps que le ferait un pendule dont la longueur serait 36,65 pouces [930,9 millim.], c'est-à-dire en $\sqrt{\left(\frac{36,65}{39,14}\right)}$ secondes; et par conséquent, si la rigidité du fil métallique est telle, que le fléau vibre en N secondes, la force à appliquer à chaque balle pour détourner le fléau de la quantité angulaire A, est au poids de la balle, comme l'arc de

$$A \times \frac{1}{N^2} \times \frac{36,65}{39,14}$$

est au rayon. Mais l'échelle d'ivoire qui termine le fléau est à 38,3 pouces [972,8 millim.] du centre de mouvement, et chaque division est de 0,05 pouces [1,27 millim.], et sous-tend par conséquent un angle au centre, dont l'arc est $\frac{1}{766}$: donc la force à appliquer à chaque

Digitized by Google

balle pour détourner le fléau d'une division, est au poids de la balle, comme $\frac{1}{766\,N^2} \times \frac{36,65}{39,14}$ est à 1, ou comme $\frac{1}{818\,N^2}$ est à 1.

Il s'agit de trouver ensuite dans quel rapport est l'attraction du poids sur la balle à l'attraction de la Terre sur cette même balle, que je suppose placée au milieu de la caisse, c'est-à-dire n'être pas plus près d'un côté que de l'autre. Quand les poids sont approchés des balles, leurs centres sont à 8,85 pouces [224,79 millim.] de la ligne-milieu de la caisse; mais, par inadvertance, les verges qui suspendent ces poids ont été mises à une distance l'une de l'autre, qui égale la distance des centres des balles entre eux, tandis que la première de ces deux distances eût dû être un peu plus grande. Il suit de là que les centres des poids ne sont pas exactement opposés aux centres des balles, quand il y a rapprochement entre elles et les poids; et l'effet des poids pour la déviation du fléau est moindre qu'il n'eût été, en raison triplée de $\frac{8,85}{36,65}$ à la corde de l'angle dont le sinus est $\frac{8,85}{36,65}$, ou en raison triplée du cosinus de moitié de cet angle au rayon, ou dans le rapport de 0,9779 à 1.

Chacun des poids pèse 2439000 grains [157,925 kilog.], ou est égal en pesanteur à 10,64 pieds sphériques [301,28 décim. sph.] d'eau. Son attraction sur la molécule placée au centre de la balle est donc à l'attraction d'un pied sphérique [28,316 décim. sph.] d'eau sur une molécule égale placée à la surface de la balle, comme

$$10,64 \times 0,9779 \times \left(\frac{6}{8,85}\right)^2 \text{ est à } 1.$$

Le moyen diamètre de la Terre est de 41800000 pieds [12740473 mètres] (*); par conséquent, en exprimant le rapport de la moyenne

(*) A la rigueur, nous devrions prendre, au lieu du moyen diamètre de la Terre, celui de la sphère dont l'attraction est égale à la force de gravité dans ce climat; mais la différence n'est d'aucune importance.

densité

Digitized by Google

densité de la Terre à celle de l'eau par le rapport de D à 1, l'attraction du poids de plomb sur la balle sera à celle de la Terre sur cette balle, comme $10{,}64 \times 0{,}9779 \times \left(\frac{6}{8{,}85}\right)^2$ est à

$$41800000\,D :: 1 : 8739000\,D.$$

On voit donc que la force à appliquer à chaque balle pour écarter, d'une division, le fléau de sa position naturelle, est $\frac{1}{818\,N^2}$ du poids de la balle; et si la densité moyenne de la Terre est à celle de l'eau comme D est à 1, l'attraction du poids sur la balle est $\frac{1}{8739000\,D}$ du poids de cette balle; et par conséquent l'attraction sera capable de faire dévier la position naturelle du fléau, de $\frac{818\,N^2}{8739000\,D}$ ou $\frac{N^2}{10683\,D}$ divisions.

Donc, si en déplaçant les poids, de la position intermédiaire à une position rapprochée, le fléau est reconnu s'être déplacé de B divisions, ou si, par le déplacement des poids d'une position rapprochée à l'autre (par exemple, de la positive à la négative), il se meut de $2B$ divisions, il en résulte que la densité de la Terre, ou D, est

$$\frac{N^2}{10683\,B}.$$

Nous avons maintement à examiner les corrections à appliquer à ce résultat; premièrement, pour l'effet que la résistance du fléau au mouvement doit produire sur le temps de la vibration; secondement, à cause de l'attraction des poids sur le fléau; troisièmement, à cause de leur attraction sur la balle respectivement plus éloignée de chacun d'eux; quatrièmement, à cause de l'attraction des verges de cuivre sur les balles et sur le fléau; cinquièmement, à cause de l'attraction de la caisse sur les balles et sur le fléau; et sixièmement, à cause de la différence de l'attraction des poids sur les balles, en conséquence des différences de position du fléau, et à cause de l'effet que cette différence d'attraction doit produire sur le temps de vibration. Ces corrections

Digitized by Google

sont presque sans aucune importance, à l'exception de la dernière; cependant elles ne doivent pas être entièrement négligées.

On doit considérer, quant à la première, que pendant les vibrations du fléau et des balles, une partie de la force est dépensée à l'accélération du fléau; par conséquent, on trouvera la force requise pour les écarter de leur position naturelle, en déterminant le rapport entre les forces employées à l'accélération respective des balles et du fléau.

Soient *EDCedc (fig. 4)*, le fléau; *B* et *b*, les balles; *Cs*, le fil de suspension. Le fléau est formé de quatre parties, 1.° une baguette de bois *Dcd*, longue de 73,3 pouces [1,862 mèt.]; 2.° le fil d'argent *DCd*, pesant 170 grains [11,0075 gramm.]; 3.° les pièces *DE* et *ed*, portant le vernier en ivoire, chacune desquelles pèse 45 grains [2,9138 gramm.]; 4.° au centre, une petite pièce en cuivre *Cc*. La baguette de sapin, dans l'état de sécheresse, pèse 2320 grains [150,22 gramm.]; mais si elle est très-humide, comme cela était communément dans les expériences, elle pèse 2400 grains [155,4 gramm.]. La section transversale est de la forme représentée *(fig. 5)*; l'épaisseur *BA*, et les dimensions de la partie *DEed*, ne varient en aucun point; mais la largeur *Bb* diminue graduellement, du milieu jusqu'aux extrémités. L'aire de cette section est 0,33 pouces car. [2,13 centim. car.] au milieu, et 0,146 pouces car. [94,19 millim. car.] au bout. Par conséquent, si un point quelconque *x (fig. 4)* est pris en *cd*, et que $\frac{cx}{cd}$ soit appelé *x*, la baguette pèse $\frac{2400 \times 0,33}{73,3 \times 0,238}$ par pouce [ou par 25,4 millim.] au milieu, $\frac{2400 \times 0,146}{73,3 \times 0,238}$ au bout,

$$\text{et } \frac{2400}{73,3} \times \frac{0,33 - 0,184\,x}{0,238} = \frac{3320 - 1848\,x}{73,3} \text{ en } x.$$

Donc, comme le poids du fil d'argent est $\frac{170}{73,3}$ par pouce [ou par 25,4 millim.], la baguette et ce fil peuvent être considérés ensemble comme une baguette dont le poids en *x* est de $\frac{3490 - 1848\,x}{73,3}$ par pouce [ou par 25,4 millim.]

Digitized by Google

Or la force requise pour accélérer une quantité quelconque de matière placée en x, est proportionnelle à x^2, c'est-à-dire qu'elle est à la force requise pour accélérer la même quantité de matière placée en d, comme x^2 est à 1. Par conséquent, si cd est désigné par l, et qu'on suppose que x varie, la fluxion de la force requise pour accélérer la baguette et le fil est proportionnelle à $\frac{x^2 l\dot{x} \times 3490 - 1848\dot{x}}{73,3}$, expression dont la fluente engendrée tandis que x varie de c à d,

$$= \frac{l}{73,3} \times \left(\frac{3490}{3} - \frac{1848}{4}\right) = 350;$$

de sorte que la force requise pour accélérer chaque moitié de la baguette de bois et du fil d'argent, est la même que celle qui est nécessaire pour accélérer 350 grains [22,6625 gramm.] placés en d.

La résistance au mouvement, de chacune des pièces de, est égale à celle de 48 grains [3,108 gramm.] placés en d; la distance de leurs centres de gravité à C étant de 38 pouces [965,2 millim.]. La résistance de la pièce de cuivre du centre peut être négligée. Ainsi, la force totale requise pour accélérer le fléau, est la même que celle qui serait requise pour accélérer 398 grains [25,770 gramm.] placés à chacun des points D et d.

Chacune des balles pèse 11262 grains [729,214 gramm.], et leur distance du centre est la même que celle de D et de d. Par conséquent la force requise pour accélérer les balles et le fléau réunis, est la même que si chaque balle pesait 11660 grains [754,985 gramm.], et que le fléau fût sans pesanteur. Donc, en supposant donné le temps d'une vibration, la force requise pour faire dévier le fléau en l'attirant, est plus grande que si le fléau était sans pesanteur, dans la proportion de 11660 à 11262, ou de 1,0353 à 1.

Pour déterminer l'attraction des poids sur le fléau; à travers d, menez le plan vertical dwb perpendiculaire à Dd, et soit w le centre du poids, lequel, sans erreur sensible, quoique non rigoureusement, peut être considéré comme placé dans ce plan. Enfin soit b le centre de la

Digitized by Google

balle. Alors wb est horizontal et $= 8,85$, et db est vertical et $= 5,5$; soit $wa = a$, $wb = b$, et soit $\frac{x\,d}{c\,d}$ ou $1 - x = z$. L'attraction du poids sur une particule de matière en x, dans la direction dw, est à son attraction sur la même particule placée en $b :: b^3 : (a^2 + z^2 l^2)^{\frac{3}{2}}$, ou est proportionnelle à $\frac{b^3}{(a^2 + z^2 l^2)^{\frac{3}{2}}}$; et la force de cette attraction pour faire mouvoir le fléau est proportionnelle à $\frac{b^3 \times 1 - z}{(a^2 + z^2 l^2)^{\frac{3}{2}}}$; et de plus, on a vu ci-devant que le poids de la baguette de bois et du fil d'argent au point x, est $\frac{3490 - 1848\,x}{73,3} = \frac{1642 + 1848\,z}{73,3}$ par pouce [ou par 25,4 millim.]. Par conséquent, si xd varie, la fluxion de la puissance pour faire mouvoir le fléau

$$= l\dot{z} \times \frac{1642 + 1848\,z}{73,3} + \frac{b^3 \times 1 - z}{(a^2 + z^2 l^2)^{\frac{3}{2}}} = \dot{z} \times (821 + 924\,z)$$

$$\times \frac{b^3 \times 1 - z}{(a^2 + l^2 z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{b^3 \dot{z} \times 821 + 103\,z - 924 z^2}{(a^2 + l^2 z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{b^3 z \times 821 + 103\,z + \frac{924 a^2}{l^2}}{(a^2 + l^2 z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$- \frac{924\,b^3 \dot{z} \times \frac{a^2}{l^2} + z^2}{(a^2 + l^2 z^2)^{\frac{3}{2}}}$$; ce qui [parce que $\frac{a^2}{l^2} = 0,08$]

$$= \frac{b^3 \dot{z} \times 895 + 103\,z}{(a^2 + l^2 z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{924\,b^3 \dot{z}}{l^2 \sqrt{(a^2 + l^2 z^2)}}$$; expression dont la fluente

$$= \frac{895\,b^3 z}{a^2 \sqrt{(a^2 + l^2 z^2)}} - \frac{103\,b^3}{l^2 \sqrt{(a^2 + l^2 z^2)}} + \frac{103\,b^3}{l^2 a} - \frac{924\,b^3}{l^3} \times \ldots$$

$\log. \frac{lz + \sqrt{(a^2 + l^2 z^2)}}{a}$; et la force avec laquelle l'attraction du poids sur la plus proche moitié de la baguette de bois et du fil d'argent, tend à déplacer le fléau, est proportionnelle à cette fluente engendrée tandis que z varie de 0 à 1, c'est-à-dire à 128 grains [8,288 gramm.].

La force avec laquelle l'attraction du poids sur la pièce de du bout, tend à mouvoir le fléau, est proportionnelle à $47 \times \frac{b^3}{a^3}$ ou 29 grains

Digitized by Google

[1,878 gramm.]. Par conséquent, la puissance totale du poids pour mouvoir le fléau, au moyen de son attraction sur la partie la plus rapprochée de ce fléau, est égale à son attraction sur 157 grains [10,166 gramm.] placés en *b*, laquelle est $\frac{157}{11260}$ ou 0,0139 de son attraction sur la balle.

J'observe que l'effet de l'attraction du poids sur la totalité du fléau est un peu moindre que ce résultat, parce que son attraction sur la moitié la plus éloignée agit en sens opposé; mais, comme cette dernière attraction est faible, en comparaison de l'attraction sur la moitié la plus près du poids, on peut la négliger.

L'attraction du poids sur la balle la plus éloignée, dans la direction *bw*, est à son attraction sur la balle la plus rapprochée

$$:: wd^3 : wD^3 :: 0{,}0017 : 1 ;$$

par conséquent, l'effet de l'attraction du poids sur les deux balles est à celui de son attraction sur la balle la plus rapprochée :: 0,9983 : 1.

Pour trouver l'attraction de la verge de cuivre sur la balle la plus proche, soient *b* et *w* *(fig. 6)* les centres de la balle et du poids, et soit *ea* la partie perpendiculaire de la verge de cuivre, qui consiste en deux parties *ad* et *de;* la partie *ad* pèse 22000 grains [1424,5 gram.], a de longueur 16 pouces [406,4 millim.], et est à-peu-près partagée en *w;* la partie *de* pèse 41000 grains [2654,75 gram.], et a de longueur 46 pouces [1,1684 mèt.]; *wb* est de 8,85 pouces [224,8 millim.], et est perpendiculaire à *ew*. Or l'attraction d'une ligne *ew*, d'épaisseur uniforme, sur *b*, dans la direction *bw*, est à celle de la même quantité de matière placée en *w* : : *bw* : *eb;* par conséquent, l'attraction de la partie *da* égale celle de $\frac{22000 \times wb}{bd}$, ou 16300, placés en *w;* et l'attraction de *ed* égale celle de $41000 \times \frac{ew}{ed} \times \frac{bw}{be} - 41000 \times \frac{dw}{ed} \times \frac{bw}{bd}$, ou 2500, placés au même point, de sorte que l'attraction de la partie perpendiculaire de la verge de cuivre sur *b*, est à celle du poids, de même sur *b*, comme 18800 est à 2439000, ou comme 0,00771 est à 1.

Digitized by Google

Quant à l'attraction de la partie inclinée de cette verge et de la barre de bois, marquées *Pr* et *rr* dans la *figure 1.re*, on peut la négliger sans conséquence, ainsi que l'attraction de la verge entière sur le fléau et sur la balle la plus éloignée.

Ainsi l'attraction du poids et de la verge de cuivre sur le fléau et les deux balles à-la-fois, excède l'attraction du poids sur la balle la plus proche, dans la proportion de 0,9983 + 0,0139 + 0,0077 à 1, ou de 1,0199 à 1.

Nous avons à considérer actuellement l'attraction de la caisse d'acajou. Or, il est évident que, quand le fléau est à la division-milieu, les attractions des côtés opposés de la caisse se balancent entre elles, et sont sans effet pour attirer le fléau dans l'un ou l'autre sens. Quand le fléau est écarté de cette division, il est un peu attiré vers le côté le plus près; en sorte que la force requise pour faire dévier le fléau est plutôt moindre qu'elle ne devrait être sans cela. Cependant, si cette force est proportionnelle à la distance du fléau relativement à la division-milieu, il n'en résulte pas d'erreur : car, quoique l'attraction doive entraîner le fléau plus qu'il n'arriverait autrement, néanmoins, comme la force accélératrice par laquelle le fléau est mis en vibration est diminuée dans la même proportion, le carré du temps d'une vibration doit augmenter dans la même proportion que l'espace dont le fléau est écarté, et par conséquent le résultat sera le même que si la caisse n'exerçait pas d'attraction. Mais si l'attraction de la caisse n'est pas proportionnelle à la distance entre le fléau et le point-milieu, le rapport dans lequel la force accélératrice diminue est différent dans les différentes parties de la vibration, et le carré du temps d'une vibration n'augmentera pas dans la même proportion que la quantité dont le fléau est tiré de côté; de sorte que le résultat en sera altéré.

Par le calcul, je trouve que la force avec laquelle l'attraction tire du centre le fléau, est loin d'être proportionnelle à la distance; mais la force entière est si petite qu'elle ne mérite pas considération : car dans

Digitized by Google

aucune position du fléau, l'attraction de la boîte sur les balles n'excède celle d'un cinquième de pouce sphérique [ou de 3,277 centim. sph.] d'eau, placé à 1 pouce [25,4 millim.] du centre des balles; et l'attraction du poids de plomb égale celle de 10,6 pieds sphériques [300,147 décim. sph.] d'eau, placés à 8,85 pouces [224,79 millim.], ou de 234 pouces sphériques [3,834 décim. sph.] placés à 1 pouce [25,4 millim.] de distance: de sorte que l'attraction de la boîte sur les balles ne peut, dans aucune position du fléau, excéder $\frac{1}{1170}$ de celle du poids. (*Voyez*, pour le calcul, l'APPENDICE, à la fin de ce Mémoire.)

On a donc vu que la force requise pour faire dévier le fléau d'une division, est plus grande qu'elle ne serait, si le fléau était sans pesanteur, dans le rapport de 1,0353 à 1, et qu'elle égale par conséquent $\frac{1,0353}{818\,N^2}$ du poids de la balle; et de plus, l'attraction du poids et de la verge de cuivre sur le fléau et les deux balles à-la-fois, excède l'attraction du poids sur la balle la plus proche, dans le rapport de 1,0199 à 1, et par conséquent $= \frac{1,0199}{8739000\,D}$ du poids de la balle. D est donc réellement égal à $\frac{818\,N^2}{1,0353} \times \frac{1,0199}{8739000\,B}$ ou $\frac{N^2}{10844\,B}$, au lieu de $\frac{N^2}{10683\,B}$, valeur précédemment trouvée. Il reste à voir combien cette valeur est affectée par la position du fléau.

Supposons les poids approchés des balles; soit W (*fig. 7*) le centre de l'un des poids; soit M le centre de la balle la plus proche dans sa position moyenne, comme lorsque le fléau est à 20 divisions; soit B le point auquel il est arrêté, et A le point auquel il serait arrêté, si le poids était éloigné: AB est par conséquent l'espace qu'il parcourt par l'effet de l'attraction. Soit $M\beta$ l'espace qu'il eût parcouru, s'il était soumis à la même attraction que quand il est en M. L'attraction en B est plus grande qu'en M, dans la proportion de WM^2 à WB^2; par conséquent $AB = M\beta \times \frac{WM^2}{WB^2} = M\beta \times 1 + \frac{2\,MB}{MW}$, très-à-peu-près.

Digitized by Google

Maintenant, transférez les poids à la position rapprochée opposée; et soit w le centre du poids le plus proche, et b le point de repos du centre de la balle : alors $Ab = M\beta \times 1 + \frac{2Mb}{MW}$, et $Bb = M\beta \times 2 + \frac{2Mb}{MW} + \frac{2MB}{MW} = 2M\beta \times 1 + \frac{Bb}{MW}$; de sorte que la totalité du mouvement Bb est plus grande qu'elle n'eût été, si l'attraction sur la balle était la même par-tout qu'en M, dans le rapport de $1 + \frac{Bb}{MW}$ à 1; et par conséquent ne dépend pas sensiblement de la position du fléau, dans l'une ou l'autre position des poids, mais seulement de la quantité de son mouvement, en faisant mouvoir ces poids.

Cette variation dans l'attraction du poids affecte aussi le temps de vibration : car supposons que les poids soient approchés des balles; soit W le centre du poids le plus proche, A et B désignant les mêmes choses que ci-dessus; soit x le centre de la balle, à un point quelconque de sa vibration; soit AB la force avec laquelle la balle, quand elle est en B, est tirée vers A par la rigidité du fil de métal. Alors, comme B est le point de repos, l'attraction qu'y exerce le poids égalera aussi AB; et quand la balle est en x, la force avec laquelle elle est tirée vers A, par la rigidité du fil de métal, $= Ax$, et celle avec laquelle elle est tirée dans la direction contraire par l'attraction, $= AB \times \frac{WB^2}{Wx^2}$; de sorte que la force effective, avec laquelle la balle est attirée vers A, $= Ax - \frac{AB \times WB^2}{Wx^2} = AB + Bx - \left(AB \times 1 + \frac{2Bx}{WB}\right) = Bx - \frac{2Bx \times AB}{WB}$ à-très-peu-près. Par conséquent, la force effective par laquelle la balle est attirée vers le point-milieu de la vibration, est moindre qu'elle ne serait si les poids étaient éloignés, dans le rapport de $1 - \frac{2AB}{WB}$ à 1; et le carré du temps d'une vibration est augmenté dans le rapport de 1 à $1 - \frac{2AB}{WB}$; ce qui diffère très-peu du rapport de $1 + \frac{Bb}{MW}$ à 1, rapport dans lequel est augmenté le mouvement du fléau par le transport des poids d'une position rapprochée à la position rapprochée opposée.

Le

Digitized by Google

Le déplacement de la balle, qui répond à une division du fléau, $= \frac{36,35}{20 \times 38,3}$; et si mB est le déplacement de la balle répondant à d divisions sur le fléau, $\frac{MB}{WM} = \frac{36,35\,d}{20 \times 38,3 \times 8,85} = \frac{d}{185}$; d'où il résulte que le temps de vibration et le mouvement du fléau doivent être corrigés comme il suit :

Si le temps de vibration est déterminé par une expérience dans laquelle les poids sont dans la position rapprochée, et que le mouvement du fléau, en faisant mouvoir les poids de la position rapprochée à la position intermédiaire, soit de d divisions, le temps observé doit être diminué en raison sous-double de $1 - \frac{2d}{185}$ à 1, c'est-à-dire dans le rapport de $1 - \frac{d}{185}$ à 1; mais quand le temps de vibration est déterminé par une expérience où les poids sont dans la position intermédiaire, il n'y a point de correction à faire.

Pour corriger le mouvement du fléau causé par le transport des poids d'une position rapprochée à l'intermédiaire, ou inversement, observez de combien la position du fléau diffère de 20 divisions, quand les poids sont dans la position rapprochée : je suppose que ce soit de n divisions; alors, si le fléau est, à ce moment, du même côté de la division 20 que le poids, le mouvement observé doit être diminué de $\frac{2n}{185}$ parties du tout; dans le cas contraire, il doit être augmenté d'autant.

Si les poids sont transférés de l'une à l'autre des positions rapprochées, et que le mouvement du fléau soit de $2d$ divisions, le mouvement observé doit être diminué de $\frac{2d}{185}$ parties du tout.

Si les poids sont transférés de l'une à l'autre des positions rapprochées, et que le temps de vibration soit déterminé tandis que les poids sont dans l'une de ces positions, on n'a besoin de corriger ni le mouvement du fléau ni le temps de vibration.

Digitized by Google

CONCLUSION.

La Table suivante contient le Résultat des Expériences.

Expér.	Mouvem.t des poids.	Mouv. du fléau.	Correct.	Temps de vib.	Correct.	Densité.
1	Intermédiaire à +	14, 32	13, 42			5, 50
	+ à Intermédiaire	14, 10	13, 17	14′ 55″	.....	5, 61
2	Intermédiaire à +	15, 87	14, 69	.....	.....	4, 88
	+ à Intermédiaire	15, 45	14, 14	14 42	.....	5, 07
3	+ à Intermédiaire	15, 22	13, 56	14 39	.....	5, 26
	Intermédiaire à +	14, 50	13, 28	14 54	.....	5, 55
4	Intermédiaire à +	3, 10	2, 95		6, 54	5, 36
	+ à —	6, 18	.....	7 1	.....	5, 29
	— à +	5, 92	.....	7 3	.....	5, 58
5	+ à —	5, 90	.....	7 5	.....	5, 63
	— à +	5, 98	.....	7 5	.....	5, 57
6	Intermédiaire à —	3, 03	2, 90			5, 53
	— à +	5, 90	5, 71			5, 62
7	Intermédiaire à —	3, 15	3, 03	7 4	6, 57	5, 29
	— à +	6, 10	5, 90	*par*		5, 44
8	Intermédiaire à —	3, 13	3, 00	*un milieu.*		5, 34
	— à +	5, 72	5, 54			5, 79
9	+ à —	6, 32	.....	6 58	.....	5, 10
10	+ à —	6, 15	.....	6 59	.....	5, 27
11	+ à —	6, 07	.....	7 1	.....	5, 39
12	— à +	6, 09	.....	7 3	.....	5, 42
13	— à +	6, 12	.....	7 6	.....	5, 47
	+ à —	5, 97	.....	7 7	.....	5, 63
14	— à +	6, 27	.....	7 6	.....	5, 34
	+ à —	6, 13	.....	7 6	.....	5, 46
15	— à +	6, 34	.....	7 7	.....	5, 30
16	— à +	6, 10	.....	7 16	.....	5, 75
17	— à +	5, 78	.....	7 2	.....	5, 68
	+ à —	5, 64	.....	7 3	.....	5, 85

Digitized by Google

D'après cette table, il paraît que, quoique les expériences s'accordent assez bien ensemble, cependant la différence entre elles, tant pour la quantité de mouvement du fléau que pour le temps de vibration, est plus grande que ne peut la donner l'erreur seule de l'observation. Quant à la différence dans le mouvement du fléau, on peut très-bien l'expliquer d'après le courant d'air produit par la différence de température; mais il est douteux qu'on puisse rendre compte, par cette même cause, de la différence dans le temps de vibration. Je pense même qu'on ne le pourrait pas, si le courant d'air était régulier et toujours également modéré dans toutes les parties de la vibration de la balle; mais comme il est très-vraisemblable qu'il y a beaucoup d'irrégularité dans ce courant, il y a grande apparence qu'il suffit pour expliquer la différence.

Par un milieu entre les expériences faites avec le fil de métal d'abord employé, on trouve que la densité de la Terre est 5,48 fois plus grande que celle de l'eau. On obtient la même conclusion par un milieu entre les expériences faites avec le dernier fil de métal, et la plus forte différence des résultats des vingt-trois observations faites avec ce fil, est seulement 0,75; en sorte que les résultats extrêmes ne diffèrent pas du moyen de plus de 0,38, ou d'un quatorzième de la totalité. La densité semble donc être ainsi déterminée avec une grande exactitude. On peut objecter, à la vérité, que comme le résultat paraît être influencé par le courant d'air, ou par quelque autre cause dont les lois ne nous sont pas bien connues, cette cause peut agir, ou toujours ou au moins ordinairement, dans une même direction, et produire ainsi une erreur importante dans le résultat. Mais comme les expériences ont été faites en divers temps, avec des différences considérables dans la température des poids et de l'air, et le fléau étant à des

Digitized by Google

distances diverses des côtés de la boîte, il n'est pas vraisemblable que la cause dont il s'agit ait influé, dans une même direction, assez uniformément pour rendre l'erreur du résultat moyen égale à-peu-près à la différence entre ce résultat et le résultat extrême. Il paraît donc très-invraisemblable que la densité de la Terre doive différer de 5,48 jusqu'à un quatorzième du tout.

Peut-être pourrait-on objecter encore contre nos expériences, qu'il n'est pas certain qu'à ces petites distances, la force de gravité suive exactement la même loi qu'à des distances plus grandes. Il n'y a cependant nul motif de penser qu'aucune irrégularité de cette nature ait lieu, avant que les corps soient en dedans des limites de l'action qu'on appelle l'*attraction de cohésion*, action qui semble ne s'étendre qu'à de très-petites distances. C'est dans la vue de reconnaître si le résultat pourrait être affecté par cette attraction, que j'ai fait les 9.e, 10.e, 11.e et 15.e expériences, dans lesquelles les balles, dans l'état de repos, étaient aussi près des côtés de la boîte qu'il était possible ; mais il ne s'est point manifesté de différence appréciable entre les résultats dans ce cas, ou quand les balles étaient placées dans toute autre partie de la caisse.

D'après les expériences faites par le D.r *Maskelyne*, sur l'attraction de la montagne Schehallien, la densité de la Terre est de 4,5 fois celle de l'eau ; ce qui diffère plus de la précédente détermination, que je ne m'y serais attendu. Mais je me dispense d'entrer dans aucune des considérations dont peut dépendre l'évaluation définitive, jusqu'à ce que j'aie examiné plus soigneusement à quel point la détermination précédente est affectée par des irrégularités dont je ne puis mesurer la quantité.

Digitized by Google

APPENDICE.

De l'Attraction de la Caisse d'acajou sur les Balles.

Il faut d'abord déterminer quelle est l'attraction du plan rectangulaire $ckβb$ *(fig. 8)* sur le point a placé dans la ligne ac perpendiculaire à ce plan.

Soit $ac = a$, $ck = b$, $cb = x$, et soit $\frac{a^2}{a^2 + x^2} = w^2$, et $\frac{b^2}{a^2 + x^2} = v^2$; alors l'attraction de la ligne $bβ$ sur a, dans la direction ab, $= \frac{bβ}{ab \times aβ}$: donc, si cb varie, la fluxion de l'attraction du plan sur le point a, dans la direction cb,

$$= \frac{b\dot{x}}{\sqrt{(a^2 + x^2)} \times \sqrt{(a^2 + b^2 + x^2)}} \times \frac{x}{\sqrt{(a^2 + x^2)}} = \frac{-b\dot{w}}{w\sqrt{\left(b^2 + \frac{a^2}{w^2}\right)}}$$

$$= \frac{-b\dot{w}}{\sqrt{(b^2 w^2 + a^2)}} = \frac{-\dot{v}}{\sqrt{(1 + v^2)}}$$; la partie variable de la fluente de cette expression $= -\log. v + \sqrt{(1+v^2)}$, et par conséquent l'attraction totale $= \log. \left(\frac{ck + ak}{ac} \times \frac{ab}{bβ + aβ}\right)$; de sorte que l'attraction du plan, dans la direction cb, se trouve facilement par les logarithmes. Mais pour trouver son attraction dans la direction ac, je ne connais d'autre voie que celle des séries infinies; et les deux séries les plus convenables que je connaisse sont celles qui suivent :

1.re *Séric.* Soit $\frac{b}{a} = \pi$, et soit A=l'arc dont la tang. est π ; enfin soit $B = A - \pi$, $C = B + \frac{\pi^3}{3}$, $D = C - \frac{\pi^5}{5}$, &c. ;

alors l'attraction, dans la direction ac,

$$= \sqrt{(1 - w^2)} \times A + \frac{Bw^2}{2} + \frac{3Cw^4}{2.4} + \frac{3.5Dw^6}{2.4.6} + \&c.$$

Digitized by Google

2.e *Série.* Soit $A =$ l'arc dont la tangente $= \frac{1}{\pi}$, et soit de plus

$$B = A - \frac{1}{\pi}, \quad C = B + \frac{1}{3\pi^3}, \quad D = C - \frac{1}{5\pi^5}, \text{ &c.;}$$

alors l'attraction

$$= \text{arc. } 90^\circ - \sqrt{\left[(1+v^2) \times A - \frac{Bv^2}{2} + \frac{3Cv^4}{2.4} - \frac{3.5Dv^6}{2.4.6} + \text{&c.}\right]}$$

On doit observer que la première série est en défaut, quand π est plus grand que l'unité; et la seconde, quand il est moindre que l'unité: mais si b est pris égal à la moins longue des deux lignes ck et cb, il n'y a point de cas où l'on ne puisse se servir convenablement de l'une ou de l'autre de ces deux séries.

A l'aide de ces séries, j'ai calculé la table qui suit :

	0, 1962	0, 3714	0, 5145	0, 6248	0, 7071	0, 7808	0, 8575	0, 9285	0, 9815	1,
0, 1962	0,00001									
0, 3714	00039	00148								
0, 5145	00074	00277	00521							
0, 6248	00110	00406	00778	01183						
0, 7071	00140	00522	01008	01525	02002					
0, 7808	00171	00637	01245	01896	02405	03247				
0, 8575	00207	00772	01522	02339	03116	03964	05057			
0, 9285	00244	00910	01810	02807	03778	04867	06319	08119		
0, 9815	00271	01019	02084	03193	04368	05639	07478	09931	12849	
1.	00284	01054	02135	03347	04560	05975	07978	10789	14632	19612

Trouvez dans cette table, avec l'argument $\frac{ck}{ak}$ en tête, et l'argument $\frac{cb}{ab}$ dans la colonne à gauche, le logarithme correspondant; puis, ajoutez à ce logarithme le logarithme de $\frac{ck}{ak}$ et celui de $\frac{cb}{ab}$; la somme est le logarithme de l'attraction.

Digitized by Google

Pour calculer d'après cela l'attraction de la caisse sur la balle, supposons la boîte *DCBA (fig. 1)* dans laquelle la balle joue, divisée en deux parties, par une section verticale perpendiculaire à la longueur de la boîte, et passant par le centre de la balle ; soit *(fig. 9)* le parallélipipède *ABDEabde* l'une de ces deux parties, *ABDE* étant la section verticale supposée ; soit *x* le centre de la balle ; menez le parallélogramme *βnpmδx* parallèle à *BbdD*, et *xgrp* parallèle à *βBbn*,, et partagez *βδ* en *c*. Les dimensions intérieures de la boîte sont

$$Bb = 1{,}75 ; \quad BD = 3{,}6 ; \quad B\beta = 1{,}75 \quad \text{et} \quad \beta A = 5 ;$$

d'où je déduis que, si *xc* et *βx* sont pris comme dans les deux lignes supérieures de la table suivante, les attractions des différentes parties sont telles qu'elles sont portées ci-dessous.

xc	0,75.	0,5.	0,25.
βx	1,05.	1,3.	1,55.
Excès de l'attraction de *Ddrg* sur celle de *Bbrg*.....	0,2374.	0,1614.	0,0813.
——— *mdrp* sur celle de *nbrp*.....	0,2374.	0,1614.	0,0813.
——— *mesp* sur celle de *nasp*.....	0,3705.	0,2516.	0,1271.
Somme de ces excès.....	0,8453.	0,5744.	0,2897.
Excès de l'attraction de *Bbnβ* sur celle de *Ddmδ*.....	0,5007.	0,3271.	0,1606.
——— *Aanβ* sur celle de *Eemδ*.....	0,4677.	0,3079.	0,1525.
Attraction totale de la surface intérieure de la demi-boîte.	0,1231.	c,0606.	0,0234.

Il paraît donc que l'attraction de la boîte sur *x* croît plus que proportionnellement à la distance *xc*.

La pesanteur spécifique du bois de cette boîte est 0,61, et son épaisseur est 0,75 pouces [19,05 millimèt.] ; en sorte que, si l'attraction de la surface extérieure de la boîte était la même que celle de

Digitized by Google

l'intérieure, l'attraction totale de la boîte sur la balle, quand $xc=0,75$, serait égale à $2 \times 0,1231 \times 0,61 \times 0,75$ pouces cub. [ou $\times 12,29$ centim. cub.], ou à 0,201 pouces sphériques [3,294 centim. sph.] d'eau, placés à la distance d'un pouce [25,4 millim.] du centre de la balle. Dans la réalité, cette attraction totale ne peut jamais être aussi grande, l'attraction de la surface extérieure devant être moindre que celle de la surface intérieure; et de plus, la distance de x à c n'étant jamais tout-à-fait de 0,75 pouces [19,05 millim.], puisque le plus grand déplacement du fléau n'est que de 1,5 pouces [38,1 millim.].

MÉMOIRE

Digitized by Google

MÉMOIRE
SUR LA COMPOSITION DES FORCES
ET
SUR LA COMPOSITION DES MOMENS;

Lu à l'Institut, le 16 Mai 1814,

Par M. J. BINET.

ON donne communément trois équations pour constater l'équilibre de plusieurs forces qui agissent sur un point : ce sont les trois sommes de composantes de ces forces, dans le sens de trois axes, que l'on prend le plus ordinairement perpendiculaires entre eux, égalées à zéro. Le système de ces trois équations peut être remplacé d'une infinité de manières par celui des trois autres qui résulteraient des mêmes forces décomposées dans le sens de trois axes différens des premiers, et toujours perpendiculaires entre eux, si l'on veut. La direction de ces axes à l'égard des forces proposées dépend d'ailleurs d'arbitraires qui entrent nécessairement dans ces équations d'équilibre, et c'est ce qui rend infini le nombre de ces systèmes de trois équations ; mais en général, des forces qui agissent sur un point ont une résultante, c'est-à-dire, qu'il existe une force qui peut remplacer leur effet ; et il est évident que la grandeur de cette résultante ne dépend que de celle des forces et de leurs directions ; si donc on peut avoir l'expression générale de la résultante totale de ces forces, en l'égalant à zéro, on parvient à une équation qui assurément constatera l'équilibre indépendamment des arbitraires que contiennent implicitement les trois équations ordinaires. Ce sont ces

Digitized by Google

considérations qui m'ont conduit à reprendre, en premier lieu, un sujet tant de fois traité, afin d'y ajouter cette relation et quelques autres de même espèce. Pour cela il suffit, dans l'expression connue de la résultante, égale à la somme des carrés des trois sommes des composantes des forces dans le sens de trois axes rectangulaires, de former les développemens de ces carrés; on trouve que l'élimination de tout ce qui tient aux axes arbitraires se présente d'elle-même, et que la valeur du carré de cette résultante est très-simplement la somme des carrés des forces proposées, jointe au double de la somme des produits deux à deux de ces forces, par les cosinus de leurs angles. Quand donc, pour des forces proposées agissant sur un point, cette somme sera nulle, certainement ces forces se feront équilibre, qu'elles soient ou non disposées dans un même plan. Nous ne donnons point cette expression de la résultante et cette équation d'équilibre comme devant remplacer les formules usitées dans la mécanique. Le plus souvent les forces sont données par des fonctions dépendantes de la situation du point à l'égard d'objets fixes ou mobiles que l'on rapporte comme lui à des axes coordonnés, et alors rien n'est plus naturel que de rapporter les forces elles-mêmes à ces axes. Tous les avantages de cette méthode sont reconnus depuis long-temps; mais dans la statique, il peut être bon de connaître les relations de grandeur et de situation des forces avec leur résultante; et dans tous les cas, les expressions auxquelles j'arrive sont au moins curieuses : on n'y parvient très-facilement, au reste, qu'en employant ces décompositions selon des directions fixes et déterminées, mais de manière à se débarrasser dans les résultats, de tout ce qu'elles ont d'arbitraire. On pourrait encore y arriver au moyen des beaux théorèmes sur les polygones donnés par M. *Carnot*, dans sa *Géométrie de Position*, et par M. *Lhuilier*.

Lorsqu'un corps est retenu à un point fixe autour duquel il peut tourner dans tous les sens, les forces dont il reçoit l'application n'agissent sur lui que par leurs momens. J'entends par le moment d'une force qui est dans cette circonstance, d'agir sur un corps retenu par un

Digitized by Google

point fixe, une force parallèle à la première agissant dans le plan de cette force et du point fixe, à l'unité de distance de ce point, et capable de remplacer l'effet de la force en question; ce qui exige que le moment ait pour valeur le produit de cette force par sa distance au point fixe. Les momens de plusieurs forces qui agissent sur un corps retenu par un de ses points, se combinent d'une manière analogue à la composition des forces appliquées à un point. J'en expose les principes : ils sont les mêmes que ceux de la composition des couples dont M. *Poinsot* a donné la théorie; mais les momens et les couples diffèrent cependant, en ce qu'un moment n'est, dans l'acception où j'emploie ce mot, qu'une force dans une circonstance particulière. J'arrive ainsi à des résultats applicables à la théorie des couples, et qui ont le même caractère que ceux relatifs à la composition des forces qui agissent sur un point, savoir de ne dépendre dans leur expression que de la disposition respective des forces et du point fixe. Par exemple, lorsqu'un nombre quelconque de forces agissent sur un corps solide que je suppose encore retenu par un point fixe, le carré du moment résultant, c'est-à-dire de la force qui, dans ce cas, peut remplacer l'effet de toutes les forces proposées, égale la somme des carrés des momens de ces forces, et du double de leurs produits deux à deux par les cosinus des angles de leurs plans; égalant à zéro cette valeur, on a dans une seule équation l'expression de l'équilibre des forces que l'on considère autour du point fixe. M. *Poisson* a déduit des propriétés des projections des aires planes les théorèmes des momens; en rapprochant ses résultats de ceux que nous venons d'exposer, on retrouve quelques propriétés des projections des aires planes, qui ont encore été données par MM. *Carnot* et *Lhuilier*.

On peut toujours remplacer l'effet de plusieurs forces appliquées à un corps solide entièrement libre, par celui de deux forces, et cela d'une infinité de manières; ce qui laisse une telle indétermination, qu'il est préférable de leur substituer l'effet d'une force et d'un couple. M. *Poinsot* arrive à ce résultat, en appliquant à un point quelconque lié au corps deux forces égales et parallèles à chacune des forces proposées con-

Digitized by Google

traires entre elles, et qui par conséquent ne changent pas l'état du corps. Celles de ces nouvelles forces qui sont de même sens d'action que les forces proposées, et qui sont en quelque sorte ces forces elles-mêmes transportées parallèlement à leurs propres directions au point donné, se composent en une seule, et il reste à considérer autant de systèmes de forces, égales deux à deux, parallèles et contraires. Or, c'est-là ce que M. *Poinsot* appelle des couples, et il a fait voir comment ils se composent à leur manière, et fournissent, pour remplacer leur effet, un couple résultant, par des lois de composition fort régulières. Dès que le point où l'on veut transporter les forces est assigné, le couple et la force résultans sont entièrement déterminés. Le couple est variable en général avec la position de ce point; mais entre tous les points que l'on peut choisir pour y transporter les forces, il en est une suite tous disposés dans une certaine droite parallèle à la résultante générale, pour chacun desquels le couple résultant qui s'y rapporte est un *minimum*. Je rappelle ces résultats, que M. *Poinsot* a exposés à la classe dans un mémoire publié avec le XIII.^e^ Cahier des journaux de l'*École polytechnique*, parce que ceux que je viens d'énoncer sur la composition des forces et sur les momens, y sont tout naturellement applicables, et ajoutent peut-être encore quelque chose à l'élégance de la théorie des couples, et sur-tout des expressions qu'on en tire.

Dans le mouvement d'un système de corps agissant les uns sur les autres d'une manière quelconque, ou entièrement libres de toutes forces étrangères, ou soumis à l'action de forces extérieures satisfaisant à certaines conditions, on a reconnu deux principes généraux désignés sous les noms de *conservation du mouvement du centre de gravité* et de *conservation des aires :* ils ont autant de rapport entre eux que la composition des forces et celle des momens. En reprenant les formules qui renferment ces principes et la théorie du plan invariable découvert par M. *Laplace*, je parviens, sur le système du monde, à un résultat que l'on peut ainsi exprimer : Dans les plans des orbites des planètes, que l'on trace à toute époque une aire égale à celle de l'orbite multipliée par le rapport de

Digitized by Google

la masse de la planète au temps de sa révolution; la somme des carrés de toutes ces aires et du double de leurs produits deux à deux par les cosinus des inclinaisons des orbites, sera constante. M. *Poisson* était déjà parvenu, pour deux planètes qui tournent autour du soleil, à un résultat qui ne diffère guère du nôtre que dans son énoncé, et duquel il a conclu la stabilité du système du monde, quant aux excentricités et aux inclinaisons des orbites, en portant l'approximation au carré des forces perturbatrices.

§. I.er

Sur la Composition des Forces appliquées à un Point.

Lorsqu'un nombre quelconque de forces agissent sur un point, pour en trouver la résultante générale on a coutume de les décomposer parallèlement à trois axes rectangulaires; les composantes qui ont la même direction s'ajoutent, et la résultante générale a pour l'expression de son carré, la somme des carrés des trois sommes de composantes parallèles à chaque axe. Désignons par P, P', P'', &c. les forces proposées; par x, y, z, les axes rectangulaires dans le sens desquels on décomposera les forces; par $\widehat{Px}$, $\widehat{P'x}$, $\widehat{P''x}$, &c. les angles des directions de P, P', P'', &c. avec l'axe des x; et de même par $\widehat{Py}$, $\widehat{P'y}$, &c., $\widehat{Pz}$, $\widehat{P'z}$, &c. pour les axes des y et des z; les sommes des composantes parallèles aux trois axes, seront :

$$P\cos.\widehat{Px} + P'\cos.\widehat{P'x} + P''\cos.\widehat{P''x} + \&c.,$$
$$P\cos.\widehat{Py} + P'\cos.\widehat{P'y} + P''\cos.\widehat{P''y} + \&c.,$$
$$P\cos.\widehat{Pz} + P'\cos.\widehat{P'z} + P''\cos.\widehat{P''z} + \&c.$$

Désignons ces sommes par

$$\Sigma P\cos.\widehat{Px},\quad \Sigma P\cos.\widehat{Py},\quad \Sigma P\cos.\widehat{Pz}.$$

Digitized by Google

Le carré R^2 de la résultante sera

$$R^2 = (\Sigma P\cos.\widehat{Px})^2 + (\Sigma P\cos.\widehat{Py})^2 + (\Sigma P\cos.\widehat{P\zeta})^2.$$

Développons ces carrés, et observons que

$$\cos.^2\widehat{Px} + \cos.^2\widehat{Py} + \cos.^2\widehat{P\zeta} = 1,$$

$$\cos.^2\widehat{P'x} + \cos.^2\widehat{P'y} + \cos.^2\widehat{P'\zeta} = 1,$$

&c. ;

$$\cos.\widehat{Px}\cos.\widehat{P'x} + \cos.\widehat{Py}\cos.\widehat{P'y} + \cos.\widehat{P\zeta}\cos.\widehat{P'\zeta} = \cos.\widehat{PP'},$$

$$\cos.\widehat{Px}\cos.\widehat{P''x} + \cos.\widehat{Py}\cos.\widehat{P''y} + \cos.\widehat{P\zeta}\cos.\widehat{P''\zeta} = \cos.\widehat{PP''},$$

&c. ;

on aura pour R^2 la valeur

$$P^2+P'^2+P''^2+\&c.+2PP'\cos\widehat{PP'}+2PP''\cos\widehat{PP''}+\&c.+2P'P''\cos\widehat{P'P''}+\&c.,$$

ou bien

$$R^2 = \Sigma P^2 + 2\Sigma PP'\cos.\widehat{PP'};$$

expression dans laquelle il n'entre que des quantités qui dépendent de la situation mutuelle des forces proposées, et qui fournit ce théorème : le carré de la résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à un point, égale la somme des carrés de toutes les composantes, plus le double de la somme de leurs produits deux à deux et du cosinus de l'angle compris par les directions de ces forces. L'analogie du théorème de géométrie dont j'ai parlé ci-dessus et de cette proposition est très-évidente, et pouvait servir à conduire de l'un à l'autre.

Les trois composantes de la force R parallèles aux axes x, y, ζ, sont $R\cos.\widehat{Rx}$, $R\cos.\widehat{Ry}$, $R\cos.\widehat{R\zeta}$; ainsi,

$$R\cos.\widehat{Rx} = \Sigma P\cos.\widehat{Px},\quad R\cos.\widehat{Ry} = \Sigma P\cos\widehat{Py},\quad R\cos.\widehat{R\zeta} = \Sigma P\cos.\widehat{P\zeta}.$$

Digitized by Google

Multipliant ces équations par

$$\cos.\widehat{Px}, \quad \cos.\widehat{Py}, \quad \cos.\widehat{Pz},$$

et ayant égard aux équations ci-dessus, on aura

$$R\cos.\widehat{RP} = P + P'\cos.\widehat{P'P} + P''\cos.\widehat{P''P} + \&c.$$

Par cette formule se trouve déterminé l'angle $\widehat{RP}$ que forme la résultante et une quelconque P des autres forces proposées. On peut remarquer que l'expression

$$[P + P'\cos.\widehat{P'P} + P''\cos.\widehat{P''P} + \&c.] : R,$$

est la différence partielle $\frac{dR}{dP}$ de R prise relativement à P; ainsi $\cos.\widehat{PR} = \frac{dR}{dP}$, de la même manière

$$\cos.\widehat{P'R} = \frac{dR}{dP'}, \quad \cos.\widehat{P''R} = \frac{dR}{dP''}, \quad \&c.$$

Multipliant ces équations respectivement par P, P', P'', &c. et les ajoutant, il vient

$$P\cos.\widehat{PR} + P'\cos.\widehat{P'R} + P''\cos.\widehat{P''R} + \&c.$$
$$= P\frac{dR}{dP} + P'\frac{dR}{dP'} + P''\frac{dR}{dP''} + \&c.$$

Or, R est une fonction homogène de P, P', P'', &c., dont la dimension est l'unité; il suit de là que le dernier membre de l'équation précédente est R; ainsi

$$R = P\cos.\widehat{PR} + P'\cos.\widehat{P'R} + \&c.;$$

ce que l'on déduit encore des équations

$$R\cos.\widehat{Rx} = \Sigma P\cos.\widehat{Px}, \quad R\cos.\widehat{Ry} = \Sigma P\cos.\widehat{Py}, \quad R\cos.\widehat{Rz} = \Sigma P\cos.\widehat{Pz},$$

Digitized by Google

en les multipliant par cos. $\widehat{Rx}$, cos. $\widehat{Ry}$, cos. $\widehat{Rz}$, et les ajoutant ensuite.

D'après l'expression

$$\Sigma P^2 + 2\Sigma PP' \cos. \widehat{PP'}$$

du carré de la résultante, on peut, pour établir l'équilibre des forces P, P', &c. appliquées au même point, écrire simplement l'équation

$$0 = \Sigma P^2 + 2\Sigma PP' \cos. \widehat{PP'},$$

qui peut être partagée d'une infinité de manières, en trois autres auxquelles elle équivaut, et qu'elle seule remplace complétement. Elle est indépendante de toute décomposition de force selon des directions arbitraires, et, sous ce rapport, préférable aux trois équations qu'elle remplace, pour constater l'équilibre; mais ces équations ont leur avantage, principalement lorsque les forces dépendent de la situation du point de leur application.

§. II.

De la Composition des Forces appliquées à un Corps solide dont un Point est fixé.

Nous exposons ici la théorie des momens, pour faire connaître son analogie avec la composition des forces et sa ressemblance presque parfaite avec la théorie des couples de M. *Poinsot.*

Supposons qu'une seule force agisse sur un corps retenu par un de ses points, mais d'ailleurs entièrement libre. Il est clair que l'effet de cette pression sera de tendre à mouvoir tous les points du corps de manière à conserver leurs distances au point fixé, puisque le corps est solide : un pareil mouvement s'appelle *une rotation.*

Nommons r la distance de la direction de la force P au point invariable; il est facile de voir que cette force peut être remplacée par l'effet

Digitized by Google

l'effet de toute autre d'égale intensité qui serait appliquée dans le plan du point fixé et de la force proposée à une distance r du point, et tendant à faire tourner dans le même sens. Car si, dans ce plan, nous appliquons en un point arbitraire, deux forces égales et opposées, d'une direction quelconque distante de r du point fixe désigné par la lettre F; en supposant que la direction qu'on leur donne rencontre la force primitive P, l'une d'elles, celle qui tend à faire tourner en sens contraire, fournira avec P une résultante dont la direction passera par le point F, et ce point étant fixe, nous ne parlerons plus de cette force, puisqu'elle sera détruite ; l'autre des deux forces opposées, aura tout son effet, et remplacera celui de la force P. Si les forces opposées eussent été prises parallèles à la force primitive, l'une d'elles combinée avec cette force eût également fourni une résultante passant par le point fixe et s'y détruisant; quant à l'autre force P, opposée à celle qui vient d'être employée avec la force primitive, elle conservera tout son effet, et remplacera celui de la force donnée. Il résulte de là que si on décrit une circonférence de cercle du point F comme centre avec le rayon r, c'est-à-dire, un cercle tangent à la direction de P, et qu'on transporte cette force en la conservant toujours tangente à cette circonférence, son effet sera le même quant à la rotation du corps autour du point fixe. Il s'ensuit encore que si plusieurs P, Q, R, &c. agissent dans le même plan, à la même distance du point fixe, toutes ces forces peuvent être remplacées par une seule égale à

$$P + Q + R + \&c.,$$

ayant égard aux signes, qui dépendent du sens de la rotation que ces forces tendent à imprimer au corps, sens qu'il sera facile de déterminer, en concevant, par exemple, ces forces disposées de manière qu'elles agissent sur le même point de la circonférence à laquelle elles sont tangentes; ce qui est permis, d'après l'observation précédente.

La perpendiculaire r étant abaissée du point fixe sur la direction de P, prenons à partir du point F sur cette ligne une quantité égale à

Digitized by Google

l'unité; il est clair, par le principe des forces parallèles, qu'on pourra remplacer l'effet de la force P par celui d'une force parallèle, appliquée à ce nouveau point, et cette force x devra être égale à Pr.

En prenant encore toute autre force x tangente à la circonférence décrite avec l'unité pour rayon, cette force pourra également remplacer l'effet de la force P : c'est proprement là ce que l'on entend communément par le moment de la force P. Une autre force P', qui serait aussi dans le plan du point F et de P, à une distance r' de F, pourrait être également remplacée par la force $P'r'$ tangente à la même circonférence décrite avec l'unité comme rayon. Une troisième force P'', à la distance r'', le serait par la force $P''r''$, encore tangente à la même circonférence, et ainsi de suite, pour tant de forces que l'on voudra; le système de toutes les forces P, P', P'', &c. pourra donc être remplacé par toute force égale à

$$Pr + P'r' + P''r'' + \&c.,$$

aussi tangente à la circonférence décrite. Dans cette somme, on aura égard aux signes des momens, comme nous l'avons déjà dit; ainsi les momens des forces situées dans le plan qui contient le point fixe s'ajoutent comme s'ajoutent les forces agissant dans la même ligne droite sur un corps solide.

Présentement, considérons deux forces P, P', non situées dans le même plan : la première pourra être remplacée par son moment Pr, la seconde par le moment $P'r'$. Désignons par $P_{,}$, $P'_{,}$ ces momens, c'est-à-dire les forces qui agissent tangentiellement à des circonférences décrites avec l'unité pour rayon du point F comme centre, dans les plans de ce point et des forces proposées P, P', et qui peuvent remplacer ces forces. On regardera les momens $P_{,}$, $P'_{,}$ comme agissant à un des deux points de la commune intersection de ces circonférences; là, ces deux forces comprendront entre elles un angle qui sera précisément l'inclinaison des plans des circonférences, ou l'inclinaison des plans des

Digitized by Google

momens. La résultante de ces deux forces sera comprise dans leur plan, lequel est tangent à la sphère décrite du même rayon que les cercles, et le carré de cette force résultante sera

$$P_,^2 + P_,'^2 + 2P_,P_,' \cos. \widehat{P_,P_,'}$$

où $\cos. \widehat{P_,P_,'}$ désigne le cosinus de l'angle que la direction de la force $P_,$ forme avec celle de $P_,'$, c'est-à-dire de l'angle du plan du moment $P_,$ de la force P, avec le plan du moment $P_,'$ de la force P'. Nommons $Q_,$ cette résultante qui, agissant à l'unité de distance du point F, peut être appelée un moment, ou bien le moment résultant de ceux des forces proposées. L'inclinaison du plan de ce moment sur celui de $P_,$, égale l'angle formé par les forces $P_,$ et $Q_,$; mais cet angle $\widehat{Q_,P_,}$ a son cosinus

$$\cos. \widehat{Q_,P_,} = [Q_,^2 + P_,^2 - P_,'^2] : 2Q_,P_,,$$

et en mettant pour $Q_,^2$ sa valeur au numérateur,

$$\cos. \widehat{Q_,P_,} = [P_, + P_,' \cos. \widehat{P_,P_,'}] : Q_,.$$

On aura semblablement

$$\cos. \widehat{Q_,P_,'} = [P_,' + P_, \cos. \widehat{P_,P_,'}] : Q_,;$$

c'est ce qui résulte, au reste, des formules que nous avons données ci-dessus pour la composition des forces. Multiplions respectivement ces valeurs par $P_,$, $P_,'$, et ajoutons, il vient encore,

$$P_, \cos. \widehat{P_,Q_,} + P_,' \cos. \widehat{P_,'Q_,} = \frac{P_,^2 + P_,'^2 + 2P_,P_,' \cos. \widehat{P_,P_,'}}{Q_,} = Q_,.$$

Ayant une nouvelle force P'' agissant dans une direction distante de r'' du point F, son action sera encore remplacée par un moment $P_,'' = P''r''$, que l'on pourra aussi composer par de semblables procédés avec le moment $Q_,$, qui déjà résulte de $P_,$ et $P_,'$; on arriverait ainsi à l'expression du moment résultant de trois forces, ensuite de quatre, &c.;

Digitized by Google

mais pour éviter ces compositions successives, assez pénibles, nous aurons recours à des moyens analogues à ceux employés pour la composition des forces.

Supposons donc qu'ayant deux forces P, P', les plans de leurs momens $P_,$, $P_,'$ soient perpendiculaires entre eux, leur moment résultant $Q_,$ sera alors donné par

$$Q_,^2 = P_,^2 + P_,'^2,$$

et l'on aura

$$\cos.\widehat{Q_,P_,} = P_, : Q_, \quad \cos.\widehat{Q_,P_,'} = P_,' : Q_, = \sin.\widehat{P_,Q_,}$$

si une troisième force P' se trouve avec le point F dans un plan perpendiculaire aux deux plans $P_,$, $P_,'$, et par conséquent aussi au plan de $Q_,$, qui passe par l'intersection des deux premiers ; le moment $P_,''$ de cette nouvelle force pourra se composer avec $Q_,$, de manière que leur moment résultant étant nommé $Q_,'$, on aura

$$Q_,'^2 = Q_,^2 + P_,''^2,$$

ou bien

$$Q_,'^2 = P_,^2 + P_,'^2 + P_,''^2.$$

L'angle que le plan de $Q_,'$ fera avec celui de $P_,''$, aura pour cosinus

$$\cos.\widehat{Q_,'P_,''} = P_,'' : Q_,' ;$$

et les momens $P_,'$, $P_,$ concourant de la même manière que $P_,''$ à la composition de $Q_,'$, quoiqu'ayant été employés dans un ordre différent, on aura encore

$$\cos.\widehat{Q_,'P_,'} = P_,' : Q_,', \quad \cos.\widehat{Q_,'P_,} = P_, : Q_,',$$

expressions que l'on retrouve, au reste, par les formules ci-dessus et celles de la trigonométrie.

On voit ainsi comment trois momens rectangulaires se peuvent

Digitized by Google

composer en un seul, dont la grandeur et la position sont entièrement déterminées ; réciproquement, on peut aussi remplacer tout moment $P_,$ par trois autres dont les plans soient rectangulaires et assignés. Nommons ces plans $x_,$, $y_,$, $z_,$; ils déterminent sur la surface de la sphère décrite également du centre F avec l'unité pour rayon, trois circonférences de grands cercles : la circonférence que forme le plan $P_,$ sur la même sphère rencontre celle de $x_,$; par ce point et le pôle de celle-ci, on mènera un grand cercle. On décomposera d'abord $P_,$ en deux momens agissant dans ces deux plans perpendiculaires entre eux, et l'on imaginera le moment perpendiculaire au plan $x_,$, comme agissant au pôle de ce cercle, où passent les deux circonférences de grands cercles comprises dans les plans $y_,$, $z_,$ qui sont aussi rectangulaires, et selon lesquels on décomposera pareillement ce moment. Or, ces trois momens composans de $P_,$ auront pour expressions

$$P_, \cos. \widehat{P_,x_,}, \quad P_, \cos. \widehat{P_,y_,}, \quad P_, \cos. \widehat{P_,z_,},$$

ayant un nombre quelconque de forces P', P'', &c. disposées arbitrairement dans l'espace, on pourra remplacer l'effet de chacune d'elles, toujours supposée agir sur le même corps dont un point est fixé en F, par trois momens compris dans les plans $x_,$, $y_,$, $z_,$, comme les précédens ; et pour P', on aura les momens composans

$$P'_, \cos. \widehat{P'_,x_,}, \quad P'_, \cos. \widehat{P'_,y_,}, \quad P'_, \cos. \widehat{P'_,z_,} ;$$

pour P'',

$$P''_, \cos. \widehat{P''_,x_,}, \quad P''_, \cos. \widehat{P''_,y_,}, \quad P''_, \cos. \widehat{P''_,z_,} ;$$

&c. &c. &c.

mais les momens compris dans le même plan s'ajoutant, on remplacera ces trois systèmes par ces trois sommes,

$$\Sigma P_, \cos. \widehat{P_,x_,}, \quad \Sigma P_, \cos. \widehat{P_,y_,}, \quad \Sigma P_, \cos. \widehat{P_,z_,},$$

Digitized by Google

lesquelles représentant des momens qui agissent dans trois plans rectangulaires, peuvent en conséquence se composer en un seul $R_{,}$, dont le carré sera

$$R_{,}^{2} = (\Sigma P_{,} \cos.\widehat{P_{,}x_{,}})^{2} + (\Sigma P_{,} \cos.\widehat{P_{,}y_{,}})^{2} + (\Sigma P_{,} \cos.\widehat{P_{,}z_{,}})^{2},$$

en développant le carré de chaque somme,

$$R_{,}^{2} = \Sigma P_{,}^{2} (\cos.^{2}\widehat{P_{,}x_{,}} + \cos.^{2}\widehat{P_{,}y_{,}} + \cos.^{2}\widehat{P_{,}z_{,}})$$
$$+ 2\Sigma P_{,}P_{,}'' (\cos.\widehat{P_{,}x_{,}} \cos.\widehat{P_{,}'x_{,}} + \cos.\widehat{P_{,}y_{,}} \cos.\widehat{P_{,}'y_{,}} + \cos.\widehat{P_{,}z_{,}} \cos.\widehat{P_{,}'z_{,}}).$$

Or, $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ sont trois plans rectangulaires, ainsi

$$\cos.^{2}\widehat{P_{,}x_{,}} + \cos.^{2}\widehat{P_{,}y_{,}} + \cos.^{2}\widehat{P_{,}z_{,}} = 1,$$
$$\cos.^{2}\widehat{P_{,}'x_{,}} + \cos.^{2}\widehat{P_{,}'y_{,}} + \cos.^{2}\widehat{P_{,}'z_{,}} = 1,$$
$$\text{\&c.};$$

$$\cos.\widehat{P_{,}x_{,}} \cos.\widehat{P_{,}'x_{,}} + \cos.\widehat{P_{,}y_{,}} \cos.\widehat{P_{,}'y_{,}} + \cos.\widehat{P_{,}z_{,}} \cos.\widehat{P_{,}'z_{,}} = \cos.\widehat{P_{,}P_{,}'},$$
$$\cos.\widehat{P_{,}x_{,}} \cos.\widehat{P_{,}''x_{,}} + \cos.\widehat{P_{,}y_{,}} \cos.\widehat{P_{,}''y_{,}} + \cos.\widehat{P_{,}z_{,}} \cos.\widehat{P_{,}''z_{,}} = \cos.\widehat{P_{,}P_{,}''},$$
$$\text{\&c.};$$

donc, le carré du moment résultant

$$R_{,}^{2} = \Sigma P_{,}^{2} + 2\Sigma P_{,}P_{,}' \cos.\widehat{P_{,}P_{,}'}.$$

En décomposant $R_{,}$ selon les trois plans des $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, on aura à sa place ces trois autres momens,

$$R_{,} \cos.\widehat{R_{,}x_{,}}, \quad R_{,} \cos.\widehat{R_{,}y_{,}}, \quad R_{,} \cos.\widehat{R_{,}z_{,}},$$

on aura donc

$$\cos.\widehat{R_{,}x_{,}} = [\Sigma P_{,} \cos.\widehat{P_{,}x_{,}}] : R_{,},$$
$$\cos.\widehat{R_{,}y_{,}} = [\Sigma P_{,} \cos.\widehat{P_{,}y_{,}}] : R_{,},$$
$$\cos.\widehat{R_{,}z_{,}} = [\Sigma P_{,} \cos.\widehat{P_{,}z_{,}}] : R_{,}.$$

Digitized by Google

Multiplions ces valeurs par

$$\cos.\widehat{P_{,}x_{,}}, \quad \cos.\widehat{P_{,}y_{,}}, \quad \cos.\widehat{P_{,}z_{,}},$$

et ajoutons-les ensuite, en observant encore que

$$\cos.\widehat{P_{,}R_{,}} = \cos.\widehat{P_{,}x_{,}}\cos.\widehat{R_{,}x_{,}} + \cos.\widehat{P_{,}y_{,}}\cos.\widehat{R_{,}y_{,}} + \cos.\widehat{P_{,}z_{,}}\cos.\widehat{R_{,}z_{,}},$$

et ayant égard aux équations ci-dessus, il vient

$$\cos.\widehat{P_{,}R_{,}} = [P_{,} + \Sigma P_{,}'\cos.\widehat{P_{,}P_{,}'}] : R_{,},$$

et ici, nous entendons par $\Sigma P_{,}'\cos.\widehat{P_{,}P_{,}'}$, la somme

$$P_{,}'\cos.\widehat{P_{,}P_{,}'} + P_{,}''\cos.\widehat{P_{,}P_{,}''} + P_{,}'''\cos.\widehat{P_{,}P_{,}'''} + \&c. :$$

or, il est visible que cette expression revient à

$$\cos.\widehat{P_{,}R_{,}} = \frac{dR_{,}}{dP_{,}};$$

et pareillement, on aura

$$\cos.\widehat{P_{,}R_{,}} = \frac{dR_{,}}{dP_{,}'}, \quad \cos.\widehat{P_{,}''R_{,}} = \frac{dR_{,}}{dP_{,}''}, \quad \&c.$$

Multipliant ces équations par $P_{,}$, $P_{,}'$, $P_{,}''$, &c., et les ajoutant, on aura

$$P_{,}\cos.\widehat{P_{,}R_{,}} + P_{,}'\cos.\widehat{P_{,}'R_{,}} + P_{,}''\cos.\widehat{P_{,}''R_{,}} + \&c.$$
$$= P_{,}\frac{dR_{,}}{dP_{,}} + P_{,}'\frac{dR_{,}}{dP_{,}'} + P_{,}''\frac{dR_{,}}{dP_{,}''} + \&c.$$

Si nous remarquons encore que $R_{,}$ est une fonction homogène des quantités $P_{,}$, $P_{,}'$, $P_{,}''$, &c., dont la dimension est l'unité, nous reconnaîtrons que le second membre de cette équation revient à $R_{,}$; ainsi l'on a

$$R_{,} = P_{,}\cos.\widehat{P_{,}R_{,}} + P_{,}'\cos.\widehat{P_{,}'R_{,}} + P_{,}''\cos.\widehat{P_{,}''R_{,}} + \&c.,$$

Digitized by Google

nous fussions parvenus à ce résultat, en multipliant les valeurs ci-dessus, de $R_{,}\cos.\widehat{R_{,}x_{,}}$, $R_{,}\cos.\widehat{R_{,}y_{,}}$, $R_{,}\cos.\widehat{R_{,}z_{,}}$, respectivement par $\cos.\widehat{R_{,}x_{,}}$, $\cos.\widehat{R_{,}y_{,}}$, $\cos.\widehat{R_{,}z_{,}}$, et en les ajoutant.

Les considérations que nous venons de suivre nous montrent que l'on peut remplacer l'effet d'un système quelconque de forces sur un corps solide, qui a un point F fixé, par le moment unique, dont le carré est

$$\Sigma P_{,}^{2} + 2\Sigma P_{,}P_{,}'\cos.\widehat{P_{,}P_{,}'} :$$

c'est-à-dire, par l'effet de toute force située dans le plan de $R_{,}$, et telle que le produit de sa distance au point F par sa grandeur, soit $R_{,}$: or, pour que le système soit en équilibre autour de ce point fixe, il suffit certainement que ce moment soit nul, car nous venons de dire qu'il peut être regardé comme la seule force agissant sur le corps; on doit donc avoir pour l'équilibre, dans ce cas,

$$0 = \Sigma P_{,}^{2} + 2\Sigma P_{,}P_{,}'\cos.\widehat{P_{,}P_{,}'},$$

équation qui remplace seule les trois dont on a coutume de se servir pour exprimer l'équilibre dans le système de forces agissant sur un corps retenu par l'un de ses points. Elle dispense de toutes les décompositions qu'exigent ces trois équations, puisqu'elle ne contient que des élémens qui dépendent uniquement de la disposition des forces à l'égard du corps et du point fixe.

On prend souvent la considération des momens dans l'effet des forces sur un corps solide qui a deux de ses points fixés, c'est-à-dire, qui n'a que la liberté de tourner autour d'un axe. Ce que nous avons exposé a trop de rapport avec cette théorie ainsi qu'avec celle des rotations infiniment petites que peut recevoir un système solide dans des directions quelconques, pour qu'il soit nécessaire d'insister sur ces rapprochemens évidens. (Voyez les Mémoires d'*Euler*, et sur-tout le §. III de la 3.^me^ section de la *Mécanique analytique* de M. *Lagrange*.)

Des

Digitized by Google

§. III.

Des Forces appliquées d'une manière quelconque à un Corps solide libre.

M. *Poinsot*, en introduisant la considération des couples dans la statique des corps solides, est parvenu à ce théorème : L'effet d'un système quelconque de forces sur un corps solide peut être remplacé par celui d'une force et d'un couple. La force est la résultante de toutes les forces proposées transportées en un même point de l'espace, parallèlement à elles-mêmes, et le couple résulte de la composition d'autant de couples qu'il y a de forces proposées. Le couple correspondant à l'une de ces forces consiste en deux forces qui lui sont égales et parallèles de directions contraires, et agissant dans le plan du point auquel on a transporté toutes les forces et de celle en question; et la distance de ce point à la force est celle qui sépare les deux forces parallèles contraires qui forment le couple.

Les forces $P_{,}$, $P_{,}'$, $P_{,}''$, &c. transportées parallèlement à elles-mêmes en un point A, se composeront en une seule force résultante, dont le carré sera, d'après ce que nous avons vu §. I,

$$R^2 = \Sigma P^2 + 2\Sigma PP' \cos.\widehat{PP'}.$$

D'après la théorie de M. *Poinsot*, l'effet du couple qui provient de la translation de chaque force, a pour mesure le produit de cette force par la distance de sa direction au point où elle a été transportée, ou bien le moment de la force relativement à ce point; et les principes de la composition des couples sont les mêmes que ceux de la composition des momens; en conservant donc les lettres $P_{,}$, $P_{,}'$, $P_{,}''$, &c. pour les mesures de ces couples, on aura le carré du couple résultant

$$R_{,}^2 = \Sigma P_{,}^2 + 2\Sigma P_{,}P_{,}' \cos.\widehat{P_{,}P_{,}'}.$$

Pour déterminer la direction de la résultante et du couple résultant à l'égard des forces P, P', &c. ou des couples P', $P_{,}'$, $P_{,}''$, &c., on a

Digitized by Google

toutes les relations écrites §§. I et II, et que nous nous dispensons de rapporter ici.

La force R étant décomposée parallèlement à trois axes x, y, z, a donné les composantes perpendiculaires

$$R\cos.\widehat{Rx}=\Sigma P\cos.\widehat{Px},\quad R\cos.\widehat{Ry}=\Sigma P\cos.\widehat{Py},\quad R\cos.\widehat{Rz}=\Sigma P\cos.\widehat{Pz};$$

et le couple $R_{,}$ décomposé pareillement selon les plans yz, zx, xy, que je nomme, comme ci-dessus, $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, fournit les trois couples composans perpendiculaires

$$R_{,}\cos.\widehat{R_{,}x_{,}}=\Sigma P_{,}\cos.\widehat{P_{,}x_{,}},\quad R_{,}\cos.\widehat{R_{,}y_{,}}=\Sigma P_{,}\cos.\widehat{P_{,}y_{,}},$$
$$R_{,}\cos.\widehat{R_{,}z_{,}}=\Sigma P_{,}\cos.\widehat{P_{,}z_{,}};$$

multipliant ces équations par ordre, avec les trois précédentes, il vient, en ajoutant les produits,

$$RR_{,}[\cos.\widehat{Rx}\cos.\widehat{R_{,}x_{,}}+\cos.\widehat{Ry}\cos.\widehat{R_{,}y_{,}}+\cos.\widehat{Rz}\cos.\widehat{R_{,}z_{,}}]=$$
$$\Sigma P\cos.\widehat{Px}\Sigma P_{,}\cos.\widehat{P_{,}x_{,}}+\Sigma P\cos.\widehat{Py}\Sigma P_{,}\cos.\widehat{P_{,}y_{,}}+\Sigma P\cos.\widehat{Pz}\Sigma P_{,}\cos.\widehat{P_{,}z_{,}};$$

mais, par la formule qui sert à déterminer l'angle qu'une droite forme avec un plan, on a

$$\sin.\widehat{RR_{,}}=\cos.\widehat{Rx}\cos.\widehat{R_{,}x_{,}}+\cos.\widehat{Ry}\cos.\widehat{R_{,}y_{,}}+\cos.\widehat{Rz}\cos.\widehat{R_{,}z_{,}},$$
$$\sin.\widehat{PP_{,}}=\cos.\widehat{Px}\cos.\widehat{P_{,}x_{,}}+\cos.\widehat{Py}\cos.\widehat{P_{,}y_{,}}+\cos.\widehat{Pz}\cos.\widehat{P_{,}z_{,}},$$
$$\sin.\widehat{P'P_{,}}=\cos.\widehat{P'x}\cos.\widehat{P_{,}x_{,}}+\cos.\widehat{P'y}\cos.\widehat{P_{,}y_{,}}+\cos.\widehat{P'z}\cos.\widehat{P_{,}z_{,}},$$
&c. ;

et puisque la force P est dans le plan du couple $P_{,}$, ou parallèle à ce plan, qu'il en est de même de P' à l'égard du couple $P_{,}'$, &c., il s'ensuit que

Digitized by Google

$$\sin.\widehat{PP_{,}} = 0, \quad \sin.\widehat{P'P_{,}'} = 0, \quad \sin.\widehat{P''P_{,}''} = 0, \quad \&c.;$$

le second membre ci-dessus se réduit ainsi à

$$PP_{,}'\sin.\widehat{PP_{,}'} + P'P_{,}\sin.\widehat{P'P_{,}} + PP_{,}''\sin.\widehat{PP_{,}''} + P''P_{,}\sin.\widehat{P''P_{,}} + \&c.,$$

somme que nous désignerons encore par $\Sigma PP_{,}'\sin.\widehat{PP_{,}'}$; on aura donc enfin

$$\sin.\widehat{RR_{,}} = [\Sigma PP_{,}'\sin.\widehat{PP_{,}'}] : RR_{,}.$$

M. *Poinsot* a fait voir (n.° XIII du Journal de l'École polytechnique, *page 192*), qu'entre tous les couples résultans qui proviennent de la translation des forces proposées parallélement à elles-mêmes à différens points A de l'espace, celui dont la valeur est un *minimum* a son plan perpendiculaire à la résultante générale R, laquelle reste la même quel que soit ce point; et de plus, que l'expression de ce moindre couple est $R_{,}\sin.\widehat{RR_{,}}$. En le nommant donc $\mathfrak{R}_{,}$, on aura

$$\mathfrak{R}_{,} = [\Sigma PP_{,}'\sin.\widehat{PP_{,}'}] : R.$$

Considérons les deux termes correspondans du numérateur de $\mathfrak{R}_{,}$

$$PP_{,}'\sin.\widehat{PP_{,}'} + P'P_{,}\sin.\widehat{P'P_{,}},$$

pour $P_{,}$, remettons-y la valeur Pr, r étant la distance de la direction primitive de P au point A où l'on a transporté les forces, et aussi $P'r'$ pour $P_{,}'$; les deux termes deviendront

$$PP'[r'\sin.\widehat{PP_{,}'} + r\sin.\widehat{P'P_{,}}].$$

Par ce point A, imaginons un plan Δ parallèle aux deux forces dans leur première situation, en comprenant en conséquence P, P' transportées au point A, le plan de $P_{,}$ le coupera sur un angle $\widehat{P_{,}\Delta}$; et d'après

Digitized by Google

l'analogie des sinus dans les triangles sphériques rectangles, on aura

$$\sin.\widehat{P'P_{,}} = \sin.\widehat{PP'}.\sin.\widehat{P_{,}\Delta},$$

et pareillement

$$\sin.\widehat{PP_{,}'} = \sin.\widehat{PP'}.\sin.\widehat{P_{,}'\Delta}.$$

Les deux termes deviendront ainsi

$$PP'\sin.\widehat{PP'}\,[r'\sin.\widehat{P_{,}'\Delta} + r\sin.\widehat{P_{,}\Delta}];$$

mais les droites r et r' sont dans les plans $P_{,}$, $P_{,}'$ des perpendiculaires aux intersections de ces plans sur le plan Δ, et par suite, les angles $\widehat{P_{,}'\Delta}$, $\widehat{P_{,}\Delta}$, sont égaux aux angles $\widehat{r'\Delta}$, $\widehat{r\Delta}$; la somme sera donc encore égale à

$$PP'\sin.\widehat{PP'}\,[r'\sin.\widehat{r'\Delta} + r\sin.\widehat{r\Delta}];$$

et ici la partie entre les crochets, est la somme des projections de r et de r' sur une perpendiculaire au plan Δ, c'est-à-dire la plus courte distance des deux droites P et P' dans leur première situation. Nommons-la $\mathfrak{N}'$ pour les forces PP'; $\mathfrak{N}''$ pour PP''; $\mathfrak{N}'''$, $\mathfrak{N}^{IV}$, &c. pour PP''', PP^{IV}, &c.; $'\mathfrak{N}''$, $'\mathfrak{N}'''$, $'\mathfrak{N}^{IV}$, &c. pour $P'P''$, $P'P'''$, $P'P^{IV}$, &c. Nous aurons en vertu de tout cela,

$$\mathfrak{R}_{,} = [\Sigma PP'\mathfrak{N}'\sin.\widehat{PP'}] : R,$$

où l'on doit observer qu'il ne se trouve plus dans la somme Σ que la moitié du nombre des termes de la somme précédente. Si l'on considère dans l'espace les forces P, P', P'', &c. comme représentées par des parties de leurs directions, le terme $PP'\mathfrak{N}'\sin.PP'$ sera le volume du parallélipipède compris entre deux plans parallèles à Δ, l'un mené par P et l'autre par P', et sous quatre autres plans parallèles deux à deux, et conduits par les droites qui joindraient les extrémités de P à

Digitized by Google

celles de P'. Ce parallélipipède est celui que M. *Monge* nommerait circonscrit à la pyramide déterminée par ces quatre points, extrémités de P et P' (Correspondance sur l'École polytechnique, *n.° 10, tom. I*). Le rapport de la somme de tous les volumes semblables, à la résultante générale R, sera donc le moindre couple résultant. On aurait pu déduire ces résultats de l'expression de $\mathfrak{R}_{,}$ en fonction des forces composantes et des couples composans parallèles à des axes et plans coordonnés, et de la valeur que donne *Euler* de la plus courte distance de deux droites rapportées à des axes rectangulaires. *(Nova acta petrop.* tom. VII*)*.

D'après la théorie des couples, il faut que l'angle $\widehat{RR_{,}}$ soit nul pour que l'effet de toutes les forces du système sur le corps solide se puisse remplacer par une seule force; ainsi, la condition pour cela sera

$$0 = \frac{\Sigma PP_{,}' \sin. \widehat{PP_{,}'}}{RR_{,}},$$

ou, en vertu de la transformation que nous venons de faire,

$$0 = \frac{\Sigma PP' \delta' \sin. \widehat{PP'}}{RR'}.$$

Égalant à zéro le numérateur, on a

$$0 = \Sigma PP_{,}' \sin. \widehat{PP_{,}'}, \quad \text{ou bien} \quad 0 = \Sigma PP' \delta' \sin. \widehat{PP'}.$$

En parvenant à une équation équivalente à celle-ci, M. *Poinsot* observe qu'il y faut joindre la restriction que R ne soit pas nul, sans quoi le système des forces proposées pourrait ne fournir qu'un couple; et en effet, cette restriction est dans la condition même, puisque, si R était nul, on ne pourrait rien affirmer du sinus de l'angle $\widehat{RR_{,}}$.

Lorsque les forces P, P', &c. doivent se faire équilibre, il faut que séparément le couple résultant qui répond à un point quelconque, et

Digitized by Google

la résultante générale des forces soient nuls; il s'ensuit donc que pour un système de forces appliquées à des points liés entre eux d'une manière invariable, on doit avoir simplement, dans le cas de l'équilibre,

$$0 = \Sigma P^2 + 2\Sigma PP' \cos. \widehat{PP'},$$

$$0 = \Sigma P_{,}^{2} + 2\Sigma P_{,}P_{,}' \cos. \widehat{P_{,}P_{,}'};$$

conditions qui remplacent complétement les six équations dont on se sert communément pour l'équilibre des corps solides. La dernière exprime que l'équilibre aurait lieu, si le point A était fixé, et c'est pour cela qu'on nomme les trois équations, qui ordinairement la remplacent, les équations de l'équilibre de rotation. Au reste, il est facile de s'assurer que si elle se vérifiait pour un point quelconque de l'espace, la première en serait une suite nécessaire, et cela résulte bien de la théorie des couples, à laquelle nous devons renvoyer pour plusieurs choses que nous avons supposées dans ce paragraphe.

§. IV.

Sur les Principes de la conservation du Mouvement du centre de Gravité et de la conservation des Aires.

Ces deux principes répondent, comme on sait, aux conditions de l'équilibre des corps solides, qui sont aussi les conditions générales de l'équilibre de tous les systèmes, quelle que soit la liaison de leurs parties. Nous partirons des expressions ordinaires de ces principes, et nous désignerons pour cela à toute époque du mouvement du corps par X, Y, Z, les coordonnées du centre de gravité du système des masses m, m', m'', &c., sollicitées par des forces P, P', P'', &c., qui forment avec les axes coordonnés x, y, z, les angles α, β, γ; α', β', γ', &c. Le principe du centre de gravité est compris dans les équations suivantes, où l'on fait, pour abréger, $M = \Sigma m$:

$$\frac{d^2X}{dt^2} M = \Sigma mP\cos.\alpha, \quad \frac{d^2Y}{dt^2} M = \Sigma mP\cos.\beta, \quad \frac{d^2Z}{dt^2} M = \Sigma mP\cos.\gamma;$$

Digitized by Google

et celui des aires dans celles-ci :

$$\Sigma m\,\frac{y\,d^2z - z\,d^2y}{dt^2} = \Sigma mP\,(y\cos.\gamma - z\cos.\beta) = \Sigma mP_{,}\cos.\alpha_{,},$$

$$\Sigma m\,\frac{z\,d^2x - x\,d^2z}{dt^2} = \Sigma mP\,(z\cos.\alpha - x\cos.\gamma) = \Sigma mP_{,}\cos.\beta_{,};$$

$$\Sigma m\,\frac{x\,d^2y - y\,d^2x}{dt^2} = \Sigma mP\,(x\cos.\beta - y\cos.\alpha) = \Sigma mP_{,}\cos.\gamma_{,};$$

où l'on prend x, y, z, pour les coordonnées de la masse m; x', y', z', pour celles de m', &c.; $P_{,}$ pour le moment de la force P par rapport à l'origine, et $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$, pour les angles du plan de ce moment et des plans coordonnés yz, zx, xy; et des lettres semblables, mais accentuées pour les autres momens.

Dans les cas où les forces mP, $m'P'$, &c. seront telles que, transportées parallèlement à elles-mêmes et au même point de l'espace, elles se détruisent, les sommes $\Sigma mP\cos.\alpha$, $\Sigma mP\cos.\beta$, $\Sigma mP\cos.\gamma$, seront nulles, et l'on aura

$$0 = \frac{d^2X}{dt^2}M, \qquad 0 = \frac{d^2Y}{dt^2}M, \qquad 0 = \frac{d^2Z}{dt^2}M.$$

Ce cas aura lieu, si l'on a entre les forces motrices mP, $m'P'$, &c., et leurs directions respectives la relation

$$0 = \Sigma m^2P^2 + 2\Sigma mm'PP'\cos.\widehat{PP'},$$

laquelle équivaut aux trois conditions précédentes, selon ce que nous avons vu §. I. Alors, en intégrant une fois ces équations, il vient

$$\frac{dX}{dt}M = a, \qquad \frac{dY}{dt}M = b, \qquad \frac{dZ}{dt}M = c,$$

a, b, c étant trois constantes arbitraires. La vîtesse V du centre d'inertie égale

$$\sqrt{\left(\frac{dX^2}{dt^2} + \frac{dY^2}{dt^2} + \frac{dZ^2}{dt^2}\right)},$$

Digitized by Google

ainsi

$$MV = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)};$$

mais on a

$$a = M\frac{dX}{dt} = \Sigma m\frac{dx}{dt},\quad b = M\frac{dY}{dt} = \Sigma m\frac{dy}{dt},\quad c = M\frac{dZ}{dt} = \Sigma m\frac{dz}{dt};$$

et d'ailleurs, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, sont les composantes parallèles aux trois axes de la vîtesse v du point m; les sommes $\Sigma m\frac{dx}{dt}$, $\Sigma m\frac{dy}{dt}$, $\Sigma m\frac{dz}{dt}$, sont donc celles des composantes parallèles aux axes des quantités de mouvement mv, $m'v'$, $m''v''$, &c.; et il suit de ce que les quantités de mouvement se composent comme les pressions, qu'on aura

$$a^2 + b^2 + c^2 = \Sigma m^2 v^2 + 2\Sigma mm' vv' \cos.\widehat{vv'},$$

$\cos.\widehat{vv'}$ désignant à l'ordinaire le cosinus de l'angle que la direction de la vîtesse v fait avec celle de v'. On a ainsi pour la quantité de mouvement constante MV du centre de gravité du système

$$M^2 V^2 = \Sigma m^2 v^2 + 2\Sigma mm' vv' \cos.\widehat{vv'}.$$

Il est d'ailleurs visible que cette dernière équation a lieu dans tous les systèmes; ce qui particularise celui qui nous occupe, c'est l'invariabilité de son premier membre. En intégrant encore les valeurs de

$$M\frac{dX}{dt},\quad M\frac{dY}{dt},\quad M\frac{dZ}{dt},$$

on aura les équations

$$XM = at + a,\quad YM = bt + b,\quad ZM = ct + c,$$

a, b, c étant trois constantes arbitraires.

A l'égard des équations du principe des aires, elles se réduisent à

$$0 = \Sigma m\frac{yd^2z - zd^2y}{dt^2},\quad 0 = \Sigma m\frac{zd^2x - xd^2z}{dt^2},\quad 0 = \Sigma m\frac{xd^2y - yd^2x}{dt^2};$$

lorsque

Digitized by Google

lorsque

$$0 = \Sigma m P_{,} \cos.\alpha_{,}, \quad 0 = \Sigma m P_{,} \cos.\beta_{,}, \quad 0 = \Sigma m P_{,} \cos.\gamma_{,};$$

ce qui aura lieu si, entre les forces mP, $m'P'$, &c., ou plutôt entre leurs momens $mP_{,}$, $m'P_{,}'$, &c. relatifs à l'origine, il existe l'équation

$$0 = \Sigma m^{2} P_{,}^{2} + 2\Sigma mm' P_{,}P_{,}' \cos.\widehat{P_{,}P_{,}'}.$$

Cette équation sera satisfaite si, en concevant le système devenu solide et lié invariablement au point pris pour origine, les forces motrices mP, $m'P'$, $m''P''$, &c. sont capables de se faire équilibre entre elles, condition qui peut être remplie indépendamment de celle que nous venons d'indiquer pour l'invariabilité du mouvement du centre d'inertie. Alors les intégrales des équations ci-dessus sont

$$A = \Sigma m \frac{ydz - zdy}{dt}, \quad B = \Sigma m \frac{zdx - xdz}{dt}, \quad C = \Sigma m \frac{xdy - ydx}{dt};$$

A, B, C étant trois constantes arbitraires : mais, comme nous l'avons déjà dit, $m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$, &c., sont les composantes parallèles aux axes des coordonnées des quantités de mouvemens des masses m, m', &c. Les sommes précédentes sont donc les momens composans du moment principal résultant de tous ces mouvemens; d'où il suit que ce moment principal est constant, puisque la valeur de son carré est

$$A^{2} + B^{2} + C^{2}.$$

Si l'on désigne par $mv_{,}$, $m'v_{,}'$, $m''v_{,}''$, &c. les momens respectifs de ces mouvemens par rapport à l'origine des coordonnées, ce carré constant du moment résultant sera

$$\Sigma m v_{,}^{2} + 2\Sigma mm' v_{,}v_{,}' \cos.\widehat{v_{,}v_{,}'}.$$

On peut dire que c'est dans l'invariabilité de ce moment principal que

Digitized by Google

consiste le principe des aires; car la constance de la somme des projections des aires sur des plans fixes, vient de ce que chacune de ces sommes est égale au moment résultant multiplié par le cosinus de l'angle compris par son plan et le plan de projection. Le plan du moment résultant est justement celui dont M. *Laplace* a reconnu l'immobilité, et qu'il a désigné pour cette raison par *plan invariable.*

Ces deux principes des aires et du centre de gravité peuvent ainsi avoir lieu, l'un sans l'autre; mais lorsque dans un système, ils existent à-la-fois, c'est-à-dire, lorsqu'entre les forces accélératrices on a les deux relations

$$0 = \Sigma m^2 P^2 + 2\Sigma mm' PP' \cos.\widehat{PP'}, \quad 0 = \Sigma m^2 P_{,}^{2} + 2\Sigma mm' P_{,}P_{,}' \cos.\widehat{P_{,}P_{,}'};$$

les équations du principe des aires pourront être mises sous la forme

$$A = \Sigma\, mm' \frac{(y-y')(dz-dz') - (z-z')(dy-dy')}{dt},$$

$$B = \Sigma\, mm' \frac{(z-z')(dx-dx') - (x-x')(dz-dz')}{dt},$$

$$C = \Sigma\, mm' \frac{(x-x')(dy-dy') - (y-y')(dx-dx')}{dt},$$

A, B, C étant d'autres constantes dépendantes des précédentes, et l'origine étant un point quelconque qui peut être, si l'on veut, l'un des points m, m', &c. (Mém. de M. Laplace, *Journal de l'École polytechnique*, n.° 5, ou la *Mécanique céleste.*) Il est assez vraisemblable que, dans notre système planétaire, les principes de la conservation du mouvement du centre de gravité et des aires, ont lieu; parce qu'il suffit pour cela de supposer que les corps de ce système soient soumis à leur seule action mutuelle et réciproque. En admettant cette hypothèse, qui est celle des géomètres, imaginons l'origine des coordonnées de ces formules, placée au centre du soleil, comme l'a fait M. *Laplace.* Prenons m pour la masse de ce corps, m', m'', &c. pour celles des planètes, et négligeons comme très-petits les termes de ces sommes qui

Digitized by Google

ne sont pas multipliés par m; nous aurons

$$A = m\Sigma m' \frac{y'dz' - z'dy'}{dt}, \quad B = m\Sigma m' \frac{z'dx' - x'dz'}{dt}, \quad C = m\Sigma m' \frac{x'dy' - y'dx'}{dt};$$

les coordonnées x', y', z'; x'', y'', z'', &c. sont ici celles des planètes m', m'', &c. rapportées au centre du soleil pris pour origine; ainsi, en considérant leurs mouvemens comme ayant lieu dans les orbites elliptiques, dont les élémens changent en vertu de leurs variations périodiques et séculaires, les quantités

$$\frac{y'dz' - z'dy'}{dt}, \quad \frac{z'dx' - x'dz'}{dt}, \quad \&c.$$

se pourront exprimer en fonctions des élémens des orbites. Désignons, comme ci-dessus, les plans coordonnés yz, zx, xy, par $x'_{,}$, $y'_{,}$, $z'_{,}$; ceux des orbites, par m', m'', &c.; les inclinaisons de ces plans entre eux par $\widehat{m'x'_{,}}$, $\widehat{m'y'_{,}}$, &c., $\widehat{m'm''}$, &c.; employons, de plus, les dénominations de a', e', n' pour le demi-grand axe, l'excentricité, le moyen mouvement de l'orbite m', et ainsi pour les autres; tout cela convenu, les équations précédentes deviennent, d'après les formules connues,

$$A = m\,\Sigma\, m'.n'.a'^{2}\sqrt{(1-e'^{2})} \times \cos.\widehat{m'x'_{,}},$$

$$B = m\,\Sigma\, m'.n'.a'^{2}\sqrt{(1-e'^{2})} \times \cos.\widehat{m'y'_{,}},$$

$$C = m\,\Sigma\, m'.n'.a'^{2}\sqrt{(1-e'^{2})} \times \cos.\widehat{m'z'_{,}};$$

sous cette forme, elles ne diffèrent pas de celles dont M. *Laplace* s'est servi pour déterminer le plan invariable du système planétaire.

Désignons par T' le temps de la révolution de m' autour du soleil, on a

$$n'\,T' = 2\pi,$$

π étant le rapport de la circonférence; désignant enfin par E' l'aire de l'ellipse de m', ou bien $\pi a'^{2}\sqrt{(1-e'^{2})}$; on aura

Digitized by Google

$$\frac{A}{2m} = \Sigma \frac{m'}{T'} E' \cos. \widehat{E'x},$$

$$\frac{B}{2m} = \Sigma \frac{m'}{T'} E' \cos. \widehat{E'y},$$

$$\frac{C}{2m} = \Sigma \frac{m'}{T'} E' \cos. \widehat{E'z}.$$

La somme des carrés de ces équations donnera celle-ci,

$$\frac{A^2+B^2+C^2}{4m^2} = \Sigma \frac{m'^2}{T'^2} E'^2 + 2\Sigma \frac{m'}{T'} \cdot \frac{m''}{T''} E'E'' \cos. \widehat{E'E''},$$

en ne considérant dans cette équation que deux planètes, elle fournit, à quelque différence près, celle que M. *Poisson* a donnée n.° 15 du *Journal de l'École polytechnique*, et de laquelle il a déduit que les excentricités et l'inclinaison des orbites de deux planètes qui agissent l'une sur l'autre, resteront toujours très-petites, même en ayant égard au carré des forces perturbatrices. On voit bien, sans plus de détails, que la précédente expression est une de celles du carré de la somme des projections des aires que reçoit le plan invariable, laquelle entre dans tout ce qui concerne sa théorie. Par exemple, en prenant la lettre I pour désigner ce plan, l'angle qu'il forme avec l'orbite E' sera donné par l'équation

$$\cos. \widehat{IE'} = \frac{\frac{m'}{T'} E' + \frac{m''}{T''} E'' \cos. \widehat{E'E''} + \frac{m'''}{T'''} E''' \cos. \widehat{E'E'''} + \&c.}{\sqrt{\left(\Sigma \frac{m'^2}{T'^2} E'^2 + 2\Sigma \frac{m'}{T'} \cdot \frac{m''}{T''} E'E'' \cos. \widehat{E'E''}\right)}};$$

et connaissant les angles que le plan invariable forme à une époque avec deux des orbites, il est entièrement déterminé.

Digitized by Google

MÉMOIRE

SUR LES OSCILLATIONS DES LAMES ÉLASTIQUES;

PAR M. PLANA,

Ancien Élève de l'École polytechnique, et Professeur d'Astronomie à l'Université de Turin.

SUIVANT le principe reçu, que la force qui s'oppose à l'inflexion des lames élastiques agit en raison inverse du rayon osculateur, on est nécessairement conduit à une équation aux différences partielles du quatrième ordre, entre trois variables, lorsque l'on veut soumettre à l'analyse les petites oscillations transversales que ces lames exécutent autour de leur état d'équilibre. *Euler* a d'abord trouvé une intégrale particulière, sous forme finie, de cette équation, et en a fait le fondement de toutes les recherches qu'il a publiées sur ce sujet dans plusieurs mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg. En lisant ces mémoires, on voit qu'il a principalement eu pour but de donner des procédés simples de calcul pour déterminer les coefficiens arbitraires de l'intégrale particulière, de manière à pouvoir remplir les conditions relatives aux deux extrémités de la lame, dans les différens cas qui peuvent se présenter.

Il ne paraît pas que l'on puisse trouver, sous forme finie, l'intégrale générale de l'équation dont il s'agit, indépendamment du signe intégral; mais il n'est pas difficile d'obtenir cette intégrale développée en série ordonnée suivant les puissances ascendantes d'une des variables. Il y a cependant une remarque essentielle à faire sur ce développement, relativement au nombre des fonctions arbitraires. La série qui représente

Digitized by Google

la variable principale peut être ordonnée suivant les puissances de l'une ou de l'autre des deux variables dont elle dépend : or, il arrive ici qu'une de ces séries renferme deux fonctions arbitraires, tandis que l'autre série en renferme quatre; cette dernière n'est cependant pas plus générale que la première, car l'on démontre assez facilement que les quatre fonctions arbitraires qu'elle renferme sont toujours réductibles à deux seulement. De là il s'ensuit que l'équation du quatrième ordre, qui contient la loi des oscillations des lames élastiques, ne peut avoir que deux fonctions arbitraires dans son intégrale générale.

Cet abaissement dans le nombre des fonctions arbitraires n'est point une propriété particulière à l'équation qui nous occupe; l'illustre géomètre M. *Poisson* a fait voir dans un Mémoire imprimé dans le tom. VI de ce *Journal*, qu'il existe une classe d'équations aux différences partielles qui admettent une réduction semblable, et il a assigné les caractères généraux qui les distinguent.

Après avoir obtenu par les séries l'intégrale générale de notre équation, nous avons remarqué que l'on pouvait exprimer ce résultat sous forme finie, à l'aide des intégrales définies; et cela, d'après une élégante formule de *Parseval*, qui donne le moyen de sommer toute série résultante du produit, terme à terme, de deux autres séries dont on connaît la somme. Cette méthode introduit dans le calcul des imaginaires qui doivent, comme on le sait d'avance, s'entre-détruire; mais ce n'est qu'après des calculs assez pénibles que l'on parvient à les faire disparaître. L'espoir que nous avions de pouvoir découvrir quelque nouvelle propriété des vibrations des lames élastiques, indépendante de leur figure initiale, nous a engagés à exécuter tous les développemens nécessaires pour mettre l'intégrale sous forme réelle; mais nous regrettons de n'avoir rien aperçu dans ce résultat qui puisse sur ce point étendre nos connaissances. Indépendamment de cela, il n'est peut-être pas inutile aux progrès de l'analyse de faire connaître un résultat qui nous paraît assez simple, eu égard aux difficultés que la question présente.

Digitized by Google

Ce que nous avons dit jusqu'ici suppose que l'on fait abstraction de la pesanteur de la lame ; mais, si l'on veut y avoir égard, on verra que l'équation qui contient la loi des oscillations, toujours du quatrième ordre, peut encore être intégrée avec deux fonctions arbitraires, soit par les séries, soit d'une manière finie, par des intégrales définies.

Pour épargner aux lecteurs la peine de chercher ailleurs la démonstration des équations du mouvement des lames élastiques, nous avons fait précéder notre mémoire d'un article où ces équations se trouvent simplement démontrées, à l'aide des principes exposés dans la *Mécanique analytique*.

ARTICLE PREMIER.

Équations générales du Mouvement d'un Fil ou d'une Lame inextensible et élastique.

[1.] POUR simplifier la question, nous supposerons que la courbe formée à chaque instant par le fil en mouvement est à simple courbure.

Comme l'on doit ici exécuter deux différenciations différentes, dont l'une est relative au temps désigné par t, et l'autre au passage d'un point au point suivant de la courbe, en considérant le temps comme constant; nous conviendrons d'employer la caractéristique d pour les premières, et la caractéristique D pour les secondes. Les intégrations qui se rapportent au temps seront indiquées par le signe ordinaire $\int$, et celles qui se rapportent à la courbe seront indiquées par le signe $\mathcal{S}$.

[2.] Cela posé, soient x, y les coordonnées rectangulaires d'un élément quelconque de la lame dont la masse est représentée par Dm; nommons X, Y les forces accélératrices extérieures respectivement parallèles à ces coordonnées qui agissent sur la lame. Désignons par E la force de l'élasticité au point déterminé par les coordonnées x, y. L'effet de cette force intérieure étant de diminuer l'angle de contingence,

Digitized by Google

c'est-à-dire, l'angle formé par les deux côtés consécutifs de la courbe, l'on peut lui substituer par la pensée une force extérieure équivalente qui agirait perpendiculairement à la tangente à une distance égale à l'unité du point de contact. Il suit de là que si l'on nomme e l'angle de contingence, l'on aura $E\delta e$ pour le moment de la force due à l'élasticité; et $SE\delta e$ sera la somme des momens de toutes les forces d'élasticité qui agissent sur la longueur totale du fil.

La variation δe peut être aisément exprimée par les variations δx et δy des coordonnées x et y. En effet, soit Ds la longueur de l'élément Dm de la courbe, et R le rayon de courbure; il est facile de voir que l'on a en général,

$$e = \frac{Ds}{R};$$

mais, en prenant pour constant l'élément Ds, l'on a, comme on sait,

$$R = \frac{Ds^2}{\sqrt{[(D^2x)^2 + (D^2y)^2]}};$$

partant, nous aurons,

$$e = \frac{\sqrt{[(D^2x)^2 + (D^2y)^2]}}{Ds}.$$

Différenciant cette expression par rapport à la caractéristique δ, en y considérant Ds comme constante, à cause de l'inextensibilité du fil, il viendra

$$\delta e = \frac{D^2x.\delta D^2x + D^2y.\delta D^2y}{Ds.\sqrt{[(D^2x)^2 + (D^2y)^2]}};$$

et par conséquent,

$$SE\delta e = SID^2x.D^2\delta x + SID^2y.D^2\delta y,$$

en faisant, pour plus de simplicité,

$$I = \frac{E}{Ds.\sqrt{[(D^2x)^2 + (D^2y)^2]}}.$$

Maintenant

Digitized by Google

Maintenant, à l'aide du principe de l'intégration par parties, l'on trouvera que cette valeur de $SE\delta e$ peut être transformée dans la suivante,

$$SE\delta e = I''D^2x''D\delta x'' - D(I''D^2x'')\delta x'' - I'D^2x'D\delta x' + D(I'D^2x')\delta x' + SD^2(ID^2x)\delta x$$
$$+ I''D^2y''D\delta y'' - D(I''D^2y'')\delta y'' - I'D^2y'D\delta y' + D(I'D^2y')\delta y' + SD^2(ID^2y)\delta y,$$

où les lettres avec un seul accent appartiennent au premier point de la courbe, et celles avec un accent double, au dernier.

Pour exprimer la condition de l'inextensibilité du fil, l'on doit supposer $\delta Ds = 0$, ou, ce qui revient au même, l'on doit ajouter à l'équation fournie par le principe des vîtesses virtuelles, un terme de la forme $S\tau\delta Ds$, τ désignant une quantité arbitraire, et considérer ensuite comme indépendantes les variations δx et δy. Or, nous avons

$$Ds = \sqrt{[Dx^2 + Dy^2]},$$

partant, l'on aura

$$S\tau\delta Ds = S\tau\frac{Dx}{Ds}D\delta x + S\tau\frac{Dy}{Ds}D\delta y.$$

Intégrant par parties, et accentuant comme précédemment les quantités appartenantes aux deux extrémités du fil, il viendra

$$S\tau\delta Ds = \tau''\frac{Dx''}{Ds''}\delta x'' - \tau'\frac{Dx'}{Ds'}\delta x' - SD\left(\tau\frac{Dx}{Ds}\right)\delta x$$
$$+ \tau''\frac{Dy''}{Ds''}\delta y'' - \tau'\frac{Dy'}{Ds'}\delta y' - SD\left(\tau\frac{Dy}{Ds}\right)\delta y.$$

[3.] Le principe des vîtesses virtuelles nous donne l'équation

$$0 = S\left(\frac{d^2x}{dt^2} + X\right)Dm\,\delta x + S\left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right)Dm\,\delta y + S\tau\delta Ds + SE\delta e;$$

donc, en substituant pour $S\tau\delta Ds$, $SE\delta e$, les valeurs précédemment trouvées, et égalant séparément à zéro les coefficiens de δx et δy, l'on formera les trois équations suivantes, dont les deux premières appar-

Digitized by Google

tiennent à tous les points du fil, et la dernière à ses extrémités :

$$(I)\quad o = \left(\frac{d^2x}{dt^2} + X\right) Dm - D\left(\tau \frac{Dx}{Ds}\right) + D^2(ID^2x),$$

$$(II)\quad o = \left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right) Dm - D\left(\tau \frac{Dy}{Ds}\right) + D^2(ID^2y),$$

$$(III)\quad o = \left\{\tau'' \frac{Dx''}{Ds''} - D(I''D^2x'')\right\} \delta x'' + I''D^2x''D\delta x''$$
$$- \left\{\tau' \frac{Dx'}{Ds'} - D(I'D^2x')\right\} \delta x' - I'D^2x'D\delta x'$$
$$+ \left\{\tau'' \frac{Dy''}{Ds''} - D(I''D^2y'')\right\} \delta y'' + I''D^2y''D\delta y''$$
$$- \left\{\tau' \frac{Dy'}{Ds'} - D(I'D^2y')\right\} \delta y' - I'D^2y'D\delta y'.$$

Maintenant, l'intégration des équations (I) et (II) nous donne,

$$(IV)\quad \tau \frac{Dx}{Ds} - D(ID^2x) = A + S\left(\frac{d^2x}{dt^2} + X\right) Dm;$$

$$(V)\quad \tau \frac{Dy}{Ds} - D(ID^2y) = B + S\left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right) Dm;$$

A et B étant des constantes arbitraires.

En éliminant τ de ces deux équations, l'on obtient

$$DxD(ID^2y) - DyD(ID^2x) = ADy - BDx + DyS\left(\frac{d^2x}{dt^2} + X\right) Dm - DxS\left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right) Dm.$$

Cette équation est évidemment intégrable, ainsi l'on aura

$$(VI)\quad I(DxD^2y - DyD^2x) = C + Ay - Bx + SDyS\left(\frac{d^2x}{dt^2} + X\right) Dm - SDxS\left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right) Dm,$$

C désignant une constante arbitraire.

Le premier membre de cette équation, par la substitution de la valeur de I [n.° 2.], devient

Digitized by Google

$$\frac{E\,(Dx\,D^2y - Dy\,D^2x)}{Ds\sqrt{[(D^2x)^2 + (D^2y)^2]}};$$

mais, à cause de Ds constante, il résulte de l'équation

$$Ds^2 = Dx^2 + Dy^2$$

que l'on a

$$(Dx\,D^2x + Dy\,D^2y)^2 = 0;$$

l'on aura donc

$$Ds^2[(D^2x)^2+(D^2y)^2] = Dx^2(D^2y)^2+Dy^2(D^2x)^2 - 2Dx\,Dy\,D^2x\,D^2y,$$

ou bien

$$Ds^2\,[(D^2x)^2 + (D^2y)^2] = (Dx\,D^2y - Dy\,D^2x)^2;$$

et par conséquent,

$$\frac{E\,(Dx\,D^2y - Dy\,D^2x)}{Ds\sqrt{[(D^2x)^2 + (D^2y)^2]}} = E.$$

D'après cela, l'on pourra mettre l'équation (VI) sous cette forme plus simple,

$$\text{(VII)}\quad E = C + Ay - Bx + SDy\,S\left(\frac{d^2x}{dt^2} + X\right)Dm - SDx\,S\left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right)Dm.$$

[4.] En faisant commencer les intégrales au premier point de la courbe, et les terminant au dernier, les équations (IV) et (V) donnent

$$\tau'\frac{Dx'}{Ds'} - D(I'D^2x') = A, \quad \tau'\frac{Dy'}{Ds'} - D(I'D^2y') = B;$$

$$\tau''\frac{Dx''}{Ds''} - D(I''D^2x'') = A + S\left(\frac{d^2x}{dt^2} + X\right)Dm,$$

$$\tau''\frac{Dy''}{Ds''} - D(I''D^2y'') = B + S\left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right)Dm;$$

conséquemment, l'équation (III) deviendra

Digitized by Google

$$\text{(VIII)}\quad 0 = \delta x''\left\{A + S\left(\frac{d^2x}{dt^2} + X\right)Dm\right\} - A\delta x' + I''D^2x''D\delta x'' - I'D^2x'D\delta x'$$

$$+ \delta y''\left\{B + S\left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right)Dm\right\} - B\delta y' + I''D^2y''D\delta y'' - I'D^2y'D\delta y',$$

laquelle servira à déterminer, dans chaque cas particulier, les conditions qui doivent être satisfaites aux deux extrémités de la lame élastique, pour qu'elle puisse être vérifiée.

Excepté les cas où, par la nature du problème, les variations des coordonnées correspondantes aux deux extrémités de la courbe, rendront cette équation immédiatement satisfaite; l'on comprend que c'est elle qui déterminera les valeurs qui doivent être attribuées aux deux constantes arbitraires A et B.

En désignant par E' la valeur de E au premier point de la courbe, l'on aura, d'après l'équation (VII),

$$E' = C + Ay' - Bx';$$

ainsi l'on connaîtra par-là la valeur de C, après avoir déterminé celles de A et B.

[5.] S'il y avait des forces particulières appliquées aux deux extrémités de la courbe, il est aisé de voir que le seul changement qu'il y aurait à faire à l'analyse précédente, serait celui d'ajouter au second membre de l'équation (VIII) une expression de la forme

$$X'\delta x' + Y'\delta y' + X''\delta x'' + Y''\delta y'', \qquad (\alpha)$$

où X' et Y' représentent les forces appliquées à la première extrémité, et X'', Y'' les forces appliquées à l'autre extrémité.

[6.] On suppose communément que la force de l'élasticité qui s'oppose à l'inflexion du fil est réciproquement proportionnelle au rayon de courbure. Suivant cette hypothèse, l'on a

$$E = \frac{gK}{R},$$

Digitized by Google

où g représente à l'ordinaire la force accélératrice de la gravité, et K une quantité constante qui doit être donnée par l'expérience. Cela revient à dire que la force de l'élasticité est représentée par une masse pesante égale à $\frac{K}{R}$.

Il résulte de cette valeur de E, que l'on a

$$I = \frac{gK}{Ds^3},$$

et par conséquent;

$$I' = \frac{gK}{Ds'^3}, \qquad I'' = \frac{gK}{Ds''^3}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (VIII), et ajoutant en même temps l'expression (α), nous aurons dans le cas le plus général,

$$0 = \delta x'' \left\{ A + X'' + S\left(\frac{d^2x}{dt^2} + X\right) Dm \right\} + \delta y'' \left\{ B + Y'' + S\left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right) Dm \right\}$$
$$+ gK \left(\frac{D^2x'' D\delta x''}{Ds''^3} + \frac{D^2y'' D\delta y''}{Ds''^3} \right) - (A - X')\delta x' - (B - Y')\delta y'$$
$$- gK \left(\frac{D^2x' D\delta x'}{Ds'^3} + \frac{D^2y' D\delta y'}{Ds'^3} \right) \qquad (\beta)$$

pour l'équation relative aux limites de la courbe.

Lorsque la dernière extrémité de la lame est fixée de manière que sa tangente conserve toujours la même position pendant le mouvement, l'on a non-seulement

$$\delta x'' = 0; \qquad \delta y'' = 0,$$

mais aussi

$$D\delta x'' = 0, \qquad D\delta y'' = 0.$$

Il faudra donc pour que l'équation (β) soit satisfaite, en supposant libre la première extrémité, que l'on ait

$$A = X', \quad B = Y', \quad D^2x' = 0, \quad D^2y' = 0.$$

Digitized by Google

[7.] Lorsque l'on considère les vibrations très-petites d'une lame élastique et inextensible, on peut, sans erreur sensible, adopter deux hypothèses qui apportent une grande simplification dans les équations générales que nous venons de trouver. La première de ces hypothèses consiste à considérer comme invariables, pendant le mouvement, les abscisses x comptées dans le sens de la longueur de la courbe; de sorte que l'on a pour tous les points de la lame vibrante, $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$. La seconde hypothèse consiste à supposer l'abscisse x égale à l'arc s, ce qui est sensiblement vrai, en observant que, si l'on désigne par φ l'angle formé par la tangente avec l'axe des x, l'on a rigoureusement, $Dx = Ds\cos.\varphi$, et par approximation $Dx = Ds$, vu la petitesse de l'angle φ. Il suit de là que l'on a

$$R = \frac{Ds^2}{D^2y} = \frac{Dx^2}{D^2y},$$

et par conséquent,

$$E = gK\frac{D^2y}{Dx^2}.$$

Si l'on suppose en outre la lame de matière homogène, l'on aura

$$Dm = \frac{m.DS}{l} = \frac{m.Dx}{l},$$

m désignant la masse totale de la lame, et l sa longueur. L'équation (VII) devient, d'après cela,

$$gK\frac{D^2y}{Dx^2} = \frac{m}{l}SDy\,SXDx - \frac{m}{l}SDx\,S\left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right)Dx + Ay - Bx + C.$$

Cette équation, différenciée deux fois successivement, donne

$$gK\frac{D^3y}{Dx^3} = \frac{m}{l}\frac{Dy}{Dx}SXDx - \frac{m}{l}S\left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right)Dx + A\frac{Dy}{Dx} - B;$$

$$gK\frac{D^4y}{Dx^4} = \frac{m}{l}\frac{Dy}{Dx}X - \frac{m}{l}\left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right) + A\frac{D^2y}{Dx^2} + \frac{m}{l}\frac{D^2y}{Dx^2}SXDx.$$

Digitized by Google

La valeur de y qui satisfait à ces équations, doit être une fonction des deux variables x, t. Les différentielles de y, affectées de la caractéristique D, désignent les différences partielles de cette fonction, prises par rapport à x; nous pouvons donc abandonner ici cette caractéristique, et appliquer à toutes les différentielles le signe ordinaire d, puisque le diviseur dx ou dt suffit pour indiquer par rapport à laquelle des deux variables x, t, doivent être exécutées les différenciations. Les trois équations précédentes peuvent, en conséquence, être mises sous la forme suivante :

$$(1)\quad a^2\frac{d^2y}{dx^2} = Sdy\,SXdx - Sdx\,S\left(\frac{d^2y}{dt^2}+Y\right)dx + A\frac{l}{m}y - B\frac{l}{m}x + C\frac{l}{m},$$

$$(2)\quad a^2\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dy}{dx}SXdx - S\left(\frac{d^2y}{dt^2}+Y\right)dx + A\frac{l}{m}\frac{dy}{dx} - B\frac{l}{m},$$

$$(3)\quad a^2\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{dy}{dx}\cdot X - \left(\frac{d^2y}{dt^2}+Y\right) + A\frac{l}{m}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2y}{dx^2}SXdx,$$

où l'on a fait $a^2 = \frac{gKl}{m}$.

En faisant dans l'équation (β)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad D^2x' = 0, \quad D^2x'' = 0;$$

et changeant D en d, l'on obtiendra

$$(4)\quad 0 = \delta x''\left(A + X'' + \frac{m}{l}SXdx\right) + \delta y''\left[B + Y'' + \frac{m}{l}S\left(\frac{d^2y}{dt^2}+Y\right)dx\right]$$
$$- (A - X')\delta x' - (B - Y')\delta y' + gK\left(\frac{d^2y''\,d\delta y''}{dx''^3} - \frac{d^2y'\,d\delta y'}{dx'^3}\right).$$

Les équations (1), (2), (3), (4) renferment toute la théorie des vibrations très-petites d'une lame inextensible et élastique. Les trois premières sont, à la vérité, la conséquence d'une seule; mais il devient nécessaire de les avoir sous les yeux toutes les trois, lorsqu'après avoir déterminé la valeur de y, il est question de fixer la valeur des constantes arbitraires.

Digitized by Google

Nous allons maintenant nous occuper de l'intégration de l'équation (3), dans quelques cas particuliers.

ARTICLE DEUX.

Intégration de l'Équation du Mouvement d'une Lame élastique considérée comme non pesante.

[8.] En faisant $X=0$, $Y=0$, l'équation (3) trouvée dans le n.° 7 du premier article, devient

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a^2\frac{d^4y}{dx^4} = A\frac{l}{m}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}. \qquad (\gamma)$$

En supposant libre la première extrémité de la lame, l'équation (4), posée dans le même numéro, exige que l'on ait

$$A = X', \quad B = Y',$$

afin que cette équation puisse subsister indépendamment d'aucune valeur particulière des variations $\delta x'$ et $\delta y'$. Or, nous avons dit dans l'article précédent, que X', Y' représentent les composantes de la force appliquée à la première extrémité de la lame : l'on aura donc $A=0$ toutes les fois que la composante de cette force parallèle à l'axe des x sera nulle.

Dans ce cas, qui est le plus simple, l'équation (γ) se réduit à

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a^2\frac{d^4y}{dx^2} = 0. \qquad (\delta)$$

[9.] Pour intégrer cette équation par les séries, nous ferons

$$y = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + Et^4 + Ft^5 + \&c.,$$

A, B, C, D, &c. étant des fonctions de x sans t. Cette valeur de y donne

$\frac{d^2y}{dt^2}$

Digitized by Google

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 1.2C + 2.3Dt + 3.4Et^2 + 4.5Ft^3 + \&c.;$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^4A}{dx^4} + \frac{d^4B}{dx^4}\,t + \frac{d^4C}{dx^4}\,t^2 + \frac{d^4D}{dx^4}\,t^3 + \&c.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (♌), l'on aura pour déterminer les coefficiens A, B, C, D, E, F, &c. les équations suivantes,

$$1.2\,C + a^2\frac{d^4A}{dx^4} = 0,$$

$$2.3\,D + a^2\frac{d^4B}{dx^4} = 0,$$

$$3.4\,E + a^2\frac{d^4C}{dx^4} = 0,$$

$$4.5\,F + a^2\frac{d^4D}{dx^4} = 0,$$

$$\&c.;$$

Il suit de là que, si l'on prend arbitrairement

$$A = F(x), \qquad B = \Psi(x),$$

l'on aura

$$(\varepsilon) \qquad y = F - \frac{d^4F}{dx^4}\frac{a^2t^2}{1.2} + \frac{d^8F}{dx^8}\frac{a^4t^4}{1.2.3.4} - \&c.$$

$$+ \Psi.t - \frac{d^4\Psi}{dx^4}\frac{a^2t^3}{1.2.3} + \frac{d^8\Psi}{dx^8}\frac{a^4t^5}{1.2.3.4.5} - \&c.;$$

en écrivant, pour plus de simplicité, F, Ψ, à la place de $F(x)$, $\Psi(x)$.

Cette valeur de y, quoique renfermant deux fonctions arbitraires seulement, n'en est pas moins l'intégrale complète de l'équation (♌) du quatrième ordre. A la vérité, si l'on supposait la valeur de y développée suivant les puissances ascendantes de x, l'on trouverait que ce développement contient quatre fonctions arbitraires; mais il n'est pas difficile de prouver que le développement ainsi formé est réductible à une série

Digitized by Google

renfe mant seulement deux fonctions arbitraires, et semblable à la précédente.

[10.] Soit, en effet,

$$y = P + Q\frac{x}{a} + R\frac{x^2}{a^2} + S\frac{x^3}{a^3} + P'\frac{x^4}{a^4} + Q'\frac{x^5}{a^5} + R'\frac{x^6}{a^6} + S'\frac{x^7}{a^7} + P''\frac{x^8}{a^8} + Q''\frac{x^9}{a^9} + R''\frac{x^{10}}{a^{10}} + S''\frac{x^{11}}{a^{11}} + \&c.,$$

P, Q, R, S, &c. désignant des fonctions de la variable t. Tirant de cette valeur de y celles de $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, et les substituant dans l'équation (δ), l'on formera les équations qui déterminent les coefficiens P', Q', R', S', &c. en fonctions des coefficiens P, Q, R, S, lesquels restent arbitraires; de sorte que l'on obtiendra pour y l'expression suivante,

$$y = P - \frac{d^2P}{dt^2}\frac{x^2}{1.2.3.4.a^2} + \frac{d^4P}{dt^4}\frac{x^8}{1.2.3...8.a^8} - \frac{d^6P}{dt^6}\frac{x^{12}}{1.2.3...12.a^{12}} + \&c.$$

$$+ Q\frac{x}{a} - \frac{d^2Q}{dt^2}\frac{x^5}{2.3.4.5.a^5} + \frac{d^4Q}{dt^4}\frac{x^9}{2.3.4...9.a^9} - \frac{d^6Q}{dt^6}\frac{x^{13}}{2.3.4...13.a^{13}} + \&c.$$

$$+ R\frac{x^2}{a^2} - \frac{d^2R}{dt^2}\frac{x^6}{3.4.5.6.a^6} + \frac{d^4R}{dt^4}\frac{x^{10}}{3.4.5...10.a^{10}} - \frac{d^6R}{dt^6}\frac{x^{14}}{3.4.5...14.a^{14}} + \&c.$$

$$+ S\frac{x^3}{a^3} - \frac{d^2S}{dt^2}\frac{x^7}{4.5.6.7.a^7} + \frac{d^4S}{dt^4}\frac{x^{11}}{4.5.6...11.a^{11}} - \frac{d^6S}{dt^6}\frac{x^{15}}{4.5.6...15.a^{15}} + \&c.$$

Maintenant, supposons les fonctions P, Q, R, S, développées suivant les puissances ascendantes de t, et soit

$$P = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + Et^4 + Ft^5 + Gt^6 + Ht^7 + \&c.,$$

$$Q = A' + B't + C't^2 + D't^3 + E't^4 + F't^5 + G't^6 + H't^7 + \&c.,$$

$$R = A'' + B''t + C''t^2 + D''t^3 + E''t^4 + F''t^5 + G''t^6 + H''t^7 + \&c.,$$

$$S = A''' + B'''t + C'''t^2 + D'''t^3 + E'''t^4 + F'''t^5 + G'''t^6 + H'''t^7 + \&c.,$$

Digitized by Google

nous aurons

$$P - \frac{d^2P}{dt^2}\frac{x^4}{1.2.3.4.a^4} + \&c. = A - \frac{1.2.C.x^4}{1.2.3.4.a^4} + \frac{1.2.3.4.E.x^8}{1.2.3\ldots8.a^8} - \&c.$$
$$+ t\left(B - \frac{2.3.D.x^4}{1.2.3.4.a^4} + \frac{2.3.4.5.F.x^8}{1.2.3\ldots8.a^8} - \&c.\right)$$
$$+ t^2\left(C - \frac{3.4.E.x^4}{1.2.3.4.a^4} + \frac{3.4.5.6.G.x^8}{1.2.3\ldots8.a^8} - \&c.\right)$$
$$+ t^3\left(D - \frac{4.5.F.x^4}{1.2.3.4.a^4} + \frac{4.5.6.7.H.x^8}{1.2.3\ldots8.a^8} - \&c.\right)$$
$$+ \&c.\ ;$$

$$Q\frac{x}{a} - \frac{d^2Q}{dt^2}\frac{x^5}{2.3.4.5.a^5} + \&c. = A'\frac{x}{a} - \frac{1.2.C'.x^5}{2.3.4.5.a^5} + \frac{1.2.3.4.E'.x^9}{2.3.4\ldots9.a^9} - \&c.$$
$$+ t\left(B'\frac{x}{a} - \frac{2.3.D'.x^5}{2.3.4.5.a^5} + \frac{2.3.4.5.F'.x^9}{2.3.4\ldots9.a^9} - \&c.\right)$$
$$+ t^2\left(C'\frac{x}{a} - \frac{3.4.E'.x^5}{2.3.4.5.a^5} + \frac{3.4.5.6.G'.x^9}{2.3.4\ldots9.a^9} - \&c.\right)$$
$$+ t^3\left(D'\frac{x}{a} - \frac{4.5.F'.x^5}{2.3.4.5.a^5} + \frac{4.5.6.7.H'.x^9}{2.3.4\ldots9.a^9} - \&c.\right)$$
$$+ \&c.\ ;$$

$$R\frac{x^2}{a^2} - \frac{d^2R}{dt^2}\frac{x^6}{3.4.5.6.a^6} + \&c. = A''\frac{x^2}{a^2} - \frac{1.2.C''.x^6}{3.4.5.6.a^6} + \frac{1.2.3.4.E''.x^{10}}{3.4.5\ldots10.a^{10}} - \&c.$$
$$+ t\left(B''\frac{x^2}{a^2} - \frac{2.3.D''.x^6}{3.4.5.6.a^6} + \frac{2.3.4.5.F''.x^{10}}{3.4.5\ldots10.a^{10}} - \&c.\right)$$
$$+ t^2\left(C''\frac{x^2}{a^2} - \frac{3.4.E''.x^6}{3.4.5.6.a^6} + \frac{3.4.5.6.G''.x^{10}}{3.4.5\ldots10.a^{10}} - \&c.\right)$$
$$+ t^3\left(D''\frac{x^2}{a^2} - \frac{4.5.F''.x^6}{3.4.5.6.a^6} + \frac{4.5.6.7.H''.x^{10}}{3.4.5\ldots10.a^{10}} - \&c.\right)$$
$$+ \&c.\ ;$$

Digitized by Google

$$S\frac{x^3}{a^3}-\frac{d^2S}{dt^2}\frac{x^7}{4.5.6.7.a^7}+\&c.=A'''\frac{x^3}{a^3}-\frac{1.2.C'''.x^7}{4.5.6.7.a^7}+\frac{1.2.3.4.E'''.x^{11}}{4.5.6\ldots11.a^{11}}-\&c.$$
$$+t\left(B'''\frac{x^3}{a^3}-\frac{2.3.D'''.x^7}{4.5.6.7.a^7}+\frac{2.3.4.5.F'''.x^{11}}{4.5.6\ldots11.a^{11}}-\&c.\right)$$
$$+t^2\left(C'''\frac{x^3}{a^3}-\frac{3.4.E'''.x^7}{4.5.6.7.a^7}+\frac{3.4.5.6.G'''.x^{11}}{4.5.6\ldots11.a^{11}}-\&c.\right)$$
$$+t^3\left(D'''\frac{x^3}{a^3}-\frac{4.5.F'''.x^7}{4.5.6.7.a^7}+\frac{4.5.6.7.H'''.x^{11}}{4.5.6\ldots11.a^{11}}-\&c.\right)$$
$$+\&c.;$$

partant, si l'on pose

$$F(x)=A+A'\frac{x}{a}+A''\frac{x^2}{a^2}+A'''\frac{x^3}{a^3}-\frac{1.2.C.x^4}{1.2.3.4.a^4}-\frac{1.2.C'.x^5}{2.3.4.5.a^5}-\frac{1.2.C''.x^6}{3.4.5.6.a^6}-\frac{1.2.C'''.x^7}{4.5.6.7.a^7}$$
$$+\frac{1.2.3.4.E.x^8}{1.2.3\ldots8.a^8}+\frac{1.2.3.4.E'.x^9}{2.3.4\ldots9.a^9}+\frac{1.2.3.4.E''.x^{10}}{3.4.5\ldots10.a^{10}}+\frac{1.2.3.4.E'''.x^{11}}{4.5.6\ldots11.a^{11}}-\&c.,$$

$$\Psi(x)=B+B'\frac{x}{a}+B''\frac{x^2}{a^2}+B'''\frac{x^3}{a^3}-\frac{2.3.D.x^4}{1.2.3.4.a^4}-\frac{2.3.D'.x^5}{2.3.4.5.a^5}-\frac{2.3.D''.x^6}{3.4.5.6.a^6}-\frac{2.3\,D'''.x^7}{4.5.6.7.a^7}$$
$$+\frac{2.3.4.5.F.x^8}{1.2.3.4\ldots8.a^8}+\frac{2.3.4.5.F'.x^9}{2.3.4\ldots9.a^9}+\frac{2.3.4.5.F''.x^{10}}{3.4.5\ldots10.a^{10}}+\frac{2.3.4.5.F'''.x^{11}}{4.5.6\ldots11.a^{11}}-\&c.,$$

l'on verra sans difficulté que la valeur précédente de y peut être mise sous cette forme,

$$y=F(x)+\Psi(x)\,t-\frac{d^4F(x)}{dx^4}\frac{a^4t^2}{1.2}-\frac{d^4\Psi(x)}{dx^4}\frac{a^4t^3}{2.3}+\&c.$$

Or, rien n'empêche de supposer arbitraires les deux fonctions de x représentées par $F(x)$ et $\Psi(x)$; ainsi l'on voit que cette valeur de y est entièrement semblable à celle que l'on avait d'abord obtenue dans le n.° 9.

L'illustre géomètre M. *Poisson* a fait connaître dans le *Journal de l'École polytechnique* (tome VI, pag. 107 et suiv.), les caractères généraux qui distinguent les équations aux différences partielles qui admettent une

Digitized by Google

réduction dans le nombre de leurs fonctions arbitraires, et c'est d'après lui que nous avons reconnu cette propriété remarquable de l'équation (δ).

[11.] La valeur de y en série conduit à une intégrale particulière de l'équation (δ), exprimée sous forme finie, qui mérite d'être remarquée par sa simplicité. Prenons

$$F(x) = Mf(x), \qquad \Upsilon(x) = M'f(x),$$

M, M' désignant deux constantes arbitraires. Cela posé, déterminons $f(x)$ de manière que l'on ait

$$\frac{d^4 f(x)}{dx^4} = pf(x),$$

p exprimant une quantité constante prise arbitrairement.

D'après cela, l'équation (ε) deviendra

$$y = Mf(x).\left(1 - \frac{p a^2 t^2}{1.2} + \frac{p^2 a^4 t^4}{1.2.3.4} - \&c.\right)$$
$$+ M'f(x).\left(t - \frac{p a^2 t^3}{1.2.3} + \frac{p^2 a^4 t^5}{1.2.3.4.5} - \&c.\right);$$

d'où l'on conclut,

$$y = Mf(x).\cos. at\sqrt{p} + \frac{M'}{a\sqrt{(p)}} f(x).\sin. at\sqrt{p};$$

et en faisant

$$M = N\sin.\zeta, \qquad M' = Na\sqrt{(p)}.\cos.\zeta,$$

l'on aura

$$y = N.f(x).\sin.[\zeta + at\sqrt{p}].$$

La recherche de la valeur de $f(x)$, d'après l'équation

$$\frac{d^4 f(x)}{dx^4} = pf(x),$$

Digitized by Google

n'est sujette à aucune difficulté. En intégrant cette équation par les méthodes connues, l'on obtiendra

$$f(x) = \alpha e^{x\sqrt[4]{p}} + \beta e^{-x\sqrt[4]{p}} + \gamma \sin. x\sqrt[4]{p} + \delta \cos. x\sqrt[4]{p},$$

α, β, γ, δ désignant quatre constantes arbitraires, et la lettre e la base des logarithmes hyperboliques.

L'on a donc

$$(\varepsilon') \qquad y = N \sin. [\zeta + at\sqrt{p}] . \left\{ \begin{matrix} \gamma \sin. x\sqrt[4]{p} + \delta \cos. x\sqrt[4]{p} \\ + \alpha e^{x\sqrt[4]{p}} \qquad + \beta e^{-x\sqrt[4]{p}} \end{matrix} \right\},$$

où N et ζ sont aussi deux constantes arbitraires.

Telle est la solution de l'équation (δ) qui a servi de base à presque toutes les recherches qu'*Euler* a imprimées dans plusieurs mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg, sur les vibrations des lames élastiques. Cette solution donnant

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = - a^2 p y,$$

il en résulte que les vibrations de la lame sont synchrones à celles d'un pendule simple d'une longueur égale à

$$\frac{g}{p a^2} = \frac{m}{p K l},$$

en substituant pour a^2 sa valeur [n.° 7.]. En partant immédiatement de cette propriété, l'on serait parvenu à la même valeur de y, et c'est effectivement ainsi qu'*Euler* paraît l'avoir d'abord trouvée.

Au reste, l'on pourrait encore trouver cette solution de la manière suivante. Faisons $y = T\varphi(x)$, T désignant une fonction de t sans x; cela nous donne

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \varphi(x) \frac{d^2 T}{dt^2}, \qquad \frac{d^4 y}{dx^4} = T \frac{d^4 \varphi(x)}{dx^4};$$

donc l'équation (δ) deviendra

Digitized by Google

$$0 = \varphi(x)\,\frac{d^2 T}{dt^2} + a^2 T\,\frac{d^4 \varphi(x)}{dx^4}.$$

Or, il est évident que cette équation sera satisfaite, si l'on détermine T et $\varphi(x)$ de manière que l'on ait

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = -p a^2 T,$$

$$\frac{d^4 \varphi(x)}{dx^4} = p\varphi(x).$$

La première de ces équations étant intégrée, donne

$$T = N.\sin.[\zeta + at\sqrt{p}],$$

N et ζ désignant deux constantes arbitraires; la seconde est satisfaite, en prenant $\varphi(x) = f(x)$: ainsi cette solution fournit pour y une valeur qui coïncide avec celle donnée par l'équation (ε'). L'on voit en même temps par cette analyse que cette solution particulière de l'équation (δ) est la seule qui puisse avoir lieu, en supposant la valeur de y formée du produit de deux fonctions, l'une de x et l'autre de t.

[12.] En faisant $\alpha = 0$, $\beta = 0$, l'équation (ε') donne

$$y = N \sin.[\zeta + at\sqrt{p}].[\gamma \sin.x\sqrt[4]{p} + \delta \cos.x\sqrt[4]{p}].$$

Cette expression peut être considérée comme une fonction périodique de

$$x\sqrt[4]{p} + at\sqrt{p} \quad \text{et} \quad x\sqrt[4]{p} - at\sqrt{p}.$$

L'on pourrait douter s'il y a pour y une expression plus générale que celle-ci, dans laquelle les variables x et t se trouvent combinées d'une manière analogue; mais il est fort aisé de lever ce doute. En effet, supposons

$$y = \varphi(fx + ht);$$

en faisant $fx + ht = u$, l'on aura

Digitized by Google

$$\frac{d^2y}{dt^2} = h^2\frac{d^2\varphi(u)}{du^2}, \qquad \frac{d^4y}{dx^4} = f^4\frac{d^4\varphi(u)}{du^4};$$

partant, l'équation (♌) deviendra

$$h^2\frac{d^2\varphi(u)}{du^2} + a^2f^4\frac{d^4\varphi(u)}{du^4} = 0;$$

d'où l'on tire par une double intégration,

$$h^2\Phi(u) + a^2f^4\frac{d^2\varphi(u)}{du^2} = A + Bu;$$

A et B étant deux constantes arbitraires. En posant $q^2 = \frac{h^2}{a^2f^4}$; et changeant les constantes arbitraires, l'on aura l'équation

$$\frac{d^2\varphi(u)}{du^2} + q^2\Phi(u) = C + Du,$$

laquelle étant intégrée, donne

$$\Phi(u) = c'e^{qu\sqrt{(-1)}} + c''e^{-qu\sqrt{(-1)}} + \frac{\sin.qu}{q}\int(C+Du)\cos.qu.du - \frac{\cos.qu}{q}\int(C+Du)\sin.qu.du,$$

ou bien

$$\Phi(u) = \frac{C}{q^2} + \frac{Du}{q^2} + c'e^{qu\sqrt{(-1)}} + c''e^{-qu\sqrt{(-1)}};$$

et en changeant les constantes arbitraires, l'on aura

$$\Phi(u) = i\cos.qu + i'\sin.qu + i''u + i'''.$$

Il suit de là que l'on a

$$y = i''' + i''(fx+ht) + i'\sin.q(fx+ht) + i\cos.q(fx+ht),$$

et

$$y = i_1''' + i_1''(fx-ht) + i_1'\sin.q(fx-ht) + i_1\cos.q(fx-ht),$$

à

Digitized by Google

à cause qu'ayant $q^2 = \frac{h^2}{a^2 f^4}$, l'on peut changer à volonté les signes de h et de f.

La somme de ces deux valeurs de y donne, pour satisfaire à l'équation (δ), une expression de la forme

$$y = \Phi(fx + ht) + \downarrow(fx - ht),$$

laquelle est un peu plus générale que celle qui résulte de l'équation

$$(\varepsilon'') \qquad y = N \sin.[\zeta + at\sqrt{p}].\left\{\gamma \sin.x\sqrt[4]{p} + \delta \cos.x\sqrt[4]{p}\right\}.$$

L'on voit par-là la différence extrême qu'il y a entre le problème qui nous occupe et le problème ordinaire des cordes vibrantes. Ce dernier, quel que soit l'état initial de la corde, est toujours résolu par une fonction de la forme

$$\Phi(fx + ht) + \downarrow(fx - ht),$$

tandis qu'il n'y a que certains cas particuliers de l'état initial d'une lame élastique vibrante qui admettent une solution semblable. C'est sans doute à l'impossibilité de pouvoir généralement exprimer la valeur de y par des fonctions de deux variables, dont chacune soit réductible à une fonction d'une seule variable, que tient en grande partie la difficulté de l'intégration de l'équation (δ) par les méthodes ordinaires.

[13.] Pour donner un exemple des cas où une lame élastique peut avoir un mouvement de vibration conforme à celui des cordes parfaitement flexibles, considérons le cas où la lame est fixée à ses deux extrémités, de telle sorte que les tangentes n'y conservent pas une position invariable. Alors l'on aura

$$\delta x' = 0, \quad \delta y' = 0, \quad \delta x'' = 0, \quad \delta y'' = 0;$$

conséquemment l'équation (4), trouvée au n.° 7, se réduira à

$$\frac{d^2 y'' \, d\delta y''}{dx''^3} - \frac{d^2 y' \, d\delta y'}{dx'^3} = 0 :$$

Digitized by Google

Il faudra donc, pour qu'elle soit satisfaite, que l'on ait

$$\frac{d^2 y'}{dx'^2} = 0, \quad \frac{d^2 y''}{dx''^2} = 0;$$

puisque la variabilité de position des tangentes aux deux extrémités de la courbe ne permet pas de faire en même temps,

$$d\Delta y' = 0, \quad d\Delta y'' = 0.$$

Outre ces deux conditions, il est nécessaire que la valeur de y devienne nulle, en y faisant

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = l.$$

Or, il est facile de prouver que la valeur de y donnée par l'équation (ϵ'') remplira à-la-fois ces quatre conditions, en prenant

$$\Delta = 0 \quad \text{et} \quad \gamma . \sin. l\sqrt[4]{p} = 0.$$

Comme on ne doit pas satisfaire à la seconde de ces deux équations, en faisant $\gamma = 0$, nous poserons $l\sqrt[4]{p} = i\pi$, i étant un nombre entier quelconque, et π l'arc de 180°.

Il suit de là que nous aurons

$$y = N \sin. \left(\zeta + \frac{a i^2 \pi^2}{l^2} t\right) . \sin. \frac{i \pi x}{l}.$$

Faisant successivement $i = 1$, $i = 2$, $i = 3$, &c., et changeant pour chacune de ces valeurs la constante arbitraire N, l'on formera pour y une expression composée d'un nombre indéfini de termes semblables au précédent.

Cette expression jouit de la propriété remarquable que la valeur de y reprend au bout du temps $t + \frac{2l^2}{a\pi}$ la même valeur qu'elle avait au bout du temps t; ainsi, en désignant par T le temps d'une vibration, l'on aura $T = \frac{2l^2}{a\pi}$, ou bien

$$T = \frac{2l\sqrt{(l)}}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{(m)}}{\sqrt{(gK)}},$$

en substituant pour a sa valeur.

Digitized by Google

Pour une corde vibrante ordinaire de même masse m et de même longueur l, l'on a, comme on sait,

$$T' = 2 \cdot \sqrt{(l)} \cdot \frac{\sqrt{(m)}}{\sqrt{(gF)}},$$

T' étant le temps d'une vibration, et gF le poids qui tend la corde. A l'aide de ces deux formules, l'on pourra comparer les sons rendus par des cordes et des lames élastiques de même masse et de même longueur, toutes les fois que la figure initiale de la lame sera un mélange de deux ou plusieurs trochoïdes alongées. Lorsque la figure initiale de la lame sera une trochoïde simple anguiforme, en nommant i le nombre des points dans lesquels elle coupe l'axe, l'on aura pour le temps d'une vibration entière,

$$T = \frac{2l\sqrt{(l)}}{i^2\pi} \cdot \frac{\sqrt{(m)}}{\sqrt{(gK)}}.$$

Il est clair, en effet, qu'ayant dans ce cas,

$$y = N \sin.\left(\zeta + \frac{a i^2 \pi^2}{l^2} t\right) . \sin. \frac{i\pi x}{l},$$

il suffit d'augmenter le temps d'une quantité égale à $\frac{2l^2}{i^2 a \pi}$ pour que la valeur de y redevienne la même.

L'on sait qu'en pareil cas, la durée des vibrations des cordes ordinaires est diminuée dans le rapport de $1 : i$, tandis que pour les lames élastiques le rapport de cette diminution est celui de $1 : i^2$.

Il est bon de remarquer qu'en supposant toujours fixes les deux extrémités de la lame, et en même temps invariable, la position d'une seule ou des deux tangentes extrêmes, l'on ne pourra pas remplir les conditions du problème par une valeur de y comprise dans la formule (ε''); car cette expression ne peut devenir nulle aux deux extrémités de la courbe, sans faire

$$\int = 0 \quad \text{et} \quad \sqrt[4]{p} = -\frac{i\pi}{l},$$

Digitized by Google

ce qui la réduit à

$$y = N \sin.\left(\zeta + \frac{a i^2 \pi^2}{l^2} t\right).\sin.\frac{i\pi x}{l}.$$

Or cette valeur de y ne saurait donner, ainsi que cela est nécessaire, $\frac{dy}{dx} = 0$ pour l'extrémité, où la position de la tangente est fixe. Il faudra donc, dans les cas pareils, recourir à la valeur de y donnée par l'équation (ε'). Toujours l'on trouvera pour y une expression composée d'un nombre indéfini de termes semblables; mais, dans tous ces termes, les différens coefficiens du temps t seront incommensurables entre eux: de sorte que, lorsqu'il y aura plus d'un terme, la lame vibrante ne pourra jamais reprendre sa figure primitive.

[14.] Reprenons maintenant la valeur générale de y donnée par l'équation (ε) [n.° 9.], et occupons-nous de sommer les deux séries qu'elle renferme, quelles que soient les fonctions arbitraires $F(x)$ et $\Psi(x)$. Cette sommation présente peut-être des difficultés insurmontables par les moyens ordinaires; mais nous allons montrer que l'on peut toujours y parvenir à l'aide des *intégrales définies*.

Remarquons, en premier lieu, que si l'on pose

$$T = \Psi.t - \frac{d^4\Psi}{dx^4}\frac{a^2t^3}{1.2.3} + \frac{d^8\Psi}{dx^8}\frac{a^4t^5}{1.2.3.4.5} - \&c.,$$

l'on aura

$$\left[\frac{dT}{dt}\right] = F - \frac{d^4F}{dx^4}\frac{a^2t^2}{1.2} + \frac{d^8F}{dx^8}\frac{a^4t^4}{1.2.3.4} - \&c.,$$

en indiquant par $\left[\frac{dT}{dt}\right]$ ce que devient la valeur de $\frac{dT}{dt}$ par le changement de Ψ en F. Il suffira donc d'avoir la valeur finie de T pour en conclure celle de la série représentée par $\left[\frac{dT}{dt}\right]$.

Digitized by Google

[15.] Soit

$$X = \Psi.u - \frac{d^4\Psi}{dx^4}u^3 + \frac{d^8\Psi}{dx^8}u^5 - \frac{d^{12}\Psi}{dx^{12}}u^7 + \&c.,$$

$$X' = \frac{at}{u} - \frac{a^3t^3}{1.2.3.u^3} + \frac{a^5t^5}{1.2.3.4.5.u^5} - \frac{a^7t^7}{1.2.3.4.5.6.7.u^7} + \&c.$$

u désignant une quantité arbitraire indépendante de x et t.

Il est évident que le produit des termes correspondans de ces deux séries en fournit une représentée par aT(*): donc, si nous parvenons à trouver les valeurs finies de X et de X', nous pourrons en déduire la valeur de aT, sous forme finie, à l'aide d'une élégante formule que l'on doit à *Parseval*. Il n'y a aucune difficulté pour sommer X', puisqu'au premier coup-d'œil l'on voit que

$$X' = \text{sin.}\frac{at}{u}.$$

Pour déterminer X, remarquons que l'on a

$$\frac{d^4X}{dx^4} = \frac{d^4\Psi}{dx^4}u - \frac{d^8\Psi}{dx^8}u^3 + \frac{d^{12}\Psi}{dx^{12}}u^5 - \&c.;$$

et par conséquent,

$$u^2\frac{d^4X}{dx^4} = \Psi(x).u - X,$$

ou bien

$$\frac{d^4X}{dx^4} + \frac{1}{u^2}.X = \frac{1}{u}\Psi(x).$$

Il suffit donc d'intégrer cette équation linéaire du quatrième ordre, pour obtenir la valeur finie de X. En exécutant cette intégration par les méthodes connues, l'on trouvera

(*) *Voyez* à la fin du volume, une note à ce sujet.

Digitized by Google

$$X = e^{\frac{x}{\sqrt{(2u)}}} p \sin.\left(q + \frac{x}{\sqrt{(2u)}}\right) + e^{\frac{-x}{\sqrt{(2u)}}} p' \sin.\left(q' + \frac{x}{\sqrt{(2u)}}\right)$$

$$- \frac{\sqrt{(2u)}}{4} . e^{\frac{x}{\sqrt{(2u)}}} \left(\cos.\frac{x}{\sqrt{(2u)}} - \sin.\frac{x}{\sqrt{(2u)}}\right) . \int e^{\frac{-x}{\sqrt{(2u)}}} \cos.\frac{x}{\sqrt{(2u)}} \Psi(x)\, dx$$

$$- \frac{\sqrt{(2u)}}{4} . e^{\frac{x}{\sqrt{(2u)}}} \left(\cos.\frac{x}{\sqrt{(2u)}} + \sin.\frac{x}{\sqrt{(2u)}}\right) . \int e^{\frac{-x}{\sqrt{(2u)}}} \sin.\frac{x}{\sqrt{(2u)}} \Psi(x)\, dx$$

$$+ \frac{\sqrt{(2u)}}{4} . e^{\frac{-x}{\sqrt{(2u)}}} \left(\cos.\frac{x}{\sqrt{(2u)}} + \sin.\frac{x}{\sqrt{(2u)}}\right) . \int e^{\frac{x}{\sqrt{(2u)}}} \cos.\frac{x}{\sqrt{(2u)}} \Psi(x)\, dx$$

$$- \frac{\sqrt{(2u)}}{4} . e^{\frac{-x}{\sqrt{(2u)}}} \left(\cos.\frac{x}{\sqrt{(2u)}} - \sin.\frac{x}{\sqrt{(2u)}}\right) . \int e^{\frac{x}{\sqrt{(2u)}}} \sin.\frac{x}{\sqrt{(2u)}} \Psi(x)\, dx,$$

p, q, p', q' étant quatre constantes arbitraires introduites par l'intégration. Il est clair que l'on doit ici supposer $p = 0$, $p' = 0$, puisque X devient nul, en y faisant $\Psi(x) = 0$; nous aurons par conséquent,

$$X = - \frac{\sqrt{(2u)}}{4} . e^{\frac{x}{\sqrt{(2u)}}} \left(\cos.\frac{x}{\sqrt{(2u)}} - \sin.\frac{x}{\sqrt{(2u)}}\right) . \int e^{\frac{-x}{\sqrt{(2u)}}} \cos.\frac{x}{\sqrt{(2u)}} \Psi(x)\, dx$$

$$- \frac{\sqrt{(2u)}}{4} . e^{\frac{x}{\sqrt{(2u)}}} \left(\cos.\frac{x}{\sqrt{(2u)}} + \sin.\frac{x}{\sqrt{(2u)}}\right) . \int e^{\frac{-x}{\sqrt{(2u)}}} \sin.\frac{x}{\sqrt{(2u)}} \Psi(x)\, dx$$

$$+ \frac{\sqrt{(2u)}}{4} . e^{\frac{-x}{\sqrt{(2u)}}} \left(\cos.\frac{x}{\sqrt{(2u)}} + \sin.\frac{x}{\sqrt{(2u)}}\right) . \int e^{\frac{x}{\sqrt{(2u)}}} \cos.\frac{x}{\sqrt{(2u)}} \Psi(x)\, dx$$

$$- \frac{\sqrt{(2u)}}{4} . e^{\frac{-x}{\sqrt{(2u)}}} \left(\cos.\frac{x}{\sqrt{(2u)}} - \sin.\frac{x}{\sqrt{(2u)}}\right) . \int e^{\frac{x}{\sqrt{(2u)}}} \sin.\frac{x}{\sqrt{(2u)}} \Psi(x)\, dx.$$

[16.] Désignons par Z et Z′ ce que devient le produit XX' par la substitution successive de

$$u = \cos.z + \sqrt{(-1)} . \sin.z, \quad u = \cos.z - \sqrt{(-1)} . \sin.z.$$

Il est assez connu que l'on obtiendra des résultats de cette forme,

$$Z = P + Q\sqrt{(-1)}, \quad Z' = P - Q\sqrt{(-1)};$$

Digitized by Google

conséquemment, nous aurons

$$Z + Z' = 2P.$$

Or, d'après le théorème de *Parseval* (voyez le *Calcul intégral* de Lacroix, *tom. III, pag. 377—379*), l'on doit avoir

$$aT = \frac{1}{2\pi}\int (Z + Z')\, dz,$$

l'intégrale par rapport à z étant prise depuis $z = 0$, jusqu'à $z = \pi = 180°$: donc l'on aura

$$aT = \frac{1}{\pi}\int P\, dz.$$

Telle est la formule qui donnera la valeur finie de aT, après que l'on aura déterminé la fonction P. C'est de quoi nous allons nous occuper dans ce qui suit.

[17.] Soit, pour plus de simplicité,

$$\alpha' = \sin. z, \qquad \beta' = \cos. z;$$

nous aurons

$$u = \beta' + \alpha' \sqrt{(-1)};$$

et par conséquent,

$$X' = \sin. \frac{at}{u} = \sin. [\beta' at - \alpha' at \sqrt{(-1)}].$$

Mais nous avons en général,

$$-2 \sin.[x\sqrt{(-1)}] = (e^{-x} - e^{x})\sqrt{(-1)}, \quad 2 \cos.[x\sqrt{(-1)}] = e^{-x} + e^{x};$$

partant, l'on aura

$$2X' = (e^{\alpha' at} + e^{-\alpha' at}) \sin. \beta' at + \sqrt{(-1)}\,(e^{-\alpha' at} - e^{\alpha' at}) \cos. \beta' at$$

ou bien

$$X' = p + q\sqrt{(-1)},$$

Digitized by Google

en faisant

$$2p = (e^{\alpha' at} + e^{-\alpha' at}) \sin. \beta' at,$$

$$2q = (e^{-\alpha' at} - e^{\alpha' at}) \cos. \beta' at.$$

[18.] Cherchons actuellement ce que devient la fonction X par la substitution de $u = \cos. z + \sqrt{(-1)}. \sin. z$. Soit

$$\sin. \tfrac{1}{2} z = \alpha \sqrt{2}, \quad \cos. \tfrac{1}{2} z = \beta \sqrt{2};$$

nous aurons

$$(2u)^{\frac{1}{2}} = 2[\beta + \alpha \sqrt{(-1)}], \quad (2u)^{-\frac{1}{2}} = \beta - \alpha \sqrt{(-1)}.$$

D'après cela, si l'on fait

$$2M = e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}, \quad 2N = e^{\alpha x} - e^{-\alpha x};$$

l'on trouvera

$$\cos. \frac{x}{\sqrt{(2u)}} = M. \cos. \beta x + N \sqrt{(-1)}. \sin. \beta x,$$

$$\sin. \frac{x}{\sqrt{(2u)}} = M. \sin. \beta x - N \sqrt{(-1)}. \cos. \beta x,$$

$$e^{\frac{-x}{\sqrt{(2u)}}} = e^{-\beta x} [\cos. \alpha x + \sqrt{(-1)}. \sin. \alpha x],$$

$$\sqrt{(2u)}. e^{\frac{x}{\sqrt{(2u)}}} = e^{\beta x} [\cos. (\tfrac{1}{2} z - \alpha x) + \sqrt{(-1)} \sin. (\tfrac{1}{2} z - \alpha x)] \sqrt{2}.$$

Il suit de là, qu'en faisant

$$M' = M \cos. \alpha x. \cos. \beta x - N \sin. \alpha x. \sin. \beta x,$$

$$N' = M \sin. \alpha x. \cos. \beta x + N \cos. \alpha x. \sin. \beta x,$$

$$M'' = M \cos. \alpha x. \sin. \beta x + N \sin. \alpha x. \cos. \beta x,$$

$$N'' = M \sin. \alpha x. \sin. \beta x - N \cos. \alpha x. \cos. \beta x;$$

l'on

l'on aura

$$e^{\frac{-x}{\sqrt{(2u)}}}\cos.\frac{x}{\sqrt{(2u)}} = e^{-\beta x}\left[M' + N'\sqrt{(-1)}\right]:$$

$$e^{\frac{-x}{\sqrt{(2u)}}}\sin.\frac{x}{\sqrt{(2u)}} = e^{-\beta x}\left[M'' + N''\sqrt{(-1)}\right].$$

Soit,

$$P' = \cos.\beta x + \sin.\beta x, \qquad Q' = \cos.\beta x - \sin.\beta x,$$

nous aurons

$$\cos.\frac{x}{\sqrt{(2u)}} + \sin.\frac{x}{\sqrt{(2u)}} = P'M - Q'N\sqrt{(-1)},$$

$$\cos.\frac{x}{\sqrt{(2u)}} - \sin.\frac{x}{\sqrt{(2u)}} = Q'M + P'N\sqrt{(-1)};$$

partant, si l'on pose

$$A = P'M.\cos.\left(\tfrac{1}{2}z - \alpha x\right) + Q'N.\sin.\left(\tfrac{1}{2}z - \alpha x\right),$$
$$B = P'M.\sin.\left(\tfrac{1}{2}z - \alpha x\right) - Q'N.\cos.\left(\tfrac{1}{2}z - \alpha x\right),$$
$$A' = Q'M.\cos.\left(\tfrac{1}{2}z - \alpha x\right) - P'N.\sin.\left(\tfrac{1}{2}z - \alpha x\right),$$
$$B' = Q'M.\sin.\left(\tfrac{1}{2}z - \alpha x\right) + P'N.\cos.\left(\tfrac{1}{2}z - \alpha x\right),$$

l'on aura

$$\sqrt{(2u)}.e^{\frac{x}{\sqrt{(2u)}}}\left(\cos.\frac{x}{\sqrt{(2u)}} + \sin.\frac{x}{\sqrt{(2u)}}\right) = e^{\beta x}\left[A + B\sqrt{(-1)}\right]\sqrt{2},$$

$$\sqrt{(2u)}.e^{\sqrt{(2u)}}\left(\cos.\frac{x}{\sqrt{(2u)}} - \sin.\frac{x}{\sqrt{(2u)}}\right) = e^{\beta x}\left[A' + B'\sqrt{(-1)}\right]\sqrt{2}.$$

Actuellement, si l'on fait, pour abréger,

$$Y = -\frac{\sqrt{(2u)}}{4}.e^{\frac{x}{\sqrt{(2u)}}}\left(\cos.\frac{x}{\sqrt{(2u)}} - \sin.\frac{x}{\sqrt{(2u)}}\right).\int e^{\frac{-x}{\sqrt{(2u)}}}\cos.\frac{x}{\sqrt{(2u)}}\Psi(x)\,dx$$

$$-\frac{\sqrt{(2u)}}{4}.e^{\frac{x}{\sqrt{(2u)}}}\left(\cos.\frac{x}{\sqrt{(2u)}} + \sin.\frac{x}{\sqrt{(2u)}}\right).\int e^{\frac{-x}{\sqrt{(2u)}}}\sin.\frac{x}{\sqrt{(2u)}}\Psi(x)\,dx;$$

Digitized by Google

$$\overline{Y}=-\frac{\sqrt{(2u)}}{4}.e^{\frac{-x}{\sqrt{(2u)}}}\left(\cos.\frac{x}{\sqrt{(2u)}}+\sin.\frac{x}{\sqrt{(2u)}}\right).\int e^{\frac{x}{\sqrt{(2u)}}}\cos.\frac{x}{\sqrt{(2u)}}\Psi(x)\,dx$$

$$+\frac{\sqrt{(2u)}}{4}.e^{\frac{-x}{\sqrt{(2u)}}}\left(\cos.\frac{x}{\sqrt{(2u)}}-\sin.\frac{x}{\sqrt{(2u)}}\right).\int e^{\frac{x}{\sqrt{(2u)}}}\sin.\frac{x}{\sqrt{(2u)}}\Psi(x)\,dx;$$

d'où résulte $X=Y-\overline{Y}$, l'on obtiendra, à l'aide des résultats trouvés précédemment,

$$Y=-\frac{\sqrt{2}}{4}.e^{\beta x}[A'+B'\sqrt{(-1)}].\int e^{-\beta x}[M'+N'\sqrt{(-1)}]\Psi(x)\,dx$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{4}.e^{\beta x}[A+B\sqrt{(-1)}].\int e^{-\beta x}[M''+N''\sqrt{(-1)}]\Psi(x)\,dx.$$

Effectuant les multiplications indiquées, et faisant

$$R=A'.\int e^{-\beta x}M'\Psi(x)\,dx-B'.\int e^{-\beta x}N'\Psi(x)\,dx,$$

$$S=A'.\int e^{-\beta x}N'\Psi(x)\,dx+B'.\int e^{-\beta x}M'\Psi(x)\,dx,$$

$$R_{,}=A.\int e^{-\beta x}M''\Psi(x)\,dx-B.\int e^{-\beta x}N''\Psi(x)\,dx,$$

$$S_{,}=A.\int e^{-\beta x}N''\Psi(x)\,dx+B.\int e^{-\beta x}M''\Psi(x)\,dx;$$

il viendra

$$Y=-\frac{\sqrt{2}}{4}.e^{\beta x}[R+R_{,}+(S+S_{,})\sqrt{(-1)}].$$

Il est clair que l'on a

$$\overline{Y}=-\frac{\sqrt{2}}{4}.e^{-\beta x}[\overline{R}+\overline{R_{,}}+(\overline{S}+\overline{S_{,}})\sqrt{(-1)}],$$

en désignant par $\overline{R}$, $\overline{R_{,}}$, $\overline{S}$, $\overline{S_{,}}$ ce que deviennent R, $R_{,}$, S, $S_{,}$ après le changement de x en $-x$ dans tous leurs termes, à l'exception de

Digitized by Google

ceux compris dans la fonction arbitraire $\Psi(x)$, qui ne doivent pas subir ce changement de signe. Il suit de là que

$$X = -\frac{\sqrt{2}}{4}.e^{\beta x}\,[R + R_{,} + (S + S_{,})\sqrt{(-1)}]$$
$$+\frac{\sqrt{2}}{4}.e^{-\beta x}[\overline{R} + \overline{R}_{,} + (\overline{S} + \overline{S}_{,})\sqrt{(-1)}].$$

[19.] Occupons-nous maintenant d'exprimer le plus simplement qu'il est possible les deux fonctions $R + R_{,}$, $S + S_{,}$. A cet effet, faisons $b = \frac{1}{2}\zeta - \alpha x$, et

$$e^{-\beta x}\cos.\alpha x\,.\cos.\beta x.\Psi(x) = Y', \quad e^{-\beta x}\sin.\alpha x\,.\sin.\beta x.\Psi(x) = Y'',$$

$$e^{-\beta x}\sin.\alpha x\,.\cos.\beta x.\Psi(x) = Y''', \quad e^{-\beta x}\cos.\alpha x\,.\sin.\beta x.\Psi(x) = Y^{\text{IV}}.$$

Cela posé, en substituant à la place de A, B, A', B', M', N', M'', N'' leurs valeurs, l'on trouvera

$$\begin{aligned}
R + R_{,} = {} & Q'\cos.b.\{M\int MY'dx - N\int NY'dx\} + P'\sin.b.\{M\int NY'dx - N\int MY'dx\} \\
& + Q'\sin.b.\{N\int NY'''dx - M\int MY'''dx\} + P'\cos.b.\{M\int NY'''dx - N\int MY'''dx\} \\
& + Q'\cos.b.\{N\int MY''dx - M\int NY''dx\} + P'\sin.b.\{N\int NY''dx - M\int MY''dx\} \\
& + Q'\sin.b.\{N\int MY^{\text{IV}}dx - M\int NY^{\text{IV}}dx\} + P'\cos.b.\{M\int MY^{\text{IV}}dx - N\int NY^{\text{IV}}dx\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S + S_{,} = {} & Q'\cos.b.\{M\int MY'''dx - N\int NY'''dx\} + P'\sin.b.\{M\int NY'''dx - N\int MY'''dx\} \\
& + Q'\sin.b.\{M\int MY'dx - N\int NY'dx\} + P'\cos.b.\{N\int MY'dx - M\int NY'dx\} \\
& + Q'\cos.b.\{M\int NY^{\text{IV}}dx - N\int MY^{\text{IV}}dx\} + P'\sin.b.\{M\int MY^{\text{IV}}dx - N\int NY^{\text{IV}}dx\} \\
& + Q'\sin.b.\{N\int MY''dx - M\int NY''dx\} + P'\cos.b.\{M\int MY''dx - N\int NY''dx\}.
\end{aligned}$$

Substituant dans ces expressions pour M et N leurs valeurs [n.° 18], l'on trouvera

Digitized by Google

$$2(R+R_{,}) = e^{-ax}(P'\sin.b + Q'\cos.b).\int e^{ax}(Y' - Y'')dx$$
$$+ e^{-ax}(P'\cos.b - Q'\sin.b).\int e^{ax}(Y''' + Y^{IV})dx$$
$$- e^{ax}(P'\cos.b + Q'\sin.b).\int e^{-ax}(Y''' - Y^{IV})dx$$
$$- e^{ax}(P'\sin.b - Q'\cos.b).\int e^{-ax}(Y' + Y'')dx;$$

$$2(S+S_{,}) = e^{-ax}(Q'\sin.b - P'\cos.b).\int e^{ax}(Y' - Y'')dx$$
$$+ e^{-ax}(Q'\cos.b + P'\sin.b).\int e^{ax}(Y''' + Y^{IV})dx$$
$$+ e^{ax}(Q'\cos.b - P'\sin.b).\int e^{-ax}(Y''' - Y^{IV})dx$$
$$+ e^{ax}(Q'\sin.b + P'\cos.b).\int e^{-ax}(Y' + Y'')dx.$$

Remplaçant Y', Y'', Y''', Y^{IV} par leurs valeurs, et faisant

$$v = [\sin.\tfrac{1}{2}\zeta + \cos.\tfrac{1}{2}\zeta]\sqrt{2} = \alpha+\beta,\quad v' = [\sin.\tfrac{1}{2}\zeta - \cos.\tfrac{1}{2}\zeta]\sqrt{2} = \alpha-\beta;$$

$$\int e^{v'x}\cos.vx.\Psi(x)dx = (1),\quad \int e^{v'x}\sin.vx.\Psi(x)dx = (2),$$
$$\int e^{-vx}\sin.v'x.\Psi(x)dx = (3),\quad \int e^{-vx}\cos.v'x.\Psi(x)dx = (4),$$
$$\int e^{-v'x}\cos.vx.\Psi(x)dx = (5),\quad \int e^{-v'x}\sin.vx.\Psi(x)dx = (6),$$
$$\int e^{vx}\sin.v'x.\Psi(x)dx = (7),\quad \int e^{vx}\cos.v'x.\Psi(x)dx = (8);$$

l'on obtiendra les deux résultats suivans,

$$2e^{\beta x}(R+R_{,}) = e^{-v'x}\{P'\sin.b+Q'\cos.b\}.(1)+e^{-v'x}\{P'\cos.b-Q'\sin.b\}.(2)$$
$$- e^{vx}\{P'\cos.b+Q'\sin.b\}.(3) - e^{vx}\{P'\sin.b-Q'\cos.b\}.(4);$$

$$2e^{\beta x}(S+S_{,}) = e^{-v'x}\{Q'\sin.b-P'\cos.b\}.(1)+e^{-v'x}\{P'\sin.b+Q'\cos.b\}.(2)$$
$$- e^{vx}\{P'\sin.b-Q'\cos.b\}.(3)+e^{vx}\{P'\cos.b+Q'\sin.b\}.(4).$$

[20.] La valeur de X trouvée à la fin du n.° 18, étant multipliée par $p+q\sqrt{(-1)}$, nous fournira la partie réelle du produit XX' qui a été désignée par P [n.° 16]. Nous aurons donc

$$P = -\frac{\sqrt{2}}{8}.(V - V'),$$

Digitized by Google

en faisant, pour plus de simplicité,

$$V = 2p.e^{\beta x}\ (R + R_{,}) - 2q.e^{\beta x}\ (S + S_{,}),$$

$$V' = 2p.e^{-\beta x}(\overline{R} + \overline{R}_{,}) - 2q.e^{-\beta x}\ (\overline{S} + \overline{S}_{,}).$$

Substituant ici pour p et q leurs valeurs, et remarquant que l'on a

$$P' \sin.b + Q' \cos.b = \sin.(\tfrac{1}{2}z - \nu x) + \cos.(\tfrac{1}{2}z - \nu x),$$
$$P' \cos.b - Q' \sin.b = \cos.(\tfrac{1}{2}z - \nu x) - \sin.(\tfrac{1}{2}z - \nu x),$$
$$P' \sin.b - Q' \cos.b = \sin.(\tfrac{1}{2}z - \nu' x) - \cos.(\tfrac{1}{2}z - \nu' x),$$
$$P' \cos.b + Q' \sin.b = \cos.(\tfrac{1}{2}z - \nu' x) + \sin.(\tfrac{1}{2}z - \nu' x),$$

l'on obtiendra sans difficulté,

$$\begin{aligned}
2V = {} & e^{\alpha' at - \nu' x}\{\cos.(\beta' at - \tfrac{1}{2}z + \nu x) + \sin.(\beta' at - \tfrac{1}{2}z + \nu x)\}.(1)\\
& + e^{-\alpha' at - \nu' x}\{\sin.(\beta' at + \tfrac{1}{2}z - \nu x) - \cos.(\beta' at + \tfrac{1}{2}z - \nu x)\}.(1)\\
& + e^{\alpha' at - \nu' x}\{\sin.(\beta' at - \tfrac{1}{2}z + \nu x) - \cos.(\beta' at - \tfrac{1}{2}z + \nu x)\}.(2)\\
& + e^{-\alpha' at - \nu' x}\{\sin.(\beta' at + \tfrac{1}{2}z - \nu x) + \cos.(\beta' at + \tfrac{1}{2}z - \nu x)\}.(2)\\
& + e^{\alpha' at + \nu x}\{\cos.(\beta' at + \tfrac{1}{2}z - \nu' x) - \sin.(\beta' at + \tfrac{1}{2}z - \nu' x)\}.(3)\\
& - e^{-\alpha' at + \nu x}\{\sin.(\beta' at - \tfrac{1}{2}z + \nu' x) + \cos.(\beta' at - \tfrac{1}{2}z + \nu' x)\}.(3)\\
& + e^{\alpha' at + \nu x}\{\cos.(\beta' at + \tfrac{1}{2}z - \nu' x) + \sin.(\beta' at + \tfrac{1}{2}z - \nu' x)\}.(4)\\
& - e^{-\alpha' at + \nu x}\{\cos.(\beta' at - \tfrac{1}{2}z + \nu' x) - \sin.(\beta' at - \tfrac{1}{2}z + \nu' x)\}.(4);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2V' = {} & e^{\alpha' at + \nu' x}\{\cos.(\beta' at - \tfrac{1}{2}z - \nu x) + \sin.(\beta' at - \tfrac{1}{2}z - \nu x)\}.(5)\\
& + e^{-\alpha' at + \nu' x}\{\sin.(\beta' at + \tfrac{1}{2}z + \nu x) - \cos.(\beta' at + \tfrac{1}{2}z + \nu x)\}.(5)\\
& - e^{\alpha' at + \nu' x}\{\sin.(\beta' at - \tfrac{1}{2}z - \nu x) - \cos.(\beta' at - \tfrac{1}{2}z - \nu x)\}.(6)\\
& - e^{-\alpha' at + \nu' x}\{\sin.(\beta' at + \tfrac{1}{2}z + \nu x) + \cos.(\beta' at + \tfrac{1}{2}z + \nu x)\}.(6)\\
& - e^{\alpha' at - \nu x}\{\cos.(\beta' at + \tfrac{1}{2}z + \nu' x) - \sin.(\beta' at + \tfrac{1}{2}z + \nu' x)\}.(7)\\
& + e^{-\alpha' at - \nu x}\{\sin.(\beta' at - \tfrac{1}{2}z - \nu' x) + \cos.(\beta' at - \tfrac{1}{2}z - \nu' x)\}.(7)\\
& + e^{\alpha' at - \nu x}\{\cos.(\beta' at + \tfrac{1}{2}z + \nu' x) + \sin.(\beta' at + \tfrac{1}{2}z + \nu' x)\}.(8)\\
& - e^{-\alpha' at - \nu x}\{\cos.(\beta' at - \tfrac{1}{2}z - \nu' x) - \sin.(\beta' at - \tfrac{1}{2}z - \nu' x)\}.(8)
\end{aligned}$$

Digitized by Google

Ces deux expressions, différenciées par rapport à t, donnent

$$
\begin{aligned}
2\frac{dV}{dt} = {} & a.e^{\alpha' at - \nu' x}\{\cos.(\beta' at - \tfrac{3}{2}z + \nu x) - \sin.(\beta' at - \tfrac{3}{2}z + \nu x)\}.(1)\\
& + a.e^{-\alpha' at - \nu' x}\{\cos.(\beta' at + \tfrac{3}{2}z - \nu x) + \sin.(\beta' at + \tfrac{3}{2}z - \nu x)\}.(1)\\
& + a.e^{\alpha' at - \nu' x}\{\cos.(\beta' at - \tfrac{3}{2}z + \nu x) + \sin.(\beta' at - \tfrac{3}{2}z + \nu x)\}.(2)\\
& + a.e^{-\alpha' at - \nu' x}\{\cos.(\beta' at - \tfrac{3}{2}z - \nu x) - \sin.(\beta' at + \tfrac{3}{2}z - \nu x)\}.(2)\\
& - a.e^{\alpha' at + \nu x}\{\cos.(\beta' at - \tfrac{1}{2}z + \nu' x) + \sin.(\beta' at - \tfrac{1}{2}z - \nu' x)\}.(3)\\
& - a.e^{-\alpha' at + \nu x}\{\cos.(\beta' at + \tfrac{1}{2}z + \nu' x) - \sin.(\beta' at + \tfrac{1}{2}z + \nu' x)\}.(3)\\
& + a.e^{\alpha' at + \nu x}\{\cos.(\beta' at - \tfrac{1}{2}z - \nu' x) - \sin.(\beta' at - \tfrac{1}{2}z - \nu' x)\}.(4)\\
& + a.e^{-\alpha' at + \nu x}\{\cos.(\beta' at + \tfrac{1}{2}z + \nu' x) + \sin.(\beta' at + \tfrac{1}{2}z + \nu' x)\}.(4);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\frac{dV'}{dt} = {} & a.e^{\alpha' at + \nu' x}\{\cos.(\beta' at - \tfrac{3}{2}z - \nu x) - \sin.(\beta' at - \tfrac{3}{2}z - \nu x)\}.(5)\\
& + a.e^{-\alpha' at + \nu' x}\{\cos.(\beta' at + \tfrac{3}{2}z + \nu x) + \sin.(\beta' at + \tfrac{3}{2}z + \nu x)\}.(5)\\
& - a.e^{\alpha' at + \nu' x}\{\cos.(\beta' at - \tfrac{3}{2}z - \nu x) + \sin.(\beta' at - \tfrac{3}{2}z - \nu x)\}.(6)\\
& - a.e^{-\alpha' at + \nu' x}\{\cos.(\beta' at + \tfrac{3}{2}z + \nu x) - \sin.(\beta' at + \tfrac{3}{2}z + \nu x)\}.(6)\\
& + a.e^{\alpha' at - \nu x}\{\cos.(\beta' at - \tfrac{1}{2}z + \nu' x) + \sin.(\beta' at - \tfrac{1}{2}z + \nu' x)\}.(7)\\
& + a.e^{-\alpha' at - \nu x}\{\cos.(\beta' at + \tfrac{1}{2}z - \nu' x) - \sin.(\beta' at + \tfrac{1}{2}z - \nu' x)\}.(7)\\
& + a.e^{\alpha' at - \nu x}\{\cos.(\beta' at - \tfrac{1}{2}z + \nu' x) - \sin.(\beta' at - \tfrac{1}{2}z + \nu' x)\}.(8)\\
& + a.e^{-\alpha' at - \nu x}\{\cos.(\beta' at + \tfrac{1}{2}z - \nu' x) + \sin.(\beta' at + \tfrac{1}{2}z - \nu' x)\}.(8).
\end{aligned}
$$

Actuellement, si l'on représente par $\frac{d\overline{V}}{dt}$, $\frac{d\overline{V}'}{dt}$ ce que deviennent ces valeurs de $\frac{dV}{dt}$, $\frac{dV'}{dt}$ par le changement de $\Psi(x)$ en $F(x)$, nous aurons, d'après la formule générale trouvée au n.° 16,

$$aT = \frac{\sqrt{2}}{8\pi}\int(V' - V)\,dz,$$

$$a\left[\frac{dT}{dt}\right] = \frac{\sqrt{2}}{8\pi}\int\left(\frac{d\overline{V}'}{dt} - \frac{d\overline{V}}{dt}\right)dz;$$

Digitized by Google

partant, la valeur cherchée de y sera

$$y = \frac{\sqrt{2}}{8a\pi}\int(V'-V)\,dz + \frac{\sqrt{2}}{8a\pi}\int\left(\frac{d\overline{V'}}{dt}-\frac{d\overline{V}}{dt}\right)dz.$$

Substituant pour V, V', $\frac{d\overline{V}}{dt}$, $\frac{d\overline{V'}}{dt}$ leurs valeurs, et mettant partout sin. z à la place de α', cos z à la place de β', l'on trouvera

$$8\pi a y\sqrt{2} =$$

$$-\int e^{at.\sin.z-\nu' x}\left[\cos\left(at.\cos z-\tfrac{1}{2}z+\nu x\right)\{(1)-(2)\}+\sin\left(at.\cos z-\tfrac{1}{2}z+\nu x\right)\{(1)+(2)\}\right]dz$$

$$+\int e^{-at.\sin.z-\nu' x}\left[\cos\left(at.\cos z+\tfrac{1}{2}z-\nu x\right)\{(1)-(2)\}-\sin\left(at.\cos z+\tfrac{1}{2}z-\nu x\right)\{(1)+(2)\}\right]dz$$

$$-\int e^{at.\sin.z+\nu x}\left[\cos\left(at.\cos z+\tfrac{1}{2}z-\nu' x\right)\{(3)+(4)\}-\sin\left(at.\cos z+\tfrac{1}{2}z-\nu' x\right)\{(3)-(4)\}\right]dz$$

$$+\int e^{-at.\sin.z+\nu x}\left[\cos\left(at.\cos z-\tfrac{1}{2}z+\nu' x\right)\{(3)+(4)\}+\sin\left(at.\cos z-\tfrac{1}{2}z+\nu' x\right)\{(3)-(4)\}\right]dz$$

$$+\int e^{at.\sin.z+\nu' x}\left[\cos\left(at.\cos z-\tfrac{1}{2}z-\nu x\right)\{(5)+(6)\}+\sin\left(at.\cos z-\tfrac{1}{2}z-\nu x\right)\{(5)-(6)\}\right]dz$$

$$-\int e^{-at.\sin.z+\nu' x}\left[\cos\left(at.\cos z+\tfrac{1}{2}z+\nu x\right)\{(5)+(6)\}-\sin\left(at.\cos z+\tfrac{1}{2}z+\nu x\right)\{(5)-(6)\}\right]dz$$

$$-\int e^{at.\sin.z-\nu x}\left[\cos\left(at.\cos z+\tfrac{1}{2}z+\nu' x\right)\{(7)-(8)\}-\sin\left(at.\cos z+\tfrac{1}{2}z+\nu' x\right)\{(7)+(8)\}\right]dz$$

$$+\int e^{-at.\sin.z-\nu x}\left[\cos\left(at.\cos z-\tfrac{1}{2}z-\nu' x\right)\{(7)-(8)\}+\sin\left(at.\cos z-\tfrac{1}{2}z-\nu' x\right)\{(7)+(8)\}\right]dz$$

$$-a\int e^{at.\sin.z-\nu' x}\left[\cos\left(at.\cos z-\tfrac{3}{2}z+\nu x\right)\{[1]+[2]\}-\sin\left(at.\cos z-\tfrac{3}{2}z+\nu x\right)\{[1]-[2]\}\right]dz$$

$$-a\int e^{-at.\sin.z-\nu' x}\left[\cos\left(at.\cos z+\tfrac{3}{2}z-\nu x\right)\{[1]+[2]\}+\sin\left(at.\cos z+\tfrac{3}{2}z-\nu x\right)\{[1]-[2]\}\right]dz$$

$$+a\int e^{at.\sin.z+\nu x}\left[\cos\left(at.\cos z-\tfrac{1}{2}z-\nu' x\right)\{[3]-[4]\}+\sin\left(at.\cos z-\tfrac{1}{2}z-\nu' x\right)\{[3]+[4]\}\right]dz$$

$$+a\int e^{-at.\sin.z+\nu x}\left[\cos\left(at.\cos z+\tfrac{1}{2}z+\nu' x\right)\{[3]-[4]\}-\sin\left(at.\cos z+\tfrac{1}{2}z+\nu' x\right)\{[3]+[4]\}\right]dz$$

$$+a\int e^{at.\sin.z+\nu' x}\left[\cos\left(at.\cos z-\tfrac{3}{2}z-\nu x\right)\{[5]-[6]\}-\sin\left(at.\cos z-\tfrac{3}{2}z-\nu x\right)\{[5]+[6]\}\right]dz$$

$$+a\int e^{-at.\sin.z+\nu' x}\left[\cos\left(at.\cos z+\tfrac{3}{2}z+\nu x\right)\{[5]-[6]\}+\sin\left(at.\cos z+\tfrac{3}{2}z+\nu x\right)\{[5]+[6]\}\right]dz$$

$$+a\int e^{at.\sin.z-\nu x}\left[\cos\left(at.\cos z-\tfrac{1}{2}z+\nu' x\right)\{[7]+[8]\}+\sin\left(at.\cos z-\tfrac{1}{2}z+\nu' x\right)\{[7]-[8]\}\right]dz$$

$$+a\int e^{-at.\sin.z-\nu x}\left[\cos\left(at.\cos z+\tfrac{1}{2}z-\nu' x\right)\{[7]+[8]\}-\sin\left(at.\cos z+\tfrac{1}{2}z-\nu' x\right)\{[7]-[8]\}\right]dz,$$

Digitized by Google

où les symboles [1], [2], &c. représentent ce que deviennent leurs correspondans (1), (2), &c. par le changement de $\Psi(x)$ en $F(x)$.

Telle est, si je ne me trompe, la forme la plus simple dont est susceptible l'expression générale de y, qui satisfait à l'équation (Δ).

Au reste, il est aisé de voir que la fonction arbitraire $F(x)$ doit être déterminée dans chaque cas particulier, d'après la figure initiale de la lame, puisque, si l'on fait $t = 0$, la valeur de y en série donne immédiatement $y = F(x)$. La même valeur de y, différenciée par rapport à t, donne $\frac{dy}{dt} = \Psi(x)$, en y faisant $t = 0$; conséquemment, la fonction arbitraire $\Psi(x)$ doit être déterminée d'après la vîtesse initiale des points de la lame vibrante : l'on aura donc $\Psi(x) = 0$ toutes les fois que la vîtesse initiale de chaque point de la lame sera nulle.

[21.] La valeur de y à laquelle nous venons de parvenir exige deux intégrations ; l'une *indéfinie* par rapport à x, l'autre *définie* par rapport à z. Ici, il est de toute nécessité que la première de ces intégrations soit exécutée avant la seconde : or cela est impossible, en général, dans l'état actuel de l'analyse. Cependant il est bon de remarquer qu'il y a un cas très-étendu où cette opération peut être exécutée par les procédés connus ; ce cas est celui dans lequel l'on suppose les fonctions arbitraires $F(x)$, $\Psi(x)$, exprimées par un nombre indéfini de termes dont chacun est compris dans l'une ou l'autre de ces quatre formes,

$$Ax^i, \quad Ae^{qx}, \quad A\sin.qx, \quad A\cos.qx,$$

A et q désignant des quantités constantes quelconques, et l'exposant i un nombre entier positif. Pour ce cas, l'on trouve dans les traités connus de calcul intégral les formules propres à effectuer l'intégration par rapport à x.

[22.] Occupons-nous maintenant de l'intégration de l'équation (γ) posée au n.° 8, qui contient, comme nous l'avons vu, la théorie des lames élastiques vibrantes, ayant à une de leurs extrémités une force constante

Digitized by Google

constante qui agit dans le sens de leur longueur. En faisant $b^2 = \frac{Al}{m}$, cette équation se change en

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a^2\frac{d^4y}{dx^4} = b^2\frac{d^2y}{dx^2}. \qquad (\mathcal{N}')$$

Il est facile de trouver une intégrale particulière de cette équation. En effet, supposons $y = T\varphi(x)$, T désignant une fonction de la variable t; en substituant cette valeur de y dans l'équation $(\mathcal{N}')$, l'on aura

$$\frac{d^2T}{dt^2}\varphi(x) - b^2T\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + a^2T\frac{d^4\varphi(x)}{dx^4} = 0;$$

partant, l'on satisfera à cette équation, en déterminant T et $\varphi(x)$, de manière que l'on ait

$$\frac{d^2T}{dt^2} = -\gamma^2T,$$

$$a^2\frac{d^4\varphi(x)}{dx^4} - b^2\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = \gamma^2\varphi(x),$$

γ désignant une constante arbitraire.

En intégrant ces deux équations, l'on obtient

$$T = \mathcal{N}\sin.(\zeta + \gamma t),$$

$$\varphi(x) = Ae^{\tau x} + A'e^{-\tau x} + A''\sin.\tau' x + A'''\cos.\tau' x,$$

$\mathcal{N}$, ζ, A, A', A'', A''' étant des constantes arbitraires, et les quantités τ, τ' déterminées par les deux équations suivantes,

$$\tau^2 = \frac{\sqrt{(b^4 + 4a^2\gamma^2)} + b^2}{2a^2}, \qquad \tau'^2 = \frac{\sqrt{(b^4 + 4a^2\gamma^2)} - b^2}{2a^2},$$

l'on a donc

$$y = \mathcal{N}.\sin.(\zeta + \gamma t).\{Ae^{\tau x} + A'e^{-\tau x} + A''\sin.\tau' x + A'''\cos.\tau' x\},$$

pour intégrale particulière de l'équation $(\mathcal{N}')$.

Digitized by Google

Ce résultat est, comme l'on voit, analogue à celui que nous avons obtenu au n.° 11.

[23.] Cherchons actuellement l'intégrale complète de la même équation développée en série. Soit

$$y = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + Et^4 + Ft^5 + \&c.;$$

A, B, C, &c. désignant des fonctions de x sans t.

La substitution de cette valeur de y dans l'équation (N) déterminera tous les coefficiens C, D, E, F, &c. en fonctions de A et de B; de sorte que l'on aura

$$C = -\frac{a^2}{1.2}\cdot\left\{\frac{d^4A}{dx^4} - \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{d^2A}{dx^2}\right\},$$

$$D = -\frac{a^2}{1.2.3}\cdot\left\{\frac{d^3B}{dx^3} - \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{d^2B}{dx^2}\right\},$$

$$E = \frac{a^4}{1.2.3.4}\cdot\left\{\frac{d^8A}{dx^8} - 2\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{d^6A}{dx^6} + \frac{b^4}{a^4}\cdot\frac{d^4A}{dx^4}\right\},$$

$$F = \frac{a^4}{1.2.3.4.5}\cdot\left\{\frac{d^8B}{dx^8} - 2\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{d^6B}{dx^6} + \frac{b^4}{a^4}\cdot\frac{d^4B}{dx^4}\right\},$$

$$G = -\frac{a^6}{1.2.3.4.5.6}\cdot\left\{\frac{d^{12}A}{dx^{12}} - 3\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{d^{10}A}{dx^{10}} + 3\frac{b^4}{a^4}\cdot\frac{d^8A}{dx^8} - \frac{b^6}{a^6}\cdot\frac{d^6A}{dx^6}\right\},$$

$$H = -\frac{a^6}{1.2.3.4.5.6.7}\cdot\left\{\frac{d^{12}B}{dx^{12}} - 3\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{d^{10}B}{dx^{10}} + 3\frac{b^4}{a^4}\cdot\frac{d^8B}{dx^8} - \frac{b^6}{a^6}\cdot\frac{d^6B}{dx^6}\right\},$$

&c.

La loi de formation de ces coefficiens est évidente; de plus, l'on comprend sans difficulté qu'ils peuvent être écrits plus simplement de la manière suivante,

$$C = -\frac{a^2}{1.2}\cdot\left\{\left(\frac{dA}{dx}\right)^4 - \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{dA}{dx}\right)^2\right\},$$

$$D = -\frac{a^2}{1.2.3}\cdot\left\{\left(\frac{dB}{dx}\right)^4 - \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{dB}{dx}\right)^2\right\},$$

Digitized by Google

$$E = \frac{a^4}{1.2.3.4} \cdot \left\{ \left(\frac{dA}{dx}\right)^4 - \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{dA}{dx}\right)^2 \right\}^2,$$

$$F = \frac{a^4}{1.2.3.4.5} \cdot \left\{ \left(\frac{dB}{dx}\right)^4 - \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{dB}{dx}\right)^2 \right\}^2,$$

$$G = -\frac{a^6}{1.2.3.4.5.6} \cdot \left\{ \left(\frac{dA}{dx}\right)^4 - \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{dA}{dx}\right)^2 \right\}^3,$$

$$H = -\frac{a^6}{1.2.3.4.5.6.7} \cdot \left\{ \left(\frac{dB}{dx}\right)^4 - \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{dB}{dx}\right)^2 \right\}^3,$$

&c.

pourvu que l'on ait soin de transporter les exposans à la caractéristique d, après le développement des différentes puissances des binomes.

De là il s'ensuit qu'en prenant arbitrairement

$$A = F(x), \quad B = \Psi(x),$$

et posant, pour plus de simplicité,

$$F_{,}(x) = \left(\frac{dA}{dx}\right)^4 - \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{dA}{dx}\right)^2,$$

$$\Psi_{,}(x) = \left(\frac{dB}{dx}\right)^4 - \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{dB}{dx}\right)^2,$$

l'on aura

$$(\alpha)\quad y = F(x) - \frac{a^2 t^2}{1.2} F_{,}\overline{(x)} + \frac{a^4 t^4}{1.2.3.4} F_{,}\overline{(x)}^2 - \frac{a^6 t^6}{1.2.3.4.5.6} F_{,}\overline{(x)}^3 + \&c.$$

$$+ t\,\Psi(x) - \frac{a^2 t^3}{1.2.3} \Psi_{,}\overline{(x)} + \frac{a^4 t^5}{1.2.3.4.5} \Psi_{,}\overline{(x)}^2 - \frac{a^6 t^7}{1.2.3.4.5.6.7} \Psi_{,}\overline{(x)}^3 + \&c.;$$

où le trait horizontal placé au-dessus de $F_{,}$ et $\Psi_{,}$, indique que l'on doit prendre les fonctions résultantes du développement des puissances de $F_{,}(x)$ et $\Psi_{,}(x)$ après la transposition des exposans à la caractéristique d.

Un calcul analogue à celui que nous avons développé au n.° 10, prouverait que la valeur précédente de y est l'intégrale complète de

Digitized by Google

l'équation ($\mathcal{N}$), quoique renfermant seulement deux fonctions arbitraires.

[24.] L'on peut encore ici sommer par des intégrales *définies*, les deux séries qui entrent dans l'équation (α).

Soit

$$T = t\,\Psi(x) - \frac{a^2 t^3}{1.2.3}\Psi_1(x) + \frac{a^4 t^5}{1.2.3.4.5}\Psi_1^2(x) - \frac{a^6 t^7}{1.2.3.4.5.6.7}\Psi_1^3(x) + \&c.$$

Après avoir sommé cette série, il suffira de différencier le résultat par rapport à t, pour en conclure la valeur de l'autre série par le simple changement de $\Psi(x)$ en $F(x)$. Or, en faisant

$$X = \Psi(x)\,u - \Psi_1(x)\,u^3 + \Psi_1^2(x)\,u^5 - \Psi_1^3(x)\,u^7 + \&c.$$

$$X' = \frac{a\,t}{u} - \frac{a^3 t^3}{1.2.3.u^3} + \frac{a^5 t^5}{1.2.3.4.5.u^5} - \frac{a^7 t^7}{1.2.3.4.5.6.7.u^7} + \&c.$$

l'on voit que la série T résulte du produit des termes correspondans de ces deux-ci (*); conséquemment, l'on pourra encore ici appliquer le théorème cité de *Parseval*, après que l'on aura obtenu, sous forme finie, les valeurs de X et de X'.

Il est d'abord clair que $X' = \text{sin.}\,\frac{at}{u}$. Différenciant la valeur de X, l'on trouve

$$-\frac{b^2}{a^2}u^2\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2}u^3\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \frac{b^2}{a^2}u^5\frac{d^2\Psi_1(x)}{dx^2} - \frac{b^2}{a^2}u^7\frac{d^2\Psi_1^2(x)}{dx^2} + \&c.,$$

$$u^2\frac{d^4X}{dx^4} = u^3\frac{d^4\Psi(x)}{dx^4} - u^5\frac{d^4\Psi_1(x)}{dx^4} + u^7\frac{d^4\Psi_1^2(x)}{dx^4} - \&c.;$$

partant, l'on aura

$$u^2\frac{d^4X}{dx^4} - \frac{b^2}{a^2}u^2\frac{d^2X}{dx^2} = u^3\Psi_1(x) - u^5\left\{\frac{d^4\Psi_1(x)}{dx^4} - \frac{b^2}{a^2}\frac{d^2\Psi_1(x)}{dx^2}\right\} + u^7\left\{\frac{d^4\Psi_1^2(x)}{dx^4} - \frac{b^2}{a^2}\frac{d^2\Psi_1^2(x)}{dx^2}\right\} + \&c.$$

(*) *Voyez* la note à la fin du volume.

Digitized by Google

Mais il est aisé de prouver que

$$\frac{d^4\,\Psi,\overline{(x)}}{dx^4} - \frac{b^2}{a^2}\,\frac{d^2\,\Psi,\overline{(x)}}{dx^2} = \Psi,\overline{(x)}^2,$$

$$\frac{d^4\,\overline{\Psi,(x)}^2}{dx^4} - \frac{b^2}{a^2}\,\frac{d^2\,\overline{\Psi,(x)}^2}{dx^2} = \Psi,\overline{(x)}^3,$$

et ainsi de suite : donc

$$\frac{d^4X}{dx^4}u^2 - \frac{b^2}{a^2}\,\frac{d^2X}{dx^2}u^2 = u^3\,\Psi,\overline{(x)} - u^5\,\Psi,\overline{(x)}^2 + u^7\,\Psi,\overline{(x)}^3 - \&c.,$$

ou bien

$$\frac{d^4X}{dx^4} - \frac{b^2}{a^2}\,\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{u^2}\,X = \frac{1}{u}\,\Psi(x).$$

L'intégrale de cette équation donnera la valeur cherchée de X. Faisant

$$c^2 = \frac{b^2}{a^2}, \qquad \text{sin. } \Phi = \sqrt{\left(1 - \frac{u^2c^4}{4}\right)},$$

$$m' = \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}\varphi + \text{sin. } \frac{1}{2}\varphi\sqrt{(-1)}}{\sqrt{(u)}},$$

$$m'' = \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}\varphi - \text{sin. } \frac{1}{2}\varphi\sqrt{(-1)}}{\sqrt{(u)}},$$

et effectuant cette intégration, l'on trouve

$$X = c'e^{m'x} + c''e^{m''x} + c'''e^{-m'x} + c^{IV}e^{-m''x}$$

$$+ \frac{A'}{u}\left\{e^{m'x}\int e^{-m'x}\,\Psi(x)\,dx - e^{-m'x}\int e^{m'x}\,\Psi(x)\,dx\right\}$$

$$+ \frac{A''}{u}\left\{e^{m''x}\int e^{-m''x}\,\Psi(x)\,dx - e^{-m''x}\int e^{m''x}\,\Psi(x)\,dx\right\},$$

c', c'', c''', c^{IV} étant des constantes arbitraires, et

$$A' = \frac{1}{2m'(m'^2 - m''^2)}, \qquad A'' = \frac{-1}{2m''(m'^2 - m''^2)}.$$

Il est clair que l'on doit ici supposer $c' = 0$, $c'' = 0$, $c''' = 0$,

Digitized by Google

$c^{IV} = 0$, puisque X doit se réduire à zéro, lorsque $\Psi(x) = 0$; ainsi, l'on a simplement,

$$X = \frac{A'}{u}\left\{e^{m'x}\int e^{-m'x}\Psi(x)\,dx - e^{-m'x}\int e^{m'x}\Psi(x)\,dx\right\}$$
$$+ \frac{A''}{u}\left\{e^{m''x}\int e^{-m''x}\Psi(x)\,dx - e^{-m''x}\int e^{m''x}\Psi(x)\,dx\right\},$$

Faisant,

$$z = \sin.\tfrac{1}{2}\Phi, \qquad z' = \cos.\tfrac{1}{2}\Phi;$$

et substituant dans cette expression pour m', m'', A', A'' leurs valeurs, l'on trouvera, après avoir fait disparaître les quantités imaginaires,

$$X = -\frac{\sqrt{(u)}}{4zz'}.e^{\frac{-xz'}{\sqrt{(u)}}}\left(z\cos.\frac{xz}{\sqrt{(u)}} - z'\sin.\frac{xz}{\sqrt{(u)}}\right).\int e^{\frac{-xz'}{\sqrt{(u)}}}\cos.\frac{xz}{\sqrt{(u)}}\Psi(x)\,dx$$
$$-\frac{\sqrt{(u)}}{4zz'}.e^{\frac{xz'}{\sqrt{(u)}}}\left(z'\cos.\frac{xz}{\sqrt{(u)}} + z\sin.\frac{xz}{\sqrt{(u)}}\right).\int e^{\frac{-xz'}{\sqrt{(u)}}}\sin.\frac{xz}{\sqrt{(u)}}\Psi(x)\,dx$$
$$+\frac{\sqrt{(u)}}{4zz'}.e^{\frac{-xz'}{\sqrt{(u)}}}\left(z\cos.\frac{xz}{\sqrt{(u)}} + z'\sin.\frac{xz}{\sqrt{(u)}}\right).\int e^{\frac{xz'}{\sqrt{(u)}}}\cos.\frac{xz}{\sqrt{(u)}}\Psi(x)\,dx$$
$$-\frac{\sqrt{(u)}}{4zz'}.e^{\frac{-xz'}{\sqrt{(u)}}}\left(z'\cos.\frac{xz}{\sqrt{(u)}} - z\sin.\frac{xz}{\sqrt{(u)}}\right).\int e^{\frac{xz'}{\sqrt{(u)}}}\sin.\frac{xz}{\sqrt{(u)}}\Psi(x)\,dx.$$

Mais nous avons

$$2zz' = \sin.\Phi = \sqrt{\left(1 - \frac{c^2u}{2}\right)\left(1 + \frac{c^2u}{2}\right)};$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{(2)}}\sqrt{(1 - \cos.\Phi)} = \frac{1}{\sqrt{(2)}}\sqrt{\left(1 - \frac{c^2u}{2}\right)},$$

$$z' = \frac{1}{\sqrt{(2)}}\sqrt{(1 + \cos.\Phi)} = \frac{1}{\sqrt{(2)}}\sqrt{\left(1 + \frac{c^2u}{2}\right)};$$

donc, si l'on pose

$$v = \sqrt{\left(1 - \frac{c^2u}{2}\right)}, \qquad v' = \sqrt{\left(1 + \frac{c^2u}{2}\right)};$$

Digitized by Google

l'on pourra donner à X la forme suivante,

$$X=-\frac{\sqrt{(2u)}}{4\nu\nu'}.e^{\frac{x\nu'}{\sqrt{(2u)}}}\left(\nu\cos.\frac{x\nu}{\sqrt{(2u)}}-\nu'\sin.\frac{x\nu}{\sqrt{(2u)}}\right).\int e^{\frac{-x\nu'}{\sqrt{(2u)}}}\cos.\frac{x\nu}{\sqrt{(2u)}}\Psi(x)\,dx$$

$$-\frac{\sqrt{(2u)}}{4\nu\nu'}.e^{\frac{x\nu'}{\sqrt{(2u)}}}\left(\nu'\cos.\frac{x\nu}{\sqrt{(2u)}}+\nu\sin.\frac{x\nu}{\sqrt{(2u)}}\right).\int e^{\frac{-x\nu'}{\sqrt{(2u)}}}\sin.\frac{x\nu}{\sqrt{(2u)}}\Psi(x)\,dx$$

$$+\frac{\sqrt{(2u)}}{4\nu\nu'}.e^{\frac{-x\nu'}{\sqrt{(2u)}}}\left(\nu\cos.\frac{x\nu}{\sqrt{(2u)}}+\nu'\sin.\frac{x\nu}{\sqrt{(2u)}}\right).\int e^{\frac{x\nu'}{\sqrt{(2u)}}}\cos.\frac{x\nu}{\sqrt{(2u)}}\Psi(x)\,dx$$

$$-\frac{\sqrt{(2u)}}{4\nu\nu'}.e^{\frac{-x\nu'}{\sqrt{(2u)}}}\left(\nu'\cos.\frac{x\nu}{\sqrt{(2u)}}-\nu\sin.\frac{x\nu}{\sqrt{(2u)}}\right).\int e^{\frac{x\nu'}{\sqrt{(2u)}}}\sin.\frac{x\nu}{\sqrt{(2u)}}\Psi(x)\,dx$$

laquelle est analogue à celle que nous avons obtenue au n.° 15.

Il ne reste plus maintenant qu'à chercher la partie réelle contenue dans le produit XX', après la substitution de $\cos.z+\sin.z\sqrt{(-1)}$ à la place de u; mais nous n'entreprenons pas d'achever ce calcul, parce qu'il nous paraît que le résultat final doit être excessivement compliqué.

ARTICLE TROIS.

Intégration de l'Équation du Mouvement d'une Lame élastique pesante.

[25.] EN faisant dans l'équation (3) trouvée au n.° 7, $Y=0$ et $X=g$, nous aurons

$$a^2\frac{d^4y}{dx^4}=\left(gl+\frac{Al}{m}\right)\frac{d^2y}{dx^2}+g\frac{dy}{dx}-\frac{d^2y}{dt^2},$$

ou bien

$$\frac{d^2y}{dt^2}+a^2\frac{d^4y}{dx^4}=b^2\frac{d^2y}{dx^2}+g\frac{dy}{dx}, \qquad (\delta'')$$

en posant, pour plus de simplicité, $b^2=gl+\frac{Al}{m}$.

Si l'on fait ici, comme dans les cas précédens,

Digitized by Google

$$y = \mathcal{N}.\sin.(\zeta + \gamma t).\varphi(x),$$

l'on trouvera que l'équation ($\mathcal{N}''$) sera satisfaite, en prenant pour $\varphi(x)$ la fonction de x qui résulte de l'intégration de l'équation

$$a^2 \frac{d^4\varphi(x)}{dx^4} - b^2 \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} - g\frac{d\varphi(x)}{dx} = \gamma^2\varphi(x);$$

de sorte que l'on aura

$$\varphi(x) = A'e^{m'x} + A''e^{m''x} + A'''e^{m'''x} + A^{IV}e^{m^{IV}x},$$

où A', A'', A''', A^{IV} sont des constantes arbitraires, et m', m'', m''', m^{IV} les racines de l'équation

$$a^2m^4 - b^2m^2 - gm = \gamma^2.$$

Pour trouver ces racines, il suffit de se rappeler que, si l'on désigne par

$$m^2 + \tau m + \theta, \quad m^2 - \tau m - \frac{\gamma^2}{a^2\theta},$$

les facteurs réels du second degré de cette équation, l'on doit avoir

$$2a^2\tau\theta = g + \tau(\tau^2a^2 - b^2),$$
$$a^4\tau^3 - 2b^2a^2\tau^2 + (b^4 + 4a^2\gamma^2)\tau - g^2 = 0.$$

[26.] Supposons la valeur générale de y développée suivant les puissances de t, et soit

$$y = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + Et^4 + Ft^5 + \&c.$$

Pour déterminer les coefficiens C, D, E, F, &c. d'une manière expéditive, l'on remarquera qu'en désignant par C', D', E', F', &c. les coefficiens des puissances analogues de t qui satisfont à l'équation ($\mathcal{N}'$) traitée dans le n.° 23, l'on a

C

Digitized by Google

$$C=C'+\frac{a^2}{1.2}\frac{g}{a^2}\left(\frac{dA}{dx}\right),$$

$$D=D'+\frac{a^2}{2.3}\frac{g}{a^2}\left(\frac{dB}{dx}\right),$$

$$E=E'-\frac{a^4}{2.3.4}\frac{2g}{a^2}\left(\frac{dA}{dx}\right)\left\{\left(\frac{dA}{dx}\right)^4-\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{dA}{dx}\right)^2\right\}+\frac{a^4}{2.3.4}\frac{g^2}{a^4}\left(\frac{dA}{dx}\right)^2,$$

$$F=F'-\frac{a^4}{2.3.4.5}\frac{2g}{a^2}\left(\frac{dB}{dx}\right)\left\{\left(\frac{dB}{dx}\right)^4-\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{dB}{dx}\right)^2\right\}+\frac{a^4}{2.3.4.5}\frac{g^2}{a^4}\left(\frac{dB}{dx}\right)^2,$$

&c. ;

en observant que les exposans des puissances de $\left(\frac{dA}{dx}\right)\left(\frac{dB}{dx}\right)$ doivent être transportés à la caractéristique d, après avoir exécuté les multiplications indiquées. Suivant cette convention, l'on trouvera qu'en substituant pour C', D', E', F', &c. leurs valeurs, l'on a

$$C=-\frac{a^2}{1.2}\left\{\left(\frac{dA}{dx}\right)^4-\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{dA}{dx}\right)^2-\frac{g}{a^2}\left(\frac{dA}{dx}\right)\right\},$$

$$D=-\frac{a^2}{1.2.3}\left\{\left(\frac{dB}{dx}\right)^4-\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{dB}{dx}\right)^2-\frac{g}{a^2}\left(\frac{dB}{dx}\right)\right\},$$

$$E=-\frac{a^4}{1.2.3.4}\left\{\left(\frac{dA}{dx}\right)^4-\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{dA}{dx}\right)^2-\frac{g}{a^2}\left(\frac{dA}{dx}\right)\right\}^2,$$

$$F=-\frac{a^4}{1.2.3.4.5}\left\{\left(\frac{dB}{dx}\right)^4-\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{dB}{dx}\right)^2-\frac{g}{a^2}\left(\frac{dB}{dx}\right)\right\}^2,$$

&c.

Donc, si l'on prend arbitrairement

$$A=F(x),\quad B=\Psi(x),$$

et qu'ensuite l'on pose

$$F_1(x)=\left(\frac{dA}{dx}\right)^4-\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{dA}{dx}\right)^2-\frac{g}{a^2}\left(\frac{dA}{dx}\right),$$

$$\Psi_1(x)=\left(\frac{dB}{dx}\right)^4-\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{dB}{dx}\right)^2-\frac{g}{a^2}\left(\frac{dB}{dx}\right),$$

Digitized by Google

l'on obtiendra

$$y = F(x) - \frac{a^2 t^2}{1.2} F_{,}\overline{(x)} + \frac{a^4 t^4}{1.2.3.4} F_{,}\overline{(x)}^2 - \frac{a^6 t^6}{1.2.3.4.5.6} F_{,}\overline{(x)}^3 + \&c.$$

$$+ t\,\Psi(x) - \frac{a^2 t^3}{1.2.3} \Psi_{,}\overline{(x)} + \frac{a^4 t^5}{1.2.3.4.5} \Psi_{,}\overline{(x)}^2 - \frac{a^6 t^7}{1.2.3.4.5.6.7} \Psi_{,}\overline{(x)}^3 + \&c.;$$

où le trait horizontal placé au-dessus de $F_{,}$ et $\Psi_{,}$ signifie que l'on doit transporter les exposans à la caractéristique d, après avoir développé les puissances de $F_{,}(x)$ et $\Psi_{,}(x)$.

Ce résultat est, comme l'on voit, entièrement semblable à celui que nous avons obtenu pour l'équation $(\mathcal{N}')$.

[27.] D'après tout ce que nous avons exposé précédemment, l'on doit comprendre maintenant que la sommation de la valeur de y dépend de celle de la valeur suivante de X,

$$X = \Psi(x).u - \Psi_{,}\overline{(x)}.u^3 + \Psi_{,}\overline{(x)}^2.u^5 - \Psi_{,}\overline{(x)}^3.u^7 + \&c.$$

Or, en différenciant cette série, l'on en conclut

$$u^2 \frac{d^4 X}{dx^4} - \frac{b^2}{a^2} u^2 \frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{g}{a^2} u^2 \frac{dX}{dx}$$

$$= u^3 \Psi_{,}\overline{(x)} - u^5 \left\{ \frac{d^4 \Psi_{,}\overline{(x)}}{dx^4} - \frac{b^2}{a^2} \frac{d^2 \Psi_{,}\overline{(x)}}{dx^2} - \frac{g}{a^2} \frac{d\Psi_{,}\overline{(x)}}{dx} \right\}$$

$$+ \&c.$$

Mais nous avons

$$\frac{d^4 \Psi_{,}\overline{(x)}}{dx^4} - \frac{b^2}{a^2} \frac{d^2 \Psi_{,}\overline{(x)}}{dx^2} - \frac{g}{a^2} \frac{d\Psi_{,}\overline{(x)}}{dx} = \Psi_{,}\overline{(x)}^2,$$

&c. ;

l'on aura donc

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - \frac{b^2}{a^2} \frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{g}{a^2} \frac{dX}{dx} + \frac{1}{u^2} X = \frac{1}{u} \Psi(x).$$

Digitized by Google

En intégrant cette équation par les formules connues, l'on obtiendra la valeur de X sous forme finie.

Nous n'entreprendrons pas de pousser plus loin ces recherches qui se compliquent toujours de plus en plus, et nous nous contenterons d'avoir indiqué par-là la possibilité d'exprimer, par des intégrales définies, l'intégrale de l'équation aux différences partielles du quatrième ordre, qui renferme la loi des oscillations d'une lame élastique pesante.

Digitized by Google

MÉMOIRE

Où l'on expose une nouvelle Méthode analytique, pour déterminer les effets de l'Aberration sur la position des Astres ;

Lu à l'Institut le 11 Juillet 1814,

PAR M. PUISSANT.

MALGRÉ l'extrême rapidité avec laquelle la lumière se propage, l'expérience prouve que sa vîtesse est comparable à celle de la Terre et des planètes ; et lorsqu'une molécule lumineuse lancée d'un astre vient frapper l'organe de la vue, si cet astre, ou la Terre, ou tous deux sont en mouvement dans l'espace, l'œil n'éprouve la sensation de l'astre que dans la direction de la résultante de toutes les vîtesses qui ont lieu. De là ce phénomène très-singulier connu sous le nom d'*aberration*, phénomène en vertu duquel toutes les étoiles semblent décrire annuellement de petites ellipses autour de leur lieu moyen, et qui décèle, par conséquent, le mouvement de la Terre autour du Soleil.

Les astronomes et les géomètres ont créé depuis long-temps des méthodes plus ou moins ingénieuses pour évaluer l'effet de l'aberration sur les positions des étoiles et des planètes; mais l'on doit principalement à M. *Delambre* des formules et des tables très-simples pour cet objet.

Quoique les questions d'astronomie-pratique se résolvent en général plus facilement par les méthodes de la trigonométrie sphérique que par toute autre, cependant le problème de l'aberration est un de ceux

Digitized by Google

auxquels l'analyse pure s'applique avec autant de simplicité que d'élégance. L'auteur de l'*Astronomie physique* a obtenu, par les considérations de la géométrie analytique, et à l'aide de calculs qui présentent beaucoup de symétrie, les formules d'aberration pour les fixes et les planètes; mais, si je ne me trompe, ma solution, bien que fondée sur les mêmes considérations, a pourtant cela de remarquable, qu'elle procure très-aisément une nouvelle formule générale, d'où l'on déduit, par de simples substitutions, toutes les formules particulières connues, et sur-tout des formules d'aberration en longitude et en latitude pour les planètes, qui sont absolument conformes à celles d'aberration en ascension droite et en déclinaison pour les étoiles; en sorte que les unes étant connues, l'on peut en conclure les autres sans le moindre calcul : remarque utile et qui paraît avoir échappé aux astronomes.

I.

Principe sur lequel est fondée la solution du Problème de l'Aberration.

L'ABERRATION d'un astre, en ayant seulement égard au mouvement annuel de la Terre, est l'angle que la résultante de la vîtesse de notre globe et de celle de la lumière fait avec cette seconde composante. Il résulte de là que, par rapport au sens du mouvement de translation de la Terre, le lieu apparent d'un astre est toujours en avant de son lieu vrai.

L'aberration provenant du mouvement progressif d'un astre, est de même l'angle que la résultante de la vîtesse de cet astre et de celle de la lumière fait avec cette dernière composante. Il suit de cette composition des vîtesses et de la transmission successive de la lumière, qu'une planète ou une comète, relativement au sens de son mouvement apparent, est vue en arrière de son lieu vrai.

Cela posé, si l'aberration produite par le mouvement de la Terre est considérée comme positive, celle dépendante du mouvement d'une

Digitized by Google

planète sera négative ou positive, selon que ce mouvement sera direct ou rétrograde. En général, quel que soit le nombre des vîtesses qui donnent naissance à de pareilles illusions d'optique, l'aberration totale et absolue est la résultante de toutes les aberrations partielles. Le but qu'on se propose en astronomie est d'évaluer cette résultante décomposée perpendiculairement à un plan donné de position. Pour cet effet, l'on suppose que la molécule lumineuse qui arrive à notre œil était, à l'instant de son émission, non-seulement douée de sa vîtesse propre, mais encore de celle de l'astre et de la vîtesse de la terre, prise en sens contraire; ainsi, la résultante de ces trois vîtesses, décomposée perpendiculairement au plan que l'on considère, est l'aberration dans le lieu de l'astre. Il ne s'agit plus que de rapporter cette aberration à l'écliptique ou à l'équateur céleste, pour avoir l'aberration en longitude ou en ascension droite; c'est ce que l'on verra par la suite.

II.

Évaluation des Vîtesses de la Terre et des Astres qui ont un Mouvement propre apparent.

Avant de mettre en équation le problème très-simple de mécanique que l'on vient d'énoncer, cherchons d'abord l'expression numérique de la vîtesse de la Terre, celle de la lumière étant prise pour unité. Or, il est prouvé par l'observation des éclipses des satellites de Jupiter, que la lumière emploie $8'\,13'',2$ de temps pour parcourir le demi-grand axe de l'orbe terrestre; ainsi, en $493'',2$ la Terre, en vertu de son mouvement moyen, décrit un arc de $20'',25$. Telle serait sa vîtesse, si son orbite était circulaire; mais l'arc dS, qu'elle décrit dans l'instant dt, a en général pour expression

$$dS = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = (r^2\,dv^2 + dr^2)^{\frac{1}{2}},$$

r étant le rayon vecteur, et v l'angle qu'il fait avec l'axe des x; d'ailleurs,

Digitized by Google

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos.(v-\varpi)} = a(1-e^2)\,[1+e\cos.(v-\varpi)]^{-1},$$

a étant le demi-grand axe de l'orbe terrestre, $e = 0{,}0168$ le rapport de l'excentricité à cette droite, et ϖ l'angle que la ligne des apsides fait avec l'axe des x. A la vérité, à cause de la petitesse de cette excentricité et de celle de $dt = 493'',2$, il suffit, dans les développemens, de conserver la première puissance de e, ou, ce qui revient au même, de considérer le très-petit arc dS comme circulaire, mais ayant r pour rayon; ainsi, le rapport de la vîtesse de la Terre à celle de la lumière, sera sensiblement représenté par

$$ds = \frac{dS}{a} = \frac{r\,dv}{a} :$$

or, par la théorie du mouvement elliptique, on a (*Mécanique* de M. *Poisson*, tom. I, pag. 355),

$$r^2\,dv = abn\,dt,$$

b étant le demi-petit axe de l'orbite de la Terre, et $and\,t$ son mouvement moyen pendant dt: donc la vîtesse de la Terre, celle de la lumière étant prise pour unité, est

$$ds = \frac{r\,dv}{a} = \frac{and\,t}{a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}\,[1+e\cos.(v-\varpi)]$$

$$= \frac{20'',25}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}\,[1+e\cos.(v-\varpi)] = 20'',253\,[1+e\cos.(v-\varpi)];$$

car l'arc moyen $n\,dt$ faisant partie de la circonférence 2π, et étant réduit en secondes,

$$= \frac{2\pi\,dt}{T}\,R'' = 20'',25,$$

T étant la révolution sydérale de la Terre, et R'' le rayon réduit en secondes.

Digitized by Google

Il résulte de là que si ds' est la vîtesse d'une planète dont l'orbite soit de même très-peu excentrique, on aura, en mettant un trait aux lettres $a, b, e, r, v\ldots$ pour indiquer qu'elles sont relatives à l'orbite de la planète,

$$ds' = \frac{r'dv'}{a} = \frac{a'n'dt}{a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}\left[1+e'\cos.(v'-\varpi')\right],$$

expression dans laquelle a désigne l'espace parcouru par la lumière dans $8'\,13'',2$ de temps.

Le mouvement moyen $a'n'dt$ s'exprime en fonction du premier $andt$, ainsi qu'il suit.

Soit T' la révolution sydérale de la planète, et comme ci-dessus, T celle de la Terre; on aura par la troisième loi de *Képler*,

$$\frac{T^2}{T'^2} = \frac{a^3}{a'^3};$$

d'ailleurs,

$$ndt = \frac{2\pi dt}{T}, \quad n'dt = \frac{2\pi dt}{T'},$$

par conséquent,

$$n' = \frac{n\,a^{\frac{3}{2}}}{a'^{\frac{3}{2}}};$$

enfin prenant le rayon a pour unité de distance, on a

$$ds' = \frac{ndt}{\sqrt{[a'(1-e^2)]}}\left[1+e'\cos.(v'-\varpi')\right] = 20'',25\,\frac{\sqrt{(a')}}{b'}\left[1+e'\cos.(v'-\varpi')\right]:$$

telle est l'expression générale de la vîtesse d'une planète.

Ordinairement, on introduit dans les expressions précédentes de ds et ds' le mouvement horaire de la planète : or, relativement à la Terre, on a

$$n = \frac{20'',25}{dt} = \frac{20'',25}{493'',2},$$

Digitized by Google

n étant, comme l'on voit, le mouvement pour 1″. Soit donc M le mouvement horaire moyen, on aura

$$n = \frac{M}{3600''},$$

et par conséquent,

pour la Terre ..... $20'',25 = ndt = M\frac{493'',2}{3600''} = 0,137\,M$,

pour une planète ..... $n'dt = M'\frac{493'',2}{3600''} = 0,137\,M'$;

de là, en faisant $B = \frac{b}{a}$, c'est-à-dire, en prenant a pour unité de distance,

vîtesse de la Terre, $ds = 0,137\,\frac{M}{B}\,[1 + e\cos.(v - \varpi)]$,

vîtesse de la planète, $ds' = \mp 0,137\,M'\frac{a'^2}{b'}[1 + e'\cos.(v' - \varpi')]$;

le signe supérieur ayant lieu, si le mouvement de la planète est direct, et le signe inférieur devant être pris, si ce mouvement est rétrograde.

La vîtesse ds' d'une comète qui se meut dans une ellipse très-alongée, celle de la lumière étant toujours prise pour unité, est rigoureusement

$$ds' = (r'^2\,dv'^2 + dr'^2)^{\frac{1}{2}},$$

ainsi, à cause de

$$r' = \frac{a'(1 - e'^2)}{1 + e'\cos.(v' - \varpi')},$$

on a

$$dr' = \frac{a'e'(1 - e'^2)\,dv'\sin.(v' - \varpi')}{[1 + e'\cos.(v' - \varpi')]^2},$$

et par conséquent,

$$ds' = \frac{r'^2\,dv'}{a'(1 - e'^2)}\,[1 + e'^2 + 2e'\cos.(v' - \varpi')]^{\frac{1}{2}};$$

Digitized by Google

d'ailleurs,

$$r'^2\,dv' = a'\,b'\,n'\,dt,$$

et par suite,

$$ds' = \frac{a'\,n'\,dt}{(1-e'^2)^{\frac{1}{2}}}\left[1+e'^2+2\,e'\cos.(v'-\varpi')\right]^{\frac{1}{2}};$$

de plus, on a

$$n' = \frac{n}{a'^{\frac{3}{2}}},$$

d'où

$$ds' = \frac{n\,dt}{\sqrt{[a'(1-e'^2)]}}\left[1+e'^2+2\,e'\cos.(v'-\varpi')\right]^{\frac{1}{2}};$$

mais

$$a'(1-e'^2) = a'(1-e')(1+e') = h(1+e'),$$

h étant la distance périhélie; et comme les comètes décrivent sensiblement des paraboles, on a $e' = 1$; partant,

vîtesse des comètes, $$ds' = \frac{20'',25}{\sqrt{(2h)}}\left[2+2\cos.(v'-\varpi')\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{20'',25\,\sqrt{[2\cos.^{\frac{1}{2}}(v'-\varpi')]}}{\sqrt{(h)}}$$

$$= \frac{28'',64\cos.\frac{1}{2}(v'-\varpi')}{h^{\frac{1}{2}}} = \frac{28'',64\cos.\frac{1}{2}u'}{h^{\frac{1}{2}}},$$

u' étant l'anomalie vraie dans la parabole, comptée du périhélie. Selon que le mouvement d'une comète sera direct ou rétrograde, cette vîtesse se prendra négativement ou positivement.

III.

Recherche d'une nouvelle Formule générale d'Aberration.

Rapportons maintenant les points de l'espace à trois coordonnées rectangles ayant pour origine le centre de la Terre; prenons pour plan

Digitized by Google

des $x\,y$, l'écliptique ; pour axe des x, celui qui passe par l'équinoxe du printemps ; pour axe des y, celui sur lequel se trouve le point du Cancer ; pour axe des z, celui qui passe par le pôle nord de l'écliptique : enfin soient x, y, z les coordonnées du centre d'un astre observé.

Cela posé, si, par le centre de la Terre, on conçoit mené un plan ayant pour équation

$$(1) \qquad z, = Ax, + By,,$$

la perpendiculaire μ abaissée de l'astre sur ce plan, aura pour expression

$$\mu = \frac{Ax + By - z}{\sqrt{(1 + A^2 + B^2)}} = (Ax + By - z)\cos.\varphi,$$

φ étant, comme l'on sait, l'angle que ce même plan fait avec celui des $x\,y$.

Différenciant, on a

$$d\mu = (Adx + Bdy - dz)\cos.\varphi.$$

Cette valeur, en l'écrivant ainsi qu'il suit,

$$d\mu = ds\left(A\frac{dx}{ds} + B\frac{dy}{ds} - \frac{dz}{ds}\right)\cos.\varphi,$$

exprimera l'aberration due au mouvement de la Terre, décomposée perpendiculairement au plan (1), puisque ds est la vîtesse de la Terre. De même, pour l'aberration qui résulte du mouvement propre de l'astre observé, dont la vîtesse est ds', on aura

$$d\mu' = ds'\left(A\frac{dx'}{ds'} + B\frac{dy'}{ds'} - \frac{dz'}{ds'}\right)\cos.\varphi\,;$$

ainsi l'aberration totale $d\Sigma$ dans le lieu de cet astre, sera

$$d\mu + d\mu',$$

ou

Digitized by Google

$$d\Sigma = ds\left(A\frac{dx}{ds} + B\frac{dy}{ds} - \frac{dz}{ds}\right)\cos.\Phi$$
$$+ ds'\left(A\frac{dx'}{ds'} + B\frac{dy'}{ds'} - \frac{dz'}{ds'}\right)\cos.\Phi.$$

Mais $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ sont évidemment les cosinus des angles que la direction de la vîtesse ds, ou la tangente à l'orbite de la Terre, fait avec les axes des coordonnées.

Soient donc

$$\frac{dx}{ds} = \cos.\alpha\,; \quad \frac{dy}{ds_1} = \cos.\beta\,; \quad \frac{dz}{ds} = \cos.\gamma\,;$$

on aura de même relativement à l'orbite de l'astre,

$$\frac{dx'}{ds'} = \cos\alpha', \quad \frac{dy'}{ds'} = \cos.\beta', \quad \frac{dz'}{ds'} = \cos.\gamma';$$

et partant,

$$d\Sigma = ds\,(A\cos.\alpha + B\cos.\beta - \cos.\gamma)\cos.\varphi$$
$$+ ds'\,(A\cos.\alpha' + B\cos.\beta' - \cos.\gamma')\cos.\varphi.$$

Il importe de déterminer les coefficiens A, B en fonction de Φ et de la longitude géocentrique du nœud du plan (1), c'est-à-dire, de l'angle $\downarrow$ que sa trace sur celui des xy fait avec l'axe des x : or, cela est très-facile; car, d'une part, $\cos.\Phi = \frac{1}{\sqrt{(1+A^2+B^2)}}$, et de l'autre l'équation de la trace dont il s'agit étant $Ax_1 = -By_1$, on a

$$\text{tang.}\downarrow = \frac{y_1}{x_1} = -\frac{A}{B}.$$

Combinant cette valeur avec la précédente, on obtient

$$A = -\text{tang.}\,\varphi\,\sin.\downarrow, \qquad B = \text{tang.}\,\varphi\,\cos.\downarrow;$$

car les angles $\downarrow$ et Φ étant supposés aigus, B doit être positif : de là

Digitized by Google

$$(2)\quad d\Sigma = ds\,(-\sin.\Phi \sin.\downarrow \cos.\alpha + \sin.\Phi \cos.\downarrow \cos.\beta - \cos.\Phi \cos.\gamma)$$
$$+ ds'(-\sin.\Phi \sin.\downarrow \cos.\alpha' + \sin.\Phi \cos.\downarrow \cos.\beta' - \cos.\Phi \cos.\gamma');$$

Telle est la nouvelle formule générale d'aberration, applicable à tous les astres indistinctement, et qui dérive d'une analyse extrêmement simple.

IV.

Aberration des fixes.

MAINTENANT, rien n'est plus facile que de parvenir aux formules particulières d'aberration relatives aux étoiles. D'abord on a, dans cette circonstance, $ds' = 0$; et parce que la vîtesse ds, attribuée, en sens contraire du mouvement de la Terre, à la molécule lumineuse, est parallèle au plan de l'écliptique, on a, en outre, $\gamma = 90°$; d'ailleurs, de la relation connue,

$$\cos.^2\alpha + \cos.^2\beta + \cos.^2\gamma = 1,$$

on tire

$$\sin.\alpha = \pm \cos.\beta.$$

Le choix du signe n'est pas douteux; car, en plaçant la Terre entre les points Ariès et Cancer, l'angle $\alpha = \beta + 90$, et son sinus est nécessairement positif; ainsi la formule (2) se réduit à la suivante,

$$d\mu = ds\,(-\sin.\Phi \sin.\downarrow \cos.\alpha + \sin.\Phi \cos.\downarrow \sin.\alpha).$$

Soient L la longitude et λ la latitude vraies de l'étoile supposée dans la région boréale; alors si le plan (1) passe par le lieu vrai de cette étoile, et qu'il soit perpendiculaire à l'écliptique, on aura

$$\Phi = 90°, \quad \downarrow = L,$$

et $d\mu$ sera l'aberration en longitude dans le lieu de l'étoile; en sorte

Digitized by Google

qu'en la rapportant à l'écliptique, on aura

$$\text{aber. en long.} = \frac{d\mu}{\cos.\lambda} = \frac{ds}{\cos.\lambda} \sin.(\alpha - L).$$

Si le plan (1), passant toujours par l'étoile, est au contraire perpendiculaire au cercle de latitude de cette étoile, on aura

$$\Phi = \lambda, \quad \downarrow = L - 90,$$

et l'aberration en latitude sera $-d\mu$, parce que la Terre étant supposée s'éloigner du plan (1), l'étoile est, par l'effet de l'aberration, rapprochée de l'écliptique (*); ainsi

$$\text{aber. en lat.} = -d\mu = -ds \sin.\lambda \cos.(\alpha - L).$$

On obtient de même, sans peine, les aberrations en ascension droite et en déclinaison. En effet, si pour plan des xy, on choisit l'équateur au lieu de l'écliptique, et que du reste on conserve la ligne des équinoxes pour l'axe des x; les angles $\downarrow$ et Φ, que nous désignerons maintenant par $\Phi_{,}$, $\downarrow_{,}$ ..... seront relatifs à ce nouveau plan, et l'on aura encore pour la formule générale d'aberration relative aux fixes,

$$d\mu = ds(-\sin.\Phi_{,}\sin.\downarrow_{,}\cos.\alpha_{,} + \sin.\Phi_{,}\sin.\downarrow_{,}\cos.\beta_{,} - \cos.\Phi_{,}\cos.\gamma_{,}).$$

Soit ω l'obliquité de l'écliptique; si par le centre de ce grand cercle on mène dans son plan une droite parallèle à la direction de la vîtesse de la Terre, qui est tangente à l'orbite, cette parallèle, l'axe des x et le nouvel axe des y passeront par les sommets d'un triangle sphérique dont les trois côtés seront $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, 90°, et l'angle opposé à $\beta_{,}$ sera $= \omega$. De plus, la même parallèle, l'axe des x et le nouvel axe des z détermineront les sommets d'un autre triangle sphérique dont les côtés seront $\alpha_{,}$, $\gamma_{,}$, 90°, et dans lequel l'angle opposé à $\gamma_{,} = 90 - \omega$; de

(*) Je dois avouer que j'ai puisé l'idée du plan mobile (1), dans l'*Astronomie* de M. *Delambre*; mais j'en ai fait ici une application très-générale.

Digitized by Google

sorte qu'on aura sur-le-champ, d'après la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique

$$\cos.\alpha_{,} = \cos.\alpha,$$
$$\cos.\beta_{,} = \sin.\alpha \cos.\omega,$$
$$\cos.\gamma_{,} = \sin.\alpha \sin.\omega;$$

substituant ces valeurs dans l'équation précédente, il viendra

$$d\mu = ds\,(-\sin.\Phi_{,}\sin.\Psi_{,}\cos.\alpha + \sin.\Phi_{,}\cos.\Psi_{,}\sin.\alpha\cos.\omega - \cos.\Phi_{,}\sin.\alpha\sin.\omega).$$

Maintenant, désignons par $\mathcal{R}$ et D l'ascension droite et la déclinaison vraies de l'étoile, et faisons d'abord, comme ci-dessus, $\Phi_{,} = 90°$; on aura $\Psi_{,} = \mathcal{R}$, et $-\frac{d\mu}{\cos.D}$ sera l'aberration sur l'équateur; ainsi

$$\text{aber. en ascen. dr.} = \frac{d\mu}{\cos D} = \frac{ds}{\cos.D}(-\sin.\mathcal{R}\cos.\alpha + \cos.\mathcal{R}\sin.\alpha\cos.\omega).$$

Faisons ensuite $\Phi_{,} = D$; on aura $\Psi_{,} = \mathcal{R} - 90°$, et pour lors

$$\text{aber. en décl.} = -d\mu = -ds(\sin.D\cos.\mathcal{R}\cos.\alpha + \sin.D\sin.\mathcal{R}\sin.\alpha\cos.\omega - \cos.D\sin.\alpha\sin.\omega).$$

Ces quatre formules particulières d'aberration étant fonction de l'angle α que la tangente à l'orbite terrestre fait avec l'axe des x, il s'agit d'en éliminer cet angle. Pour y parvenir, désignons par θ l'angle que la tangente dont il s'agit fait avec la ligne des apsides ou le grand axe de l'orbite terrestre. Dans ce cas, l'on aura $\text{tang.}\,\theta = \frac{dy''}{dx''}$, x'' et y'' étant les coordonnées héliocentriques de la Terre, rapportées aux axes de l'orbite; et comme dans cette hypothèse,

$$x'' = r\cos.(v - \varpi), \qquad y'' = r\sin.(v - \varpi),$$

Digitized by Google

on a

$$\text{tang. } \theta = \frac{dy''}{dx''} = \frac{dr \sin.(v-\varpi) + r dv \cos.(v-\varpi)}{dr \cos.(v-\varpi) - r dv \sin.(v-\varpi)};$$

de plus, à cause de

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos.(v-\varpi)},$$

on a encore

$$dr = \frac{ae(1-e^2)\,dv \sin.(v-\varpi)}{[1+e\cos.(v-\varpi)]^2};$$

donc, réductions faites,

$$\text{tang. } \theta = \frac{e+\cos.(v-\varpi)}{-\sin.(v-\varpi)}.$$

Soit δ l'angle que la normale à la Terre fait avec son rayon vecteur, on aura visiblement

$$\alpha = \theta + \varpi \quad \text{et} \quad \delta = v + 90° - \alpha = v - \varpi + 90 - \theta;$$

de là

$$\text{tang. } \delta = \frac{\text{tang.}(v-\varpi)\ \text{tang. } \theta + 1}{\text{tang. } \theta - \text{tang.}(v-\varpi)} = \frac{e \sin.(v-\varpi)}{1+e\cos.(v-\varpi)};$$

par suite,

$$\delta = e \sin.(v-\varpi) - \tfrac{1}{2}e^2 \sin. 2(v-\varpi) + \ldots\ldots;$$

puis,

$$\alpha = 90 + v - e \sin.(v-\varpi)$$
$$= \Theta - 90 - e \sin.(\Theta - \Pi);$$

car v est la longitude héliocentrique de la Terre, ϖ celle du périhélie, Θ la longitude du soleil, et Π celle du périgée. Enfin

sin.

Digitized by Google

$$\sin.\alpha = -\cos.\Theta - e\sin.\Theta\sin.(\Theta-\Pi);$$

$$\cos.\alpha = \sin.\Theta - e\cos.\Theta\sin.(\Theta-\Pi),$$

$$\sin.(\alpha-L) = -\cos.(\Theta-L) - e\sin.(\Theta-L)\sin.(\Theta-\Pi),$$

$$\cos.(\alpha-L) = \sin.(\Theta-L) + e\cos.(\Theta-L)\sin.(\Theta-\Pi),$$

$$ds = 20'',253[1+e\cos.(\Theta-\Pi)] = 20'',253+0'',34\cos.(\Theta-\Pi).$$

Substituant toutes ces valeurs dans les quatre formules d'aberration précédentes, et ne conservant que les termes de l'ordre e, on aura définitivement

$$(3)\begin{cases}\text{aber. long.} = -\frac{20'',253}{\cos.\lambda}\{\cos.(\Theta-L)+e\cos.(\Pi-L)\},\\ \text{aber. latit.} = -20'',253\sin.\lambda\{\sin.(\Theta-L)+e\sin.(\Pi-L)\};\end{cases}$$

$$(4)\begin{cases}\text{aber. asc. dr.} = -\frac{20'',253}{\cos.D}\begin{Bmatrix}\cos\omega\cos\text{Æ}\cos\Theta+\sin\text{Æ}\sin\Theta\\ +e\cos\omega\cos\text{Æ}\cos\Pi+e\sin\text{Æ}\sin\Pi\end{Bmatrix},\\ \text{aber. décl.} = -20'',253\sin.D\begin{Bmatrix}-\cos\omega\sin\text{Æ}\cos\Theta+\cos\text{Æ}\sin\Theta\\ -e\cos\omega\sin\text{Æ}\cos\Pi+e\cos\text{Æ}\sin\Pi\end{Bmatrix}\\ \qquad -20'',253\cos D(\sin\omega\cos\Theta+e\sin\omega\cos\Pi).\end{cases}$$

Vu la petitesse de l'excentricité de l'orbite de la Terre, les astronomes sont dans l'usage de négliger les termes qui dépendent de cette excentricité; mais il est facile d'en tenir compte, si l'on veut.

V.

Aberration des Planètes.

La formule (2) exprime en général l'aberration des planètes; mais il s'agit de particulariser les valeurs de cos. α', cos. β', cos. γ', de manière à ce que cette formule donne les aberrations en longitude et en latitude; car, pour la première partie de l'aberration commune à

Digitized by Google

tous les astres, nous venons de lui donner la forme convenable dans la pratique.

D'abord, en n'ayant égard qu'à la partie de l'aberration dépendante du mouvement propre de la planète, on a en général par ce qui précède, et en désignant toujours par L et λ la longitude et la latitude géocentriques vraies de la planète,

$$(5)\begin{cases} \text{aber. long. partiel.} = \frac{ds'}{\cos.\lambda}(-\cos.\alpha' \sin.L + \cos.\beta' \cos.L), \\ \text{aber. latit. partiel.} = -ds'(\cos.\alpha' \sin.\lambda \cos.L + \cos.\beta' \sin.\lambda \sin.L \\ \qquad\qquad - \cos.\gamma' \cos.\lambda). \end{cases}$$

Maintenant concevons, comme précédemment, par le centre du soleil une droite située dans le plan de l'orbite de la planète, et parallèle à la direction de son mouvement, c'est-à-dire à la tangente à l'orbite; désignons par n la longitude héliocentrique du nœud ascendant de cette orbite, par R l'angle de la tangente dont il s'agit et de la ligne des nœuds, enfin par I l'inclinaison de l'orbite. La parallèle à la tangente, la ligne des nœuds et celle des équinoxes passeront par les sommets d'un triangle sphérique dont les côtés seront α', R, n, et dont l'angle opposé à $\alpha' = 180 - I$. De même, la parallèle, la ligne des nœuds et l'axe des y passeront par les sommets d'un autre triangle ayant R, $90° - n$ et β' pour côtés, et dont l'angle opposé à $\beta' = I$; enfin la parallèle, la ligne des nœuds et l'axe des z détermineront un troisième triangle dont les côtés seront α', $90°$, γ'; de là, et en vertu de la propriété fondamentale de la trigonométrie sphérique, on a sur-le-champ,

$$\cos.\alpha' = \cos.R \cos.n - \sin.R \sin.n \cos.I,$$
$$\cos.\beta' = \cos.R \sin.n + \sin.R \cos.n \cos.I,$$
$$\cos.\gamma' = \sin.R \sin.I.$$

Substituant ces valeurs dans les deux formules précédentes, on aura

Digitized by Google

$$(6)\begin{cases}\text{aber. long. part.} = \dfrac{ds'}{\cos.\lambda}\left[-\cos R\sin(L-n)+\sin R\cos I\cos(L-n)\right],\\ \text{aber. latit. part.} = -\,ds'\left[\begin{matrix}\sin\lambda\cos R\cos(L-n)+\sin\lambda\sin R\cos I\sin(L-n)\\ -\cos\lambda\sin R\sin I\end{matrix}\right],\end{cases}$$

Il faut encore remplacer ici R et ds' par leurs valeurs trouvées précédemment, savoir,

$$R = 90 + v' - e'\sin.(v' - \varpi'),$$

et

$$ds' = -\,20'',25\,\frac{\sqrt{(a')}}{b'}\left[1 + e'\cos.(v' - \varpi')\right]$$

$$= -\,0,137\,M'\,\frac{a'^2}{b'}\,(1 + e'\cos.u'),$$

en désignant par u' l'anomalie vraie, et en supposant le mouvement de la planète direct; de là

$$(7)\begin{cases}\text{aber. long. part.} = -\dfrac{20'',25}{\cos\lambda}\,\dfrac{\sqrt{(a')}}{b'}\left[\begin{matrix}\cos(L-n)\cos I\cos v'+\sin(L-n)\sin v'\\ +e'\cos(L-n)\cos I\cos\varpi'+e'\sin(L-n)\sin\varpi'\end{matrix}\right],\\ \text{aber. latit. part.} = -\,20'',25\,\dfrac{\sqrt{(a')}}{b'}\sin\lambda\left[\begin{matrix}-\sin(L-n)\cos I\cos v'+\cos(L-n)\sin v'\\ -e'\sin(L-n)\cos I\cos\varpi'+e'\cos(L-n)\sin\varpi'\end{matrix}\right]\\ \qquad -\,20'',25\,\dfrac{\sqrt{(a')}}{b'}\cos\lambda\left[\sin I\cos v'+e\sin I\cos\varpi'\right].\end{cases}$$

Si à ces valeurs partielles, tout-à-fait analogues aux formules (4), on ajoute celles (3), on aura les aberrations totales en longitude et en latitude sous la forme la plus simple qu'il soit possible de leur donner; ces valeurs rentrent dans celles que M. *Biot* a obtenues de son côté (*Astronomie physique*, tom. III, pag. 173), en y faisant

$$\cos.I = 1 - 2\sin.^2\tfrac{1}{2}I, \quad b' = a' \text{ et réduisant;}$$

et elles deviennent identiques à celles de M. *Delambre*, à l'aide des transformations suivantes qui sont un peu longues, mais au reste très-

Digitized by Google

faciles, lorsqu'on se propose d'introduire l'anomalie vraie $u' = v' - \varpi'$ de la planète, comptée du périhélie, et la parallaxe annuelle.

En effet, si de la planète on abaisse une perpendiculaire sur le plan de l'écliptique, le pied de cette perpendiculaire sera le sommet de l'angle P que font entre elles les lignes tirées au soleil et à la Terre; et si on désigne par C l'arc de l'écliptique compris entre le nœud ascendant de la planète et son cercle de latitude héliocentrique Λ, le triangle sphérique rectangle, dont les côtés sont v', C, Λ, offrira ces relations,

$$\cos. C = \frac{\cos. v'}{\cos. \Lambda}, \qquad \text{tang. } C = \cos. I \text{ tang. } v',$$

$$\sin. C = \frac{\cos. I \sin. v'}{\cos. \Lambda} \qquad \sin. \Lambda = \sin. I \sin. v'.$$

D'un autre côté, il est évident que l'on a

$$L - n = L - (L - P - C) = P + C;$$

ainsi, dans la première formule (7), le facteur

$$\begin{aligned} &\cos.(L-n) \cos. I \cos. v' + \sin.(L-n) \sin. v' \\ &= \cos.(P+C) \cos. I \cos. v' + \sin.(P+C) \sin. v' \\ &= \frac{1}{\cos. \Lambda} (\cos. I \cos. P + \sin. v' \cos. v' \sin.^2 I \sin. P). \end{aligned}$$

A l'aide des mêmes relations et de ce que $\varpi' = v' - u'$, le second facteur

$$\begin{aligned} &e' [\cos.(L-n) \cos. I \cos. \varpi' + \sin.(L-n) \sin. \varpi'] \\ &= e' [\cos.(P+C) \cos. I \cos.(v'-u') + \sin.(P+C) \sin.(v'-u')] \\ &= \frac{e'}{\cos. \Lambda} [\cos. I \cos. P \cos. u' - \cos.^2 \Lambda \sin. P \sin. u' + \sin. v' \cos. v' \cos. u' \sin. P \sin.^2 I]. \end{aligned}$$

Les deux termes du premier facteur de la seconde formule (7) étant

Digitized by Google

de même forme que ceux qu'on vient de développer, il est visible que l'on obtiendra sur-le-champ leurs développemens, en changeant dans les résultats précédens,

$$\cos. P \text{ en } -\sin. P, \quad \text{et} \quad \sin. P \text{ en } \cos. P;$$

ainsi, d'après cette remarque, et à cause que $20'',25 = 0,137\, M' a'^{\frac{3}{2}}$, les formules (7) se changeront en les suivantes :

$$\text{aber. long. part.} = + \frac{0,137}{\cos. \Lambda \sin. \lambda} \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{a'^2}{b'} M' \cos. I\right) \cos. P - \left(\frac{1}{2} \frac{a'^2}{b'} M' \sin.^2 I\right) \sin. 2v' \sin. P \\ -\left(\frac{a'^2}{b'} e' M' \cos. I\right) \cos. P \cos. u' + \left(\frac{a'^2}{b'} e' M' \cos^2 \Lambda\right) \sin. P \sin. u' \\ -\left(\frac{a'^2}{2b'} e' M' \sin.^2 I\right) \sin. 2v' \sin. P \cos. u' \end{array} \right\}$$

$$\text{aber. latit. part.} = + 0,137 \frac{\sin. \lambda}{\cos. \Lambda} \left\{ \begin{array}{l} +\left(\frac{a'^2}{b'} M' \cos. I\right) \sin. P - \left(\frac{1}{2} \frac{a'^2}{b'} M' \sin.^2 I\right) \sin. 2v' \cos. P \\ +\left(\frac{a'^2}{b'} e' M' \cos. I\right) \sin. P \cos. u' + \left(\frac{a'^2}{b'} e' M' \cos^2 \Lambda\right) \cos. P \sin. u' \\ -\left(\frac{a'^2}{2b'} e' M' \sin.^2 I\right) \sin. 2v' \cos. P \cos. u' \end{array} \right\}$$

$$- 0,137 \cos. \lambda \left[\left(\frac{a'^2}{b'} M' \sin. I\right) \cos. v' + \left(\frac{a'^2}{b'} e' M' \sin. I\right) \cos. (v' - u'). \right]$$

Ces résultats, qui se déduisent très-naturellement de nos formules, sont absolument conformes à ceux que M. *Delambre* vient de publier dans son *Traité d'astronomie* in-4.°, tom. III, pag. 125 et suiv., et auxquels il est arrivé par une voie très-différente.

REMARQUE.

Les formules (7), faciles à mettre en tables, ont une analogie si frappante avec celles numérotées (4), qu'il est naturel de penser que les unes peuvent être modifiées de manière à produire sur-le-champ les

Digitized by Google

autres ; aussi est-il à remarquer que les aberrations en ascension droite et en déclinaison, résultantes du mouvement de translation de la Terre, se changent en aberrations en longitude et en latitude dues au mouvement direct d'une planète, en mettant $L-n$ pour $\mathcal{R}$, λ pour D, e' pour e, I pour ω, $v'+180$ pour Θ, $\varpi'+180$ pour Π, enfin $-20'',25\frac{\nu(\mu')}{b'}$ pour $20'',25$: propriété à laquelle personne, je crois, n'a encore fait attention, et que l'on peut très-bien reconnaître *à priori*. En effet, si l'on considère le centre de la Terre comme le foyer d'une courbe égale et parallèle à l'orbite même de la planète, les lignes des nœuds de ces deux courbes seront parallèles entre elles. Si ensuite on conçoit un corps sur la courbe dont il s'agit, lequel ait précisément la même position et la même vîtesse que la planète supposée immobile, l'aberration relative au mouvement de ce corps fictif, sera, abstraction faite du signe, la même que celle qui résulte du mouvement réel de la planète; ainsi l'écliptique, le corps fictif, son orbite et la planète immobile, par hypothèse, composent exactement le même système que l'équateur céleste, la Terre, son orbite et une étoile. Donc, dans le premier système, la distance angulaire v' comprise entre le nœud de l'orbite fictive et le corps qui est censé la décrire, est une espèce de longitude par rapport à cette courbe ; tandis que les arcs $L-n$ et λ correspondent respectivement à une ascension droite et à une déclinaison.

VI.

Aberration des Comètes.

La remarque de l'article précédent s'applique évidemment à une comète; cependant les formules (4), qui ne sont qu'approximatives, puisqu'elles ne conviennent qu'à une ellipse très-peu excentrique, ne peuvent, dans le cas actuel, se transformer en aberrations analogues à celles (7); mais en remontant aux équations (6), la question sera de

Digitized by Google

suite résolue, en substituant dans ces équations pour R et ds' leurs valeurs convenables. Les résultats auxquels on parviendra seront encore de même forme que ceux qui se rapportent aux ascensions droites et aux déclinaisons des étoiles, abstraction faite toutefois des termes dépendant de l'excentricité; et l'on pourra ensuite les faire rentrer dans ceux qu'a publiés M. *Delambre :* voici ce calcul.

La valeur de ds' relative aux comètes, a été trouvée à l'article II. Quant à celle de R, c'est-à-dire de l'angle que la direction de la vîtesse d'une comète fait avec la ligne des nœuds de l'orbite, on a en général par l'article IV,

$$\text{tang. } \theta = \text{tang. } (R - \varpi') = \frac{e' + \cos.(v' - \varpi')}{-\sin.(v' - \varpi')} = \frac{e' + \cos. u'}{-\sin. u'},$$

et pour le cas de la parabole,

$$\text{tang. } \theta = \text{tang. } (R - \varpi') = \frac{1 + \cos. u'}{-\sin. u'} = -\frac{1}{\text{tang. } \frac{1}{2} u'};$$

de là

$$R - \varpi' = 90 + \tfrac{1}{2} u',$$

et enfin

$$R = 90 + \left(v' - \frac{u'}{2}\right).$$

Maintenant, si l'on substitue ces valeurs de ds' et de R dans les formules (6), on aura définitivement, en supposant le mouvement de la comète direct,

$$\begin{cases} \text{aber. long. part.} = -\dfrac{28'',64 \cos. \frac{1}{2} u'}{h^{\frac{1}{2}} \cos. \lambda} \left[\sin.\left(v' - \dfrac{u'}{2}\right) \sin.(L - n) + \cos. I \cos.\left(v' - \dfrac{u'}{2}\right) \cos.(L - n)\right] \\ \text{aber. lat. part.} = -\dfrac{28'',64 \cos. \frac{1}{2} u'}{h^{\frac{1}{2}}} \sin. \lambda \left[\sin.\left(v' - \dfrac{u'}{2}\right) \cos.(L - n) - \cos. I \cos.\left(v' - \dfrac{u'}{2}\right) \sin.(L - n)\right] \\ \qquad\qquad - \dfrac{28'',64 \cos. \frac{1}{2} u'}{h^{\frac{1}{2}}} \cos. \lambda \left[\sin. I \cos.\left(v' - \dfrac{u'}{2}\right)\right]. \end{cases}$$

Digitized by Google

Pour rendre ces formules fonction de la parallaxe P, il faudra d'abord y mettre $P+C$ au lieu de $L-n$ (art. précéd.), puis développer et réduire au moyen des relations

$$\sin. C = \frac{\cos. I \sin. \nu'}{\cos. \Lambda}, \quad \cos. C = \frac{\cos. \nu'}{\cos. \Lambda}, \quad \sin. \Lambda = \sin. I \sin. \nu'$$

déjà employées; mais ce développement est tout effectué dans l'article cité, il faut seulement y changer u' en $\frac{u'}{2}$; c'est-à-dire que, dans la première équation (8), le facteur

$$\sin.\left(\nu' - \frac{u'}{2}\right) \sin.(L-n) + \cos. I \cos.\left(\nu' - \frac{u'}{2}\right) \cos.(L-n)$$

$$= \frac{1}{\cos. \Lambda} \left[\cos. I \cos. P \cos. \frac{u'}{2} - \cos.^2 \Lambda \sin. P \sin. \frac{u'}{2} + \sin. \nu' \cos. \nu' \cos. \frac{u'}{2} \sin. P \sin.^2 I \right];$$

et si, dans ce facteur, l'on change $\cos. P$ en $-\sin. P$ et $\sin. P$ en $\cos. P$, on aura le résultat de la transformation du facteur,

$$\sin.\left(\nu' - \frac{u'}{2}\right) \cos.(L-n) - \cos. I \cos.\left(\nu' - \frac{u'}{2}\right) \sin.(L-n)$$

de la deuxième équation (8), ce qui est évident.

Enfin, si l'on fait attention que le facteur du second terme de cette dernière équation (8), c'est-à-dire,

$$\cos. \tfrac{1}{2} u' \sin. I \cos.\left(\nu' - \frac{u'}{2}\right) = \sin. I \cos. \nu' \cos.^2 \tfrac{1}{2} u' + \sin. I \sin. \nu' \sin. \frac{u'}{2} \cos. \frac{u'}{2}$$

$$= \sin. I \cos. \nu' \cos.^2 \frac{u'}{2} + \tfrac{1}{2} \sin. I \sin. \nu' \sin. u'$$

$$= \frac{\sin. I}{2} \left(\sin. \nu' \sin. u' + 2 \cos. \nu' \cos.^2 \frac{u'}{2} \right)$$

$$= \frac{\sin. I}{2} \left[\cos. \nu' + \cos.(\nu' - u') \right],$$

on

Digitized by Google

on aura, comme M. *Delambre* l'a trouvé le premier,

$$\text{aber. long. part.} = -\frac{28'',64\cos.I}{h^{\frac{1}{2}}\cos.\lambda\cos.\Lambda}\cos.P\cos.^2\frac{u'}{2}+\frac{14'',32\cos.\Lambda}{h^{\frac{1}{2}}\cos.\lambda}\sin.P\sin.u'$$

$$-\frac{14'',32\sin.^2I}{h^{\frac{1}{2}}\cos.\lambda\cos\Lambda}\sin.2v'\sin.P\cos.^2\frac{u'}{2};$$

$$\text{aber. lat. part.} = +\frac{28'',64\cos.I}{h^{\frac{1}{2}}\cos.\Lambda}\sin.\lambda\sin.P\cos.^2\frac{u'}{2}+\frac{14'',32\sin.\lambda}{h^{\frac{1}{2}}}\cos.\Lambda\cos.P\sin.u'$$

$$-\frac{14'',32\sin.^2I}{h^{\frac{1}{2}}\cos.\Lambda}\sin.2v'\sin.\lambda\cos.P\cos.^2\tfrac{1}{2}u'$$

$$-\frac{14'',32\sin.I}{h^{\frac{1}{2}}}\cos.\lambda\cos.v'-\frac{14'',32\sin.I}{h^{\frac{1}{2}}}\cos.\lambda\cos.(v'-u').$$

De cette manière, ces formules, ainsi que toutes celles qui précèdent, découlent de la même source, et sont démontrées très-simplement.

N. B. Dans la vue d'abréger, l'on supprime ici le VII.e article, qui contient une autre Méthode analytique pour trouver toutes les formules d'aberration; ce qui précède ne laisse d'ailleurs rien à desirer à cet égard.

Digitized by Google

MÉMOIRE

SUR L'EXPRESSION ANALYTIQUE

DE L'ÉLASTICITÉ ET DE LA RAIDEUR

DES COURBES À DOUBLE COURBURE ;

Lu à l'Institut le 22 Août 1814,

PAR M. J. BINET.

QUAND une cause quelconque détermine un changement de forme dans une ligne matérielle à double courbure, en la concevant partagée dans sa longueur en élémens infiniment petits, ce changement peut être rapporté pour chacun de ses points à trois espèces distinctes de variations ; 1.° à une extension ou contraction de l'élément de la courbe dans le sens de sa longueur ; 2.° à une augmentation ou une diminution de l'angle de contingence formé par deux élémens infiniment petits consécutifs, ou à une flexion de la courbe ; 3.° à une augmentation ou à une diminution de l'angle de contingence compris par deux plans osculateurs consécutifs répondant au même point, et cela peut être nommé une torsion.

Si la courbe matérielle est élastique, c'est-à-dire, si elle s'oppose aux changemens de forme que des forces tendent à lui imprimer, on pourra toujours considérer cette résistance en chaque point, comme provenant de trois espèces de forces s'opposant aux trois sortes de variations dont

Digitized by Google

nous venons de parler. La force contraire à l'extension ou à la contraction longitudinale des élémens de la courbe s'appelle la tension; celle qui résiste à l'ouverture ou à la diminution de l'angle de contingence est nommée communément l'élasticité de l'angle de la courbe, ou plus simplement l'élasticité de la courbe, parce que c'est la seule avec la tension que l'on ait considérées jusqu'à présent. La troisième force tend à empêcher l'angle de contingence de deux plans osculateurs consécutifs de changer : cette nouvelle sorte d'élasticité s'exerce par le moyen de la torsion de l'élément de la courbe. Ce genre de force se développe principalement dans les courbes à double courbure, et les géomètres paraissent jusqu'à présent avoir entièrement négligé de le considérer; aussi M. *Lagrange*, en s'occupant du problème que nous traitons ici, est-il parvenu à des équations, exactes sans doute, pour les courbes qui ne seraient douées que des deux premières espèces d'élasticité, ou pour les courbes planes sollicitées par des forces situées dans leur plan, mais qui sont loin de convenir au problème général des courbes à double courbure élastique. Qu'on se figure, par exemple, un fil métallique plié en forme d'hélice, comme le sont les ressorts appelés *ressorts à boudins*. Si une force agit de manière à rapprocher ou à éloigner les deux extrémités de ce ressort, on voit assez que le changement de forme qu'il éprouvera aura lieu sur-tout aux dépens de la torsion du fil métallique.

Les trois espèces d'élémens géométriques que je viens de considérer comme variables dans une courbe élastique, sont constans pour une courbe raide, et les géomètres savent qu'il en résulte que les équations indéfinies que fournissent ces deux problèmes, doivent se présenter absolument sous la même forme, ou doivent pouvoir y être ramenées; et qu'elles ne diffèrent que par leur objet, c'est-à-dire par les choses qu'elles doivent déterminer. Il est très-singulier que l'auteur de la *Mécanique analytique*, qui a insisté sur cette remarque dans plusieurs occasions, en ait négligé l'application dans le problème des courbes élas-

Digitized by Google

tiques à courbure double. Il eût été conduit à considérer le genre des forces de torsion, qui se présentent d'ailleurs si naturellement dans cette question. Elles ont même un autre avantage dans l'expression de la raideur; c'est de faire éviter les forces provenant des indéterminées que M. *Lagrange* emploie à multiplier les variations de certaines fonctions différentielles, qui doivent être constantes dans une courbe rigide et invariable de forme. En examinant quelles sont ces forces, on reconnaît que deux d'entre elles sont infinies, l'une du premier ordre, l'autre du second ordre. La raison de cette circonstance extraordinaire se trouve dans la fonction que ces forces sont destinées à remplir; c'est ce qu'on verra suffisamment dans le cours de ce mémoire. M. *Lagrange* n'ayant pas cherché la signification géométrique particulière de chacune des trois quantités différentielles qui doivent être invariables, semble n'avoir pas aperçu l'inconvénient dont je parle.

Pour répandre un peu de clarté sur un sujet assez délicat de mécanique analytique, j'ai dû commencer par traiter les questions de l'équilibre de plusieurs forces agissant sur des polygones dont les côtés seraient des verges droites et rigides. Je dois prévenir ici que le mode de liaison que je suppose entre ces verges semblera peu naturel, et qu'en lisant cette partie de mon travail, on devra ne pas oublier qu'elle est toute préparatoire, et qu'elle devient explicative de ce qui la suit. On devra encore se rappeler que ce mémoire est sur-tout propre à compléter et à éclaircir plusieurs chapitres du bel ouvrage de M. *Lagrange*, et que tous les détails que l'on pourrait desirer en le lisant, y sont omis, parce qu'ils sont exposés dans la *Mécanique analytique*.

Ayant donc été porté à considérer de nouveaux élémens dans les courbes et les polygones construits d'une manière quelconque dans l'espace, on trouvera dans mon mémoire quelques nouvelles expressions et de nouvelles formules relatives à leur géométrie.

Digitized by Google

[1.] Prenons dans l'espace plusieurs points désignés par les numéros 1, 2, 3, &c., et supposons que ces points soient joints par des droites $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{34}$, &c., formant une chaîne continue. Représentons ces droites successives par a, a', a'', &c., et les coordonnées orthogonales du premier point par x, y, z; celles du second par x', y', z'; celles du troisième par x'', y'', z'', &c. : on sait que

$$a^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2,$$
$$a'^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2,$$
&c.

où Δx représente la différence $x' - x$ et Δx^2 son carré.

Les coordonnées relatives des points 2, 3, 4 à l'égard du premier pris pour origine, sont

$$x' - x, \quad x'' - x, \quad x''' - x, \quad \&c.,$$
$$y' - y, \quad y'' - y, \quad y''' - y, \quad \&c.,$$
$$z' - z, \quad z'' - z, \quad z''' - z, \quad \&c.;$$

c'est-à-dire,

$$\Delta x, \quad \Delta x + \Delta x', \quad \Delta x + \Delta x' + \Delta x'', \quad \&c.,$$
$$\Delta y, \quad \Delta y + \Delta y', \quad \Delta y + \Delta y' + \Delta y'', \quad \&c.,$$
$$\Delta z, \quad \Delta z + \Delta z', \quad \Delta z + \Delta z' + \Delta z'', \quad \&c.;$$

ou bien

$$\Delta x, \quad 2\Delta x + \Delta^2 x, \quad 3\Delta x + 3\Delta^2 x + \Delta^3 x, \quad \&c.,$$
$$\Delta y, \quad 2\Delta y + \Delta^2 y, \quad 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y, \quad \&c.,$$
$$\Delta z, \quad 2\Delta z + \Delta^2 z, \quad 3\Delta z + 3\Delta^2 z + \Delta^3 z, \quad \&c.$$

Le cosinus de l'angle aa' des deux premiers côtés est

$$\cos. \widehat{aa'} = \frac{\Delta x\,\Delta x' + \Delta y\,\Delta y' + \Delta z\,\Delta z'}{a\,a'}.$$

Digitized by Google

Le carré du sinus sera donc

$$(f_1)\quad \sin.^2\widehat{aa'} = \frac{(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)(\Delta x'^2+\Delta y'^2+\Delta z'^2)-(\Delta x\Delta x'+\Delta y\Delta y'+\Delta z\Delta z')^2}{a^2 a'^2};$$

En multipliant par le produit $a^2a'^2$ des carrés des deux côtés de l'angle, il restera seulement le numérateur pour le carré de la surface du parallélogramme construit sur les deux premiers côtés aa', et on pourra donner à cette expression la forme

$$(\Delta y\,\Delta z'-\Delta z\,\Delta y')^2+(\Delta z\,\Delta x'-\Delta x\,\Delta z')^2+(\Delta x\,\Delta y'-\Delta y\,\Delta x')^2;$$

le terme $\Delta y\,\Delta z'-\Delta z\,\Delta y'$ est la projection de ce rhombe sur le plan des yz; il est égal à $\Delta y\,\Delta^2 z-\Delta z\,\Delta^2 y$, ainsi l'expression de ce parallélogramme est encore

$$\sqrt{[(\Delta y\Delta^2 z-\Delta z\Delta^2 y)^2+(\Delta z\Delta^2 x-\Delta x\Delta^2 z)^2+(\Delta x\Delta^2 y-\Delta y\Delta^2 x)^2]}.$$

[2.] En considérant trois côtés consécutifs a, a', a'', par l'extrémité de chacun, menons un plan passant par les autres, ou qui leur soit parallèle ; il résultera de cette construction un parallélipipède dont quatre arêtes seront égales et parallèles à a, quatre autres à a', et les quatre dernières à a''.

Le volume de ce corps sera exprimé, comme on sait, par

$$\Delta x(\Delta y+\Delta y')(\Delta z+\Delta z'+\Delta z'')-\Delta x(\Delta z+\Delta z')(\Delta y+\Delta y'+\Delta y'')$$
$$+\Delta y(\Delta z+\Delta z')(\Delta x+\Delta x'+\Delta x'')-\Delta y(\Delta x+\Delta x')(\Delta z+\Delta z'+\Delta z'')$$
$$+\Delta z(\Delta x+\Delta x')(\Delta y+\Delta y'+\Delta y'')-\Delta z(\Delta y+\Delta y')(\Delta x+\Delta x'+\Delta x''),$$

effaçant les termes qui d'eux-mêmes se détruisent, il reste

$$\Delta x\,\Delta y'\,\Delta z'' + \Delta y\,\Delta z'\,\Delta x'' + \Delta z\,\Delta x'\,\Delta y''$$
$$-\Delta x\,\Delta z'\,\Delta y'' - \Delta y\,\Delta x'\,\Delta z'' - \Delta z\,\Delta y'\,\Delta x''.$$

Substituons-y les valeurs de Δx, $\Delta x'$, $\Delta x''$, Δy, $\Delta y'$, &c., en fonction

Digitized by Google

de Δx, $\Delta^2 x$, $\Delta^3 x$, Δy, &c., et supprimons encore les termes qui se détruisent, cette même expression du volume deviendra

$$\begin{aligned}&\Delta x\,\Delta^2 y\,\Delta^3 z + \Delta y\,\Delta^2 z\,\Delta^3 x + \Delta z\,\Delta^2 x\,\Delta^3 y\\ &- \Delta x\,\Delta^2 z\,\Delta^3 y - \Delta y\,\Delta^2 x\,\Delta^3 z - \Delta z\,\Delta^2 y\,\Delta^3 x,\end{aligned}$$

où l'on peut remarquer, comme dans l'expression du parallélogramme construit sur a et a', que les $\Delta x'$, $\Delta x''$, $\Delta y'$, $\Delta y''$, &c., sont remplacés par des $\Delta^2 x$, $\Delta^3 x$, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, &c.; la raison en deviendra évidente ci-dessous, art. [4.].

Le carré de cette fonction peut être mis sous la forme

$$\begin{aligned}&(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) \times (\Delta^2 x^2 + \Delta^2 y^2 + \Delta^2 z^2) \times (\Delta^3 z^2 + \Delta^3 y^2 + \Delta^3 z^2)\\ &+ 2 \left\{ \begin{array}{l} (\Delta^2 x\,\Delta^3 x + \Delta^2 y\,\Delta^3 y + \Delta^2 z\,\Delta^3 z)\\ \times (\Delta^3 x\,\Delta x + \Delta^3 y\,\Delta y + \Delta^3 z\,\Delta z)\\ \times (\Delta x\,\Delta^2 x + \Delta y\,\Delta^2 y + \Delta z\,\Delta^2 z) \end{array} \right\}\\ &- (\Delta^2 x\,\Delta^3 x + \Delta^2 y\,\Delta^3 y + \Delta^2 z\,\Delta^3 z)^2 \times (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)\\ &- (\Delta^3 x\,\Delta x + \Delta^3 y\,\Delta y + \Delta^3 z\,\Delta z)^2 \times (\Delta^2 x^2 + \Delta^2 y^2 + \Delta^2 z^2)\\ &- (\Delta x\,\Delta^2 x + \Delta y\,\Delta^2 y + \Delta z\,\Delta^2 z)^2 \times (\Delta^3 x^2 + \Delta^3 y^2 + \Delta^3 z^2).\end{aligned}$$

(*Voyez* le mémoire de M. *Lagrange*, sur la Rotation des corps; 1773, *Berlin*, ou le tome précédent de ce Journal.)

Les trois côtés a, a', a'' n'étant pas dans un même plan, le plan des deux premiers forme avec celui du second et du troisième un angle qu'il nous sera utile d'avoir déterminé. Le sinus de cet angle est égal au produit du volume du parallélipipède par son arête commune aux deux plans, divisé par le produit des deux faces comprises dans ces plans; ce sinus, pour l'angle des plans qui se coupent selon a', sera donc

$$(f_2)\qquad \frac{\left\{ \begin{array}{l} \Delta x\,\Delta^2 y\,\Delta^3 z + \Delta y\,\Delta^2 z\,\Delta^3 x + \Delta z\,\Delta^2 x\,\Delta^3 y\\ - \Delta x\,\Delta^2 z\,\Delta^3 y - \Delta y\,\Delta^2 x\,\Delta^3 z - \Delta z\,\Delta^2 y\,\Delta^3 x \end{array} \right\} \sqrt{\{\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2\}}}{\sqrt{\left\{ \begin{array}{l} [(\Delta y\,\Delta^2 z - \Delta z\,\Delta^2 y)^2 + (\Delta z\,\Delta^2 x - \Delta x\,\Delta^2 z)^2 + (\Delta x\,\Delta^2 y - \Delta y\,\Delta^2 x)^2]\\ \times [(\Delta y'\Delta^2 z' - \Delta z'\Delta^2 y')^2 + (\Delta z'\Delta^2 x' - \Delta x'\Delta^2 z')^2 + (\Delta x'\Delta^2 y' - \Delta y'\Delta^2 x')^2] \end{array} \right\}}}$$

Digitized by Google

pour que les trois côtés a, a', a'' soient situés dans un même plan, il faut que cette quantité soit nulle, ou que

$$0 = \Delta x\,\Delta^2 y\,\Delta^3 z + \Delta y\,\Delta^2 z\,\Delta^3 x + \Delta z\,\Delta^2 x\,\Delta^3 y - \Delta x\,\Delta^2 z\,\Delta^3 y - \Delta y\,\Delta^2 x\,\Delta^3 z - \Delta z\,\Delta^2 y\,\Delta^3 x,$$

et cette condition devrait se vérifier pour chacun des $n-3$ premiers sommets, n étant le nombre total, si tout le polygone était dans un même plan.

[3.] Ayant une courbe à double courbure, si, à partir d'un point quelconque, on prend trois élémens consécutifs infiniment petits, tout ce que nous venons de dire d'un polygone pourra convenir à la courbe, et les formules n'éprouveront que le changement de la caractéristique des différences finies Δ en celle d des différences infiniment petites. Le parallélogramme construit sur les côtés a, a' du polygone se change en celui de deux côtés infiniment petits consécutifs, qui est infiniment petit du troisième ordre, puisque les deux côtés et leur angle sont infiniment petits. Son expression est

$$\sqrt{[(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2]}.$$

Divisant cette surface par le produit des deux élémens consécutifs, ou ce qui revient au même ici, par le carré ds^2 de l'élément de la courbe, on aura le sinus de l'angle de contingence ou de l'angle de deux côtés consécutifs dont dépend le rayon de la courbure ordinairement considéré; cet angle infiniment petit, qui ne diffère pas de son sinus, est donc

$$(f_3) \qquad \frac{\sqrt{\{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2\}}}{ds^2}.$$

On aura pareillement l'angle compris par deux plans osculateurs consécutifs, en substituant dans la formule (f_2) des différentielles au lieu des différences et enlevant les accens; cet angle pris pour son sinus, sera

(f_3')

Digitized by Google

$$(f_3'') \qquad ds\,\frac{dx\,d^2y\,d^3z+dy\,d^2z\,d^3x+dz\,d^2x\,d^3y-dx\,d^2z\,d^3y-dy\,d^2x\,d^3z-dz\,d^2y\,d^3x}{(dy\,d^2z-dz\,d^2y)^2+(dz\,d^2x-dx\,d^2z)^2+(dx\,d^2y-dy\,d^2x)^2}:$$

C'est précisément cet angle qui constitue la seconde courbure de la courbe. Pour qu'elle devienne plane, il faut qu'en tous ses points la précédente fonction devienne nulle, ou que l'on ait

$$0 = dx\,d^2y\,d^3z+dy\,d^2z\,d^3x+dz\,d^2x\,d^3y-dx\,d^2z\,d^3y-dy\,d^2x\,d^3z-dz\,d^2y\,d^3x.$$

(Voyez le *Calcul différentiel* de M. *Lacroix*, tom. I.er, p. 631, nouv. édit.)

[4.] Reprenons le polygone 1, 2, 3, &c., formé des côtés a, a', a'', &c.; prolongeons le côté a' vers le point 2 qui lui sert d'origine, d'une quantité égale à sa longueur; on arrivera ainsi à un point dont les coordonnées seront $x' - \Delta x'$, $y' - \Delta y'$, $z' - \Delta z'$. ou bien $x - \Delta^2 x$, $y - \Delta^2 y$, $z - \Delta^2 z$. Nommons $3'$ ce point. Répétons la même construction aux sommets 3, 4, &c., nous aurons pour coordonnées des extrémités des prolongemens des côtés a'', a''', &c.,

$$x'-\Delta^2 x',\quad y'-\Delta^2 y',\quad z'-\Delta^2 z';\quad x''-\Delta^2 x'',\quad y''-\Delta^2 y'',\quad \&c.$$

Nommons ces points $3''$, $3'''$, $3''''$, &c., et joignons-les respectivement aux points 1, 2, 3, 4, &c., par des droites b, b', b'', &c. Les longueurs de ces droites seront données par les équations

$$b^2 = \Delta^2 x^2 + \Delta^2 y^2 + \Delta^2 z^2,$$
$$b'^2 = \Delta^2 x'^2 + \Delta^2 y'^2 + \Delta^2 z'^2,$$
$$b''^2 = \Delta^2 x''^2 + \Delta^2 y''^2 + \Delta^2 z''^2,$$
$$\&c.$$

Au premier des points $3'$ que nous venons de construire, menons une parallèle égale à b' dirigée depuis $3'$, comme elle l'est de $3''$ à 2; nous arriverons à un point $4'$, dont les coordonnées seront $x - \Delta^3 x + \Delta^2 x'$,

$y - \Delta^3 y + \Delta^2 y'$, $z - \Delta^3 z + \Delta^3 z'$, ou $x + \Delta^3 x$, $y + \Delta^3 y$, $z + \Delta^3 z$; nommons c sa distance au point 1. Semblablement au point $3''$ menons une parallèle égale à b'' et dirigée dans le même sens; nous arriverons ainsi à un point $4''$, dont les coordonnées seront $x' + \Delta^3 x'$, $y' + \Delta^3 y'$, $z' + \Delta^3 z'$, et sa distance au point 2 sera nommée c' : on aura

$$c^2 = \Delta^3 x^2 + \Delta^3 y^2 + \Delta^3 z^2,$$
$$c'^2 = \Delta^3 x'^2 + \Delta^3 y'^2 + \Delta^3 z'^2,$$
&c.

Après avoir mené au point $4'$ une parallèle égale à c', au point $4''$, une parallèle égale à c'', &c., et ainsi de suite pour les constructions ultérieures qui dépendent du nombre n des points proposés 1, 2, 3, &c., nous aurons construit $n-2$ points marqués $3'$, $4'$, $5'$, &c., séparés par les distances b', c', d', &c.; $n-3$ points marqués $3''$, $4''$, $5''$, &c.; $n-4$ marqués $3'''$, $4'''$, &c., et séparés par les distances b'', c'', d'', &c. b''', c''', d''', &c. Aux points 1, 2 réunissant les $n-2$ points $3'$, $4'$, $5'$, &c., on aura en tout n points séparés pour les distances a, a', b', c', &c., qui forment un polygone de $n-1$ côtés comme le polygone primitif. A commencer du point 2, les lignes a', a'', b'', c'', &c., forment aussi un autre polygone qui est à l'égard du polygone 2, 3, 4, &c., ce que le polygone 1, 2, $3'$, $4'$, $5'$, &c., est par rapport au proposé. Au point 3, pareille chose a lieu, et ainsi à tous les autres.

Les coordonnées des sommets 1, 2, $3'$, $4'$, $5'$, &c., du nouveau polygone qui répond au point 1, sont donc

$$x,\quad x + \Delta x,\quad x - \Delta^2 x,\quad x + \Delta^3 x,\quad \text{&c.},$$
$$y,\quad y + \Delta y,\quad y - \Delta^2 y,\quad y + \Delta^3 y,\quad \text{&c.},$$
$$z,\quad z + \Delta z,\quad z - \Delta^2 z,\quad z + \Delta^3 z,\quad \text{&c.}$$

Digitized by Google

Nommons $x_,$, $x_,'$, $x_,''$, $x_,'''$, &c.; $y_,$, $y_,'$, $y_,''$, $y_,'''$, &c.; $z_,$, $z_,'$, $z_,''$, $z_,'''$, &c.; ces coordonnées. Celles d'un polygone qui serait à l'égard de celui qui nous occupe, ce que ce polygone est relativement au polygone proposé, auraient aussi pour valeurs

$$x_,,\quad x_, + \Delta x_,,\quad x_, - \Delta^2 x_,,\quad x_, + \Delta^3 x_,,\quad \&c.,$$
$$y_,,\quad y_, + \Delta y_,,\quad y_, - \Delta^2 y_,,\quad y_, + \Delta^3 y_,,\quad \&c.,$$
$$z_,,\quad z_, + \Delta z_,,\quad z_, - \Delta^2 z_,,\quad z_, + \Delta^3 z_,,\quad \&c.$$

Or, en désignant par i un numéro quelconque,

$$\Delta^i x_, = x_,^{(i)} - i x_,^{(i-1)} + i\,\frac{i-1}{2}\,x_,^{(i-2)} - i\,\frac{i-1}{2}\cdot\frac{i-2}{3}\,x_,^{(i-3)} + \&c.$$

Substituant dans cette formule pour les $x_,^{(i)}$, $x_,^{(i-1)}$, &c. leurs valeurs données en x, Δx, $\Delta^2 x$, &c., on aura

$$\Delta^i x_, = x\left[1 - i + i\,\frac{i-1}{2} - i\,\frac{i-1}{2}\cdot\frac{i-2}{3} + \&c.\right]$$
$$\mp\left[\Delta^i x + i\,\Delta^{(i-1)} x + i\,\frac{i-1}{2}\,\Delta^{i-2} x + \&c. + i\,\Delta x\right].$$

Le signe — ayant lieu, si le nombre i est pair. Le multiplicateur de x dans cette valeur est $(1-1)^i = 0$, et la seconde partie est égale à $x^{(i)} - x$; on a donc $\Delta^i x_, = \mp(x^{(i)} - x)$. il en résulte que les coordonnées $x_,$ ci-dessus reviennent à

$$x_,,\quad x_, + x' - x,\quad x_, + x'' - x,\quad \&c.;$$

c'est-à-dire à x, x', x'', x''', &c.; et pour les y et z, on aura aussi y, y', y'', &c.; z, z', z'', z''', &c. On voit donc que ce nouveau polygone est précisément le polygone proposé. Cette réciprocité est assez singulière; on la peut déduire de la considération directe de la cons-

Digitized by Google

truction par laquelle on passe de l'un de ces polygones à l'autre. Elle permettra de nommer *réciproques* les polygones dérivés de cette manière, si l'on trouve que leur considération puisse être utile. Ils ont beaucoup d'autres propriétés, dont nous développerons peut-être ailleurs les plus remarquables.

La construction du polygone réciproque d'un polygone proposé, revient à ceci : Prolongez le dernier côté de toute sa longueur vers le point marqué $n-1$, et joignez l'extrémité de ce prolongement au point $n-2$ par une droite à laquelle vous aurez à conduire une parallèle par l'extrémité du prolongement de l'avant-dernier côté : vous joindrez encore cette extrémité au point $n-3$ ainsi que celle de la parallèle ; et après avoir prolongé le second-avant-dernier côté de sa longueur, vous menerez une parallèle égale à la première des deux droites précédentes qui vont au point $n-3$, et par son extrémité une parallèle égale à la seconde ; après avoir joint encore les sommets de ce nouveau polygone par des droites au point $n-4$, vous continuerez la construction de la même manière jusqu'au dernier côté. Vous aurez construit ainsi les polygones réciproques des polygones formés des deux derniers côtés du proposé, de ses trois derniers côtés, de ses quatre derniers..., et enfin de tous ses côtés.

Un polygone a deux polygones réciproques différens qui répondent à chacune de ses extrémités et au sens dans lequel on suit son contour. La distance de l'extrémité du dernier côté d'un de ces polygones réciproques à l'origine de son premier côté, est égale à la ligne analogue de l'autre.

[5.] Maintenant prenons un système de trois points 1, 2, 3, auxquels sont appliquées trois forces P, P', P'', dont nous désignerons

Digitized by Google

les composantes par X, Y, Z, X', Y', &c., dans le sens des trois axes coordonnés. Nous supposons que les verges a, a' qui séparent ces points, soient susceptibles d'extension ou de contraction, quoique restant inflexibles et droites; que les forces longitudinales de ces verges, lorsque l'équilibre sera établi, soient A, A'; et quelle que soit la réaction du troisième point sur le premier, nous la supposerons remplacée par une force intérieure B, agissant dans la direction d'une droite b qui joint le point 1 au point 3', que l'on trouve en prolongeant de toute sa longueur le côté inflexible a'. En supposant ce système entièrement libre, la somme des momens virtuels de toutes ces forces sera

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z + X'\delta x' + Y'\delta y' + Z'\delta z' + X''\delta x'' + Y''\delta y'' + Z''\delta z'' + A\delta a + A'\delta a' + B\delta b,$$

et pour l'équilibre de ces forces, cette somme doit être nulle. Mais on a

$$a^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2,$$
$$a'^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2,$$
$$b^2 = \Delta^2 x^2 + \Delta^2 y^2 + \Delta^2 z^2,$$

et par conséquent,

$$\delta a = \frac{\Delta x}{a}\delta\Delta x + \frac{\Delta y}{a}\delta\Delta y + \frac{\Delta z}{a}\delta\Delta z,$$
$$\delta a' = \frac{\Delta x'}{a'}\delta\Delta x' + \frac{\Delta y'}{a'}\delta\Delta y' + \frac{\Delta z'}{a'}\delta\Delta z',$$
$$\delta b = \frac{\Delta^2 x}{b}\delta\Delta^2 x + \frac{\Delta^2 y}{b}\delta\Delta^2 y + \frac{\Delta^2 z}{b}\delta\Delta^2 z;$$

or,

$$\delta\Delta x = \delta x' - \delta x, \quad \delta\Delta x' = \delta x'' - \delta x', \quad \delta\Delta^2 x = \delta x'' - 2\delta x' + \delta x$$

et les valeurs de $\delta\Delta y$, $\delta\Delta y'$, $\delta\Delta^2 y$, $\delta\Delta z$, &c., se forment

Digitized by Google

de la même manière. Puisque le système est libre, on devra égaler à zéro les termes de la somme des momens multipliés par chacune des variations indépendantes δx, $\delta x'$, &c., δy, &c.; on aura donc pour l'équilibre de ces forces les neuf équations suivantes qui expriment de trois en trois l'équilibre des forces agissant en chaque point:

$$
\begin{aligned}
0 &= X - \frac{A}{a}\Delta x + \frac{B}{b}\Delta^2 x,\\
0 &= Y - \frac{A}{a}\Delta y + \frac{B}{b}\Delta^2 y,\\
0 &= Z - \frac{A}{a}\Delta z + \frac{B}{b}\Delta^2 z,\\
0 &= X' + \frac{A}{a}\Delta x - \frac{A'}{a'}\Delta x' - 2\frac{B}{b}\Delta^2 x,\\
0 &= Y' + \frac{A}{a}\Delta y - \frac{A'}{a'}\Delta y' - 2\frac{B}{b}\Delta^2 y, \qquad (f_5)\\
0 &= Z' + \frac{A}{a}\Delta z - \frac{A'}{a'}\Delta z' - 2\frac{B}{b}\Delta^2 z,\\
0 &= X'' + \frac{A'}{a'}\Delta x' + \frac{B}{b}\Delta^2 x,\\
0 &= Y'' + \frac{A'}{a'}\Delta y' + \frac{B}{b}\Delta^2 y,\\
0 &= Z'' + \frac{A'}{a'}\Delta z' + \frac{B}{b}\Delta^2 z.
\end{aligned}
$$

[6.] En ajoutant ces équations trois à trois, savoir, la 1.re à la 4.e, à la 7.e; la 2.e à la 5.e, à la 8.e; la 3.e à la 6.e, à la 9.e, on aura

$$X+X'+X''=0, \quad Y+Y'+Y''=0, \quad Z+Z'+Z''=0.$$

Ajoutant la 5.e multipliée par Δz, à la 6.e multipliée par $-\Delta y$, à la 8.e multipliée par $\Delta z+\Delta z'$, et à la 9.e multipliée par $-(\Delta y+\Delta y')$, on trouvera que les termes dépendans des forces intérieures A, A', B,

Digitized by Google

se détruisent encore, et il vient

$$Y'\Delta z - Z'\Delta y + Y''(\Delta z + \Delta z') - Z''(\Delta y + \Delta y') = 0,$$

et semblablement,

$$Z'\Delta x - X'\Delta z + Z''(\Delta x + \Delta x') - X''(\Delta z + \Delta z') = 0,$$
$$X'\Delta y - Y'\Delta x + X''(\Delta y + \Delta y') - Y''(\Delta x + \Delta x') = 0.$$

Ces six équations, sont les relations générales des forces extérieures au système. On peut, pour le système de trois points, remplacer ces trois dernières par d'autres plus simples à interpréter. Multiplions les trois premières équations respectivement par

$$\Delta y\,\Delta^2 z - \Delta z\,\Delta^2 y, \quad \Delta z\,\Delta^2 x - \Delta x\,\Delta^2 z, \quad \Delta x\,\Delta^2 y - \Delta y\,\Delta^2 x;$$

et les ajoutons : les termes multipliés par A et B se détruisent, et il vient

$$X(\Delta y\Delta^2 z - \Delta z\Delta^2 y) + Y(\Delta z\Delta^2 x - \Delta x\Delta^2 z) + Z(\Delta x\Delta^2 y - \Delta y\Delta^2 x),$$

équation qui exprime que la force P, résultante de X, Y, Z, est comprise dans le plan des trois points 1, 2, 3. Les deux autres équations qu'on tirerait des six dernières, exprimeraient la même condition à l'égard des forces P', P''.

[7.] Des trois premières équations ci-dessus (f_5), éliminons B, nous pourrons arriver aux trois suivantes, dont deux comportent la troisième.

$$Y\Delta^2 z - Z\Delta^2 y = \frac{A}{a}(\Delta y\,\Delta^2 z - \Delta z\,\Delta^2 y),$$
$$Z\Delta^2 x - X\Delta^2 z = \frac{A}{a}(\Delta z\,\Delta^2 x - \Delta x\,\Delta^2 z),$$
$$X\Delta^2 y - Y\Delta^2 x = \frac{A}{a}(\Delta x\,\Delta^2 y - \Delta y\,\Delta^2 x);$$

et de là, en faisant la somme des carrés et extrayant la racine,

Digitized by Google

$$A = a\,\frac{\sqrt{[(Y\Delta^2 z - Z\Delta^2 y)^2 + (Z\Delta^2 x - X\Delta^2 z)^2 + (X\Delta^2 y - Y\Delta^2 x)^2]}}{\sqrt{[(\Delta y\Delta^2 z - \Delta z\Delta^2 y)^2 + (\Delta z\Delta^2 x - \Delta x\Delta^2 z)^2 + (\Delta x\Delta^2 y - \Delta y\Delta^2 x)^2]}},$$

et par les mêmes procédés,

$$B = b\,\frac{\sqrt{[(Y\Delta z - Z\Delta y)^2 + (Z\Delta x - X\Delta z)^2 + (X\Delta y - Y\Delta x)^2]}}{\sqrt{[(\Delta y\Delta^2 z - \Delta z\Delta^2 y)^2 + (\Delta z\Delta^2 x - \Delta x\Delta^2 z)^2 + (\Delta x\Delta^2 y - \Delta y\Delta^2 x)^2]}}.$$

Le numérateur de la première expression peut être mis sous la forme

$$\sqrt{[(X^2+Y^2+Z^2)(\Delta^2 x^2+\Delta^2 y^2+\Delta^2 z^2) - (X\Delta^2 x + Y\Delta^2 y + Z\Delta^2 z)^2]};$$

mais X, Y, Z sont les composantes rectangulaires d'une force P; ainsi $X^2 + Y^2 + Z^2 = P^2$; et l'on a d'ailleurs

$$b^2 = \Delta^2 x^2 + \Delta^2 y^2 + \Delta^2 z^2 \quad \text{et} \quad X\Delta^2 x + Y\Delta^2 y + Z\Delta^2 z = Pb \cos.\widehat{Pb},$$

où l'on désigne par $\cos.\widehat{Pb}$ le cosinus de l'angle formé par la direction de la force P avec b qui est la direction de la tension B; le numérateur ci-dessus revient donc à $\sqrt{(P^2b^2 - P^2 b^2 \cos.^2\widehat{Pb})}$, ou bien à $Pb \sin.\widehat{Pb}$.

Quant au dénominateur, c'est [1.] le parallélogramme construit sur les lignes a et a', et il est facile de voir qu'il est équivalent à celui construit sur les droites a, b ou à $ab \sin.\widehat{ab}$: il s'ensuit $A = \frac{abP \sin.\widehat{Pb}}{ab \sin.\widehat{ab}} = \frac{P \sin.\widehat{Pb}}{\sin.\widehat{ab}}$, et de la même manière, on a aussi $B = P\,\frac{\sin.\widehat{Pa}}{\sin.\widehat{ab}}$; en sorte que les forces A et B sont les composantes de P dans le sens de a et b, comme cela doit être.

[8.] Souvent l'action du point 3 sur le point 1 a lieu au moyen d'une force d'élasticité de l'angle 2, que l'on considère comme s'opposant

à

Digitized by Google

à ce que l'angle 1 2 3 s'ouvre ou se ferme. Il nous semble qu'alors on regarde cette force comme la tension d'un fil qui serait assujetti à conserver la forme d'un arc de cercle décrit du point 2 sommet de l'angle comme centre ; de manière que les extrémités de ce fil étant perpendiculaires aux deux côtés de l'angle, cette force de tension est aussi perpendiculaire aux mêmes côtés, aux points d'attaches du fil sur ces verges a et a' : c'est du moins ainsi qu'on fait entrer communément l'élasticité d'un angle dans le calcul. En désignant cette tension du fil, ou cette élasticité de l'angle 2 par E, et par e le supplément de l'angle $\widehat{aa}$ des deux verges, angle mesuré par la longueur de l'arc de cercle intercepté par ses côtés, et dont nous supposons la tension désignée par E; on aura pour le moment virtuel de la force E, $E\delta e$. Or, pour déterminer l'angle e, on a dans le triangle $aa'b$, $\cos. e = \frac{a^2 + a'^2 - b^2}{2aa'}$:

donc $$-\sin. e \,.\, \delta e = \frac{\delta a}{2}\left[\frac{1}{a'} - \frac{a'}{a^2} + \frac{b^2}{a^2 a'}\right] + \frac{\delta a'}{2}\left[\frac{1}{a} - \frac{a}{a'^2} + \frac{b^2}{aa'^2}\right] - \frac{b\,\delta b}{aa'},$$

en divisant par $-\sin. e$, le terme multiplié par δa sera $\frac{a^2 + b^2 - a'^2}{-2a.aa'\sin. e}$; mais $aa'\sin. e = aa'\sin. \widehat{aa'} = ab\sin. \widehat{ab}$, et $a^2 + b^2 - a'^2 = 2ab\cos. \widehat{ab}$; ainsi ce terme égale $-\frac{\cos. \widehat{ab}}{a.\sin. \widehat{ab}}$. Le terme multiplié par $\delta a'$ sera aussi $-\frac{\cos. \widehat{a'b}}{a'\sin. \widehat{a'b}}$, et le dernier $\frac{b.\delta b}{aa'\sin. \widehat{aa'}} = \frac{b\,\delta b}{b.h} = \frac{\delta b}{h}$, h étant la distance du sommet 2 au côté b : donc

$$\delta e = -\frac{\delta a}{a\ \text{tang.}\ \widehat{ab}} - \frac{\delta a'}{a'\ \text{tang.}\ \widehat{a'b}} + \frac{\delta b}{h},$$

Représentons par $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ les tensions des verges a, a', qui alors auront lieu : elles ne seront plus les mêmes que les A, A' que nous avons eues ci-dessus, lorsque nous supposions que ces deux forces intérieures concouraient avec la force B pour produire l'équilibre. La somme des momens virtuels de ces nouvelles tensions et de l'élasticité E, sera

$$\mathfrak{a}\,\delta a + \mathfrak{a}'\,\delta a' + E\,\delta e,$$

ou bien

$$\left(\mathfrak{a} - \frac{E}{a \text{ tang. } \widehat{ab}}\right)\delta a + \left(\mathfrak{a}' - \frac{E}{a' \text{ tang. } \widehat{ab}}\right)\delta a' + \frac{E}{h}\,\delta b,$$

et cette somme devra remplacer celle $A\,\delta a + A'\,\delta a' + B\,\delta b$ des forces intérieures de l'art. [5.]; on aura donc

$$A = \mathfrak{a} - E : a \text{ tang. } \widehat{ab}, \quad A' = \mathfrak{a}' - E : a' \text{ tang. } \widehat{a'b}, \quad B = E : h;$$

ce que l'on pourrait retrouver par la décomposition des forces, et la comparaison de leurs momens.

[9.] Considérons encore quatre points sollicités par des forces extérieures P, P', P'', P''', dont les composantes seront X, Y, Z; X', Y', Z'; X'', &c. Quelles que soient les réactions de ces points les uns sur les autres, on pourra toujours concevoir dans l'équilibre, leur effet remplacé par celui, 1.° des tensions longitudinales des côtés a, a', a'' du polygone formé par ces quatre points, et nous nommerons ces tensions A, A', A''; 2.° des tensions de deux lignes b, b' qui joindront, la première le point 1 à l'extrémité 3′ de a' prolongé de toute sa longueur, dans le sens $\overline{32}$; la seconde, b', l'extrémité 3″ de a'' prolongé dans le sens $\overline{43}$ de toute sa longueur, et ces nouvelles tensions seront B, B'; 3.° enfin de la ten-

Digitized by Google

sion C d'une droite c réunissant le point 1 au point $4'$ déterminé, en menant par le point $3'$ une parallèle égale à b'. On voit que le polygone formé par les points 1, 2, $3'$, $4'$, est celui que nous avons nommé ci-dessus [4.] le polygone réciproque du polygone 1 2 3 4; nous aurons, d'après ce qui a été démontré là,

$$a^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2,$$
$$a'^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2,$$
$$a''^2 = \Delta x''^2 + \Delta y''^2 + \Delta z''^2,$$
$$b^2 = \Delta^2 x^2 + \Delta^2 y^2 + \Delta^2 z^2,$$
$$b'^2 = \Delta^2 x'^2 + \Delta^2 y'^2 + \Delta^2 z'^2,$$
$$c^2 = \Delta^3 x^2 + \Delta^3 y^2 + \Delta^3 z^2.$$

On doit bien présumer que cette liaison peu naturelle, entre les points 1, 2, 3, 4, n'est employée ici que parce qu'elle servira d'explication à ce qui doit suivre; et c'est aussi la seule raison qui nous fait reprendre la question de l'équilibre des forces agissant sur les polygones matériels.

La somme des momens virtuels de toutes ces forces tant extérieures qu'intérieures, sera

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z + X'\delta x' + Y'\delta y' + \&c.$$
$$+ A\delta a + A'\delta a' + A''\delta a'' + B\delta b + B'\delta b' + C\delta c,$$

et si le système est entièrement libre, comme nous le supposons, cette somme devra être nulle, quelles que soient les variations indépendantes

$$\delta x, \quad \delta y, \quad \delta z, \quad \delta x', \quad \delta y', \quad \delta z', \quad \&c.$$

Digitized by Google

Or,

$$\delta a = \frac{\Delta x}{a}\,\delta\Delta x + \frac{\Delta y}{a}\,\delta\Delta y + \frac{\Delta z}{a}\,\delta\Delta z,$$

$$\delta a' = \frac{\Delta x'}{a'}\,\delta\Delta x' + \frac{\Delta y'}{a'}\,\delta\Delta y' + \frac{\Delta z'}{a'}\,\delta\Delta z',$$

$$\delta a'' = \frac{\Delta x''}{a''}\,\delta\Delta x'' + \frac{\Delta y''}{a''}\,\delta\Delta y'' + \frac{\Delta z''}{a''}\,\delta\Delta z'',$$

$$\delta b = \frac{\Delta^2 x}{b}\,\delta\Delta^2 x + \frac{\Delta^2 y}{b}\,\delta\Delta^2 y + \frac{\Delta^2 z}{b}\,\delta\Delta^2 z,$$

$$\delta b' = \frac{\Delta^2 x'}{b'}\,\delta\Delta^2 x' + \frac{\Delta^2 y'}{b'}\,\delta\Delta^2 y' + \frac{\Delta^2 z'}{b'}\,\delta\Delta^2 z',$$

$$\delta c = \frac{\Delta^3 x}{c}\,\delta\Delta^3 x + \frac{\Delta^3 y}{c}\,\delta\Delta^3 y + \frac{\Delta^3 z}{c}\,\delta\Delta^3 z;$$

et

$$\delta\Delta x = \delta x' - \delta x, \quad \delta\Delta y = \delta y' - \delta y, \quad \delta\Delta z = \delta z' - \delta z,$$

$$\delta\Delta x' = \delta x'' - \delta x', \quad \delta\Delta y' = \delta y'' - \delta y', \quad \delta\Delta z' = \delta z'' - \delta z',$$

$$\delta\Delta x'' = \delta x''' - \delta x'', \quad \delta\Delta y'' = \delta y''' - \delta y'', \quad \&c.,$$

$$\delta\Delta^2 x = \delta x'' - 2\delta x' + \delta x, \quad \delta\Delta^2 y = \delta y'' - 2\delta y' + \delta y, \quad \&c.$$

$$\delta\Delta^2 x' = \delta x''' - 2\delta x'' + \delta x', \quad \delta\Delta^2 y' = \delta y''' - \&c., \quad \&c.$$

$$\delta\Delta^3 x = \delta x''' - 3\delta x'' + 3\delta x' - \delta x, \quad \delta\Delta^3 y = \delta y''' - \&c., \&c.$$

Substituant ces valeurs des $\delta\Delta$ dans celles de δa, $\delta a'$, $\delta a''$, δb, &c. et celles-ci dans la somme des momens ; égalant ensuite à zéro les termes multipliés par les variations indépendantes δx, δy, &c., on aura les équations

Digitized by Google

$$0 = X - \frac{A}{a}\Delta x + \frac{B}{b}\Delta^2 x - \frac{C}{c}\Delta^3 x, \qquad (f_9)$$

$$0 = Y - \frac{A}{a}\Delta y + \frac{B}{b}\Delta^2 y - \frac{C}{c}\Delta^3 y,$$

$$0 = Z - \frac{A}{a}\Delta z + \frac{B}{b}\Delta^2 z - \frac{C}{c}\Delta^3 z,$$

$$0 = X' + \frac{A}{a}\Delta x - \frac{A'}{a'}\Delta x' - 2\frac{B}{b}\Delta^2 x + \frac{B'}{b'}\Delta^2 x' + 3\frac{C}{c}\Delta^3 x,$$

$$0 = Y' + \frac{A}{a}\Delta y - \frac{A'}{a'}\Delta y' - 2\frac{B}{b}\Delta^2 y + \frac{B'}{b'}\Delta^2 y' + 3\frac{C}{c}\Delta^3 y,$$

$$0 = Z' + \frac{A}{a}\Delta z - \frac{A'}{a'}\Delta z' - 2\frac{B}{b}\Delta^2 z + \frac{B'}{b'}\Delta^2 z' + 3\frac{C}{c}\Delta^3 z,$$

$$0 = X'' + \frac{A'}{a'}\Delta x' - \frac{A''}{a''}\Delta x'' + \frac{B}{b}\Delta^2 x - 2\frac{B'}{b'}\Delta^2 x' - 3\frac{C}{c}\Delta^3 x,$$

$$0 = Y'' + \frac{A'}{a'}\Delta y' - \frac{A''}{a''}\Delta y'' + \frac{B}{b}\Delta^2 y - 2\frac{B'}{b'}\Delta^2 y' - 3\frac{C}{c}\Delta^3 y,$$

$$0 = Z'' + \frac{A'}{a'}\Delta z' - \frac{A''}{a''}\Delta z'' + \frac{B}{b}\Delta^2 z - 2\frac{B'}{b'}\Delta^2 z' - 3\frac{C}{c}\Delta^3 z,$$

$$0 = X''' + \frac{A''}{a''}\Delta x'' + \frac{B'}{b'}\Delta^2 x' + \frac{C}{c}\Delta^3 x,$$

$$0 = Y''' + \frac{A''}{a''}\Delta y'' + \frac{B'}{b'}\Delta^2 y' + \frac{C}{c}\Delta^3 y,$$

$$0 = Z''' + \frac{A''}{a''}\Delta z'' + \frac{B'}{b'}\Delta^2 z' + \frac{C}{c}\Delta^3 z.$$

[10.] Ajoutons la 1.re à la 4.e, à la 7.e, à la 10.e, il vient

$$0 = X + X' + X'' + X''',$$

et de la même manière,

$$0 = Y + Y' + Y'' + Y''',$$

$$0 = Z + Z' + Z'' + Z'''.$$

Digitized by Google

Multiplions la 5.e par Δz et la 6.e par $-\Delta y$,

la 8.e par $\Delta z+\Delta z'$ et la 9.e par $-(\Delta y+\Delta y')$,

la 11.e par $\Delta z+\Delta z'+\Delta z''$ et la 12.e par $-(\Delta y+\Delta y'+\Delta y'')$

et ajoutons les produits : tous les termes dépendans des forces intérieures A, A', &c. se détruisent, et l'on trouve

$$\begin{aligned} 0 = {} & Y'\Delta z + Y''\Delta(z+z') + Y'''\Delta(z+z'+z'') \\ & - Z'\Delta y - Z''\Delta(y+y') - Z'''\Delta(y+y'+y''), \end{aligned}$$

et par un procédé analogue,

$$\begin{aligned} 0 = {} & Z'\Delta x + Z''\Delta(x+x') + Z'''\Delta(x+x'+x'') \\ & - X'\Delta z - X''\Delta(z+z') - X'''\Delta(z+z'+z''), \\ 0 = {} & X'\Delta y + X''\Delta(y+y') + X'''\Delta(y+y'+y'') \\ & - Y'\Delta x - Y''\Delta(x+x') - Y'''\Delta(x+x'+x''), \end{aligned}$$

en observant que

$$\Delta(z+z')=z''-z',\ \Delta(z+z'+z'')=z'''-z,\ \Delta(y+y')=y''-y,\ \&c.$$

Ces équations reviennent à

$$\begin{aligned} 0 = {} & Y'(z'-z)-Z'(y'-y)+Y''(z''-z)-Z''(y''-y)+Y'''(z'''-z)-Z'''(y'''-y), \\ 0 = {} & Z'(x'-x)-X'(z'-z)+Z''(x''-x)-X''(z''-z)+Z'''(x'''-x)-X'''(z'''-z), \\ 0 = {} & X'(y'-y)-Y'(x'-x)+X''(y''-y)-Y''(x''-x)+X'''(y'''-y)-Y'''(x'''-x). \end{aligned}$$

Ce sont les équations connues des momens qui ont lieu dans l'équilibre de tout système libre.

Pour abréger, nous allons désigner par $(\Delta x,\ \Delta^2 y)$ la fonction $\Delta x\Delta^2 y-\Delta y\Delta^2 x$, par $(\Delta^3 x,\ \Delta y)$ la fonction $\Delta^3 x\Delta y-\Delta^3 y\Delta x$,

Digitized by Google

et ainsi pour toutes les fonctions semblables; la formule $(\Delta x, \Delta^2 y, \Delta^3 z)$ représentera celle-ci,

$$\Delta x\,\Delta^2 y\,\Delta^3 z + \Delta y\,\Delta^2 z\,\Delta^3 x + \Delta z\,\Delta^2 x\,\Delta^3 y$$
$$- \Delta x\,\Delta^2 z\,\Delta^3 y - \Delta y\,\Delta^2 x\,\Delta^3 z - \Delta z\,\Delta^2 y\,\Delta^3 x;$$

d'après cela, on tire des trois premières des équations (f_9),

$$A = a\,[X(\Delta^2 y, \Delta^3 z) + Y(\Delta^2 z, \Delta^3 x) + Z(\Delta^2 x, \Delta^3 y)] : (\Delta x, \Delta^2 y, \Delta^3 z),$$

$$B = -b\,[X(\Delta^3 y, \Delta z) + Y(\Delta z, \Delta^3 x) + Z(\Delta^3 x, \Delta y)] : (\Delta x, \Delta^2 y, \Delta^3 z),$$

$$C = c\,[X(\Delta y, \Delta^2 z) + Y(\Delta z, \Delta^2 x) + Z(\Delta x, \Delta^2 y)] : (\Delta x, \Delta^2 y, \Delta^3 z).$$

Considérons particulièrement la première A de ces quantités; à son numérateur, les coefficiens de X, Y, Z, sont [1.] les projections sur les plans coordonnés d'un parallélogramme construit sur les lignes bc; soit M ce parallélogramme, et m la direction d'une perpendiculaire à son plan, on aura par le principe des projections

$$(\Delta^2 y, \Delta^3 z) = M\cos.\widehat{mx},\quad (\Delta^2 z, \Delta^3 x) = M\cos.\widehat{my},\quad (\Delta^2 x, \Delta^3 y) = M\cos.\widehat{mz}.$$

Le dénominateur $(\Delta x, \Delta^2 y, \Delta^3 z)$ est le volume du parallélipipède construit sur ce parallélogramme comme base, et sur l'arête a; ainsi

$$(\Delta x, \Delta^2 y, \Delta^3 z) = Ma \sin.\widehat{Ma},$$

$\sin.\widehat{Ma}$, désignant le sinus de l'angle que forme la droite a avec le plan de M. D'ailleurs, $X = P\cos.\widehat{xP}$, $Y = P\cos.\widehat{yP}$, $Z = P\cos.\widehat{zP}$; faisant dans la valeur de A ces substitutions, il vient

$$A = P[\cos.\widehat{xP}\cos.\widehat{xm} + \cos.\widehat{yP}\cos.\widehat{ym} + \cos.\widehat{zP}\cos.\widehat{zm}] : \sin.\widehat{Ma}$$
$$= P\cos.\widehat{Pm} : \sin.\widehat{Ma} = P\sin.\widehat{PM} : \sin.\widehat{Ma}.$$

Digitized by Google

Cette dernière expression est la composante de la force P selon la droite a, l'autre composante de cette même force étant dans le plan M. Relativement aux lignes b, c, on obtient le même résultat pour les forces B, C; en sorte que ces trois forces sont les composantes de P selon les directions a, b, c qui concourent au point 1, où la force P est appliquée.

Substituons dans la 4.e des équations (f_9), $\Delta x+\Delta^2 x$, $\Delta^2 x+\Delta^3 x$ à $\Delta x'$, $\Delta^2 x'$, elle deviendra

$$o=X'-\left(\frac{A'}{a'}-\frac{A}{a}\right)\Delta x+\left(\frac{B'}{b'}-2\frac{B}{b}-\frac{A'}{a'}\right)\Delta^2 x+\left(\frac{B'}{b'}+3\frac{C}{c}\right)\Delta^3 x,$$

et les deux suivantes se changeront de la même manière en

$$o=Y'-\left(\frac{A'}{a'}-\frac{A}{a}\right)\Delta y+\left(\frac{B'}{b'}-2\frac{B}{b}-\frac{A'}{a'}\right)\Delta^2 y+\left(\frac{B'}{b'}+3\frac{C}{c}\right)\Delta^3 y,$$

$$o=Z'-\left(\frac{A'}{a'}-\frac{A}{a}\right)\Delta z+\left(\frac{B'}{b'}-2\frac{B}{b}-\frac{A'}{a'}\right)\Delta^2 z+\left(\frac{B'}{b'}+3\frac{C}{c}\right)\Delta^3 z.$$

Ajoutons à ces équations respectivement la 1.re, la 2.e et la 3.e des (f_9), elles deviendront

$$o=X+X'-\frac{A'}{a'}\Delta x+\left(\frac{B'}{b'}-\frac{B}{b}-\frac{A'}{a'}\right)\Delta^2 x+\left(\frac{B'}{b'}+2\frac{C}{c}\right)\Delta^3 x,$$

$$o=Y+Y'-\frac{A'}{a'}\Delta y+\left(\frac{B'}{b'}-\frac{B}{b}-\frac{A'}{a'}\right)\Delta^2 y+\left(\frac{B'}{b'}+2\frac{C}{c}\right)\Delta^3 y,$$

$$o=Z+Z'-\frac{A'}{a'}\Delta z+\left(\frac{B'}{b'}-\frac{B}{b}-\frac{A'}{a'}\right)\Delta^2 z+\left(\frac{B'}{b'}+2\frac{C}{c}\right)\Delta^3 z;$$

on en tire alors

$$A'=a'\,\frac{(X+X')(\Delta^2 y,\ \Delta^3 z)+(Y+Y')(\Delta^2 z,\ \Delta^3 x)+(Z+Z')(\Delta^2 x,\ \Delta^3 y)}{(\Delta x,\ \Delta^2 y,\ \Delta^3 z)}.$$

On opérera de même pour $\frac{B'}{b'}$, connaissant déjà $\frac{B}{b}$, $\frac{A'}{a'}$, et enfin pour

Digitized by Google

pour $\frac{A''}{a''}$ que l'on tirera facilement d'une combinaison des dernières des équations (f_9).

[11.] Si le polygone était invariable dans sa forme, les valeurs de A, A', A'', B, B', C, fournies par les formules précédentes, seraient complétement déterminées, et elles représenteraient les efforts exercés dans le sens de la longueur des verges a, a', a'', et des trois autres b, b', c, qui leur sont liées d'une manière fixe, et qui sont avec elles capables de produire cette invariabilité.

En ne supposant que les verges a, a', a'' absolument raidies, les angles formés par a et a'' avec a', sont indéterminés, ainsi que l'inclinaison du plan aa' sur celui de $a'a''$. Si, outre les longueurs de a, a', a'', on donne celles de b et b', les angles de a et a', de a' et a'' seront déterminés, quoique l'inclinaison des plans de ces angles soit encore quelconque et susceptible de toutes les grandeurs; mais, en assignant de plus la valeur de c, la forme du polygone devient entièrement déterminée, et les efforts des forces qui agissent à ses angles, dans le sens de ces droites, l'est pareillement aussi, en supposant comme nous le faisons, que ce soit à l'aide de ces liens que les points se transmettent l'action qu'ils reçoivent des forces extérieures. Si le polygone que nous considérons était élastique, c'est-à-dire susceptible de changer de forme sous l'action des forces extérieures en réagissant, on aurait à considérer que cette élasticité, pour être complète, devrait s'opérer aux dépens des six élémens que nous venons d'indiquer; savoir, aux dépens de l'alongement des trois verges a, a', a'', et cette élasticité prend alors le nom d'*extensibilité* ou de *contractilité*; aux dépens de la variation des angles de a et a', de a' et a'', et enfin aux dépens de l'angle d'inclinaison des plans de ces deux angles, et cette dernière variation ne peut elle-même avoir lieu qu'en vertu d'une espèce de torsion du côté a', qui est l'arête de cette inclinaison. Les effets de ces trois derniers élémens de l'élasticité du polygone sont ceux que remplacent principalement les

Digitized by Google

efforts B, B', C des verges b, b', c, supposées élastiques dans le sens de leur longueur, extensibles ou contractibles. On mesure l'élasticité d'un angle, comme nous l'avons dit [8.], par la tension d'un cordon circulaire qui aurait pour centre le sommet de l'angle, pour rayon l'unité linéaire, et qui serait compris entre les côtés de l'angle et attaché à ces mêmes côtés. Nous avons vu dans ce même paragraphe comment on peut remplacer la force d'élasticité de l'angle de deux côtés a, a' par des tensions; pour remplacer le système des six forces d'élasticité que nous venons d'énumérer, par de semblables tensions longitudinales A, A', A'', B, B', C, nous désignerons par i l'inclinaison des plans de aa' et $a'a''$ qui se coupent selon a', et par I la force d'élasticité de cet angle; par e, e' les angles $\widehat{aa'}$, $\widehat{a'a''}$, et par E, E', les forces élastiques de ces derniers angles, enfin par $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$ les tensions longitudinales des verges a, a', a'' qui auront lieu avec ces forces d'élasticité angulaire : la somme des momens virtuels de ces six forces sera

$$\mathfrak{a}\,\delta a + \mathfrak{a}'\,\delta a' + \mathfrak{a}''\,\delta a'' + E\,\delta e + E'\,\delta e' + I\,\delta i,$$

et cette somme doit être égale à celle

$$A\,\delta a + A'\,\delta a' + A''\,\delta a'' + B\,\delta b + B'\,\delta b' + C\,\delta c.$$

Or, les angles e, e', i seront faciles à déterminer en fonction de a, a', a'', b, b', c, par les moyens ordinaires de la géométrie; je n'en rapporte pas les valeurs à raison de l'extrême complication de celle de i; en les différenciant selon δ, et les substituant dans la première de ces deux sommes, on aura une expression de même forme que la seconde, et l'on pourra alors comparer les coefficiens des mêmes variations δa, δb, δc, &c. Cela fournira les équations nécessaires pour déterminer les tensions A, A', A'', B, B', C, au moyen des trois forces d'élasticité E, E', I et des tensions $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$, ou réciproquement. On voit que cette transformation repose sur ce théorème de mécanique analytique : lorsque les sommes de momens virtuels de deux systèmes de forces sont égales, ces deux systèmes sont équivalens, et se peuvent remplacer l'un l'autre.

Digitized by Google

Dans ces deux systèmes d'efforts intérieurs, qui sont également propres à établir l'équilibre des forces qui agissent sur le polygone, on remarquera que les tensions longitudinales des verges a, a', a'' sont exprimées par $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$, lorsque l'on considère avec elles les forces d'élasticité E, E', I; et que les tensions des mêmes lignes sont A, A', A'', si l'on conçoit l'équilibre établi à l'aide des trois autres tensions B, B', C: or, les A, A', A'' ont des expressions très-différentes de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$. Mais, dans un polygone actuellement en équilibre, quel est celui de ces deux systèmes de forces qui a lieu réellement? On peut répondre que ce n'est ni l'un ni l'autre, à moins que la constitution du polygone ne soit matériellement celle que l'on a supposée en parvenant à ces formules d'équilibre. Mais tous les deux sont propres à établir l'équilibre, et à remplacer, dans tous les cas, celui qui provient de l'action réelle des molécules contiguës les unes sur les autres.

Si le polygone avait quatre côtés, il faudrait avoir égard à trois nouvelles forces intérieures que l'on désignerait par A''', B'', C', en supposant le nouveau côté a''' lié aux précédens de la première manière, c'est-à-dire, au moyen des tensions longitudinales de lignes droites a''', b'', c'; ou par $\mathfrak{a}'''$, E'', I', si on employait avec la tension $\mathfrak{a}'''$ du nouveau côté a''', deux forces d'élasticité, l'une E'' pour l'angle $\widehat{a''a'''}$, l'autre I' pour l'angle compris entre le plan des côtés a''', a'' et le plan des côtés a'', a'. On voit que chaque nouveau côté ne peut introduire que trois nouvelles forces pour sa liaison aux précédens; mais il amène aussi trois nouvelles équations pour déterminer ces mêmes forces.

[12.] Tout ce que nous venons de dire des polygones d'un nombre quelconque de côtés, et de la manière dont l'action des forces qui agissent sur ces polygones, peut être conçue transmise et détruite, est évidemment applicable aux courbes à double courbure, soit élastiques, soit raides. L'élasticité de ces courbes ne peut dépendre que de l'extensibilité de leurs élémens, de la variation de l'angle de contingence,

Digitized by Google

compris entre deux élémens consécutifs en chaque point, et de la variation de l'angle de contingence de deux plans osculateurs consécutifs à ce point, lesquels peuvent être considérés comme se coupant selon le 2.e des trois élémens de la courbe consécutifs à ce point, ou plutôt selon la tangente qui en est le prolongement. C'est dans l'invariabilité de ces trois quantités, pour chaque point de la courbe, que consiste sa raideur, laquelle doit par conséquent dépendre des trois forces capables de la produire dans chacun de ces élémens. Nous supposerons d'abord que l'élasticité ou la raideur soient produites par des forces analogues à celles A, B, C, que nous avons employées dans l'équilibre des polygones [9.] ; là elles agissaient selon des directions formant avec les axes des coordonnées des angles dont les cosinus étaient

$$\frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)}}, \quad \frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)}}, \quad \frac{\Delta z}{\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)}};$$

$$\frac{\Delta^2 x}{\sqrt{(\Delta^2 x^2+\Delta^2 y^2+\Delta^2 z^2)}}, \quad \frac{\Delta^2 y}{\sqrt{(\Delta^2 x^2+\Delta^2 y^2+\Delta^2 z^2)}}, \quad \frac{\Delta^2 z}{\sqrt{(\Delta^2 x^2+\Delta^2 y^2+\Delta^2 z^2)}};$$

$$\frac{\Delta^3 x}{\sqrt{(\Delta^3 x^2+\Delta^3 y^2+\Delta^3 z^2)}}, \quad \frac{\Delta^3 y}{\sqrt{(\Delta^3 x^2+\Delta^3 y^2+\Delta^3 z^2)}}, \quad \frac{\Delta^3 z}{\sqrt{(\Delta^3 x^2+\Delta^3 y^2+\Delta^3 z^2)}};$$

pour le point quelconque de la courbe, dont les coordonnées seront désignées par x, y, z, nous imaginerons donc trois forces A, B, C agissant selon des directions formant, avec les x, y, z, des angles dont les cosinus seront semblablement

$$\frac{dx}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}, \quad \frac{dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}, \quad \frac{dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}};$$

$$\frac{d^2 x}{\sqrt{(d^2 x^2+d^2 y^2+d^2 z^2)}}, \quad \frac{d^2 y}{\sqrt{(d^2 x^2+d^2 y^2+d^2 z^2)}}, \quad \frac{d^2 z}{\sqrt{(d^2 x^2+d^2 y^2+d^2 z^2)}};$$

$$\frac{d^3 x}{\sqrt{(d^3 x^2+d^3 y^2+d^3 z^2)}}, \quad \frac{d^3 y}{\sqrt{(d^3 x^2+d^3 y^2+d^3 z^2)}}, \quad \frac{d^3 z}{\sqrt{(d^3 x^2+d^3 y^2+d^3 z^2)}};$$

et placées à l'égard du point x, y, z, comme nous l'avons dit des forces A, B, C du n.° 9.

Digitized by Google

Nommons X, Y, Z l'intensité des composantes de la force qui sollicite l'élément dm de la courbe, situé au point x, y, z; Xdm, Ydm, Zdm seront les forces absolues qui proviennent de son action exercée sur cet élément. En observant que les forces intérieures A, B, C agissent dans les directions de trois lignes, dont les longueurs sont

$$\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)},\quad \sqrt{(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2)},\quad \sqrt{(d^3x^2+d^3y^2+d^3z^2)};$$

les variations de ces directions seront exprimées par

$$\frac{dx\delta dx+dy\delta dy+dz\delta dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}},\quad \frac{d^2x\delta d^2x+d^2y\delta d^2y+d^2z\delta d^2z}{\sqrt{(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2)}},\quad \frac{d^3x\delta d^3x+d^3y\delta d^3y+d^3z\delta d^3z}{\sqrt{(d^3x^2+d^3y^2+d^3z^2)}},$$

Si donc on désigne, pour abréger, par a, b, c les quantités

$$\frac{A}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}},\quad \frac{B}{\sqrt{(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2)}},\quad \frac{C}{\sqrt{(d^3x^2+d^3y^2+d^3z^2)}};$$

on aura pour la somme des momens virtuels de ces forces intérieures;

$$\begin{aligned} &S\,a\,(dx\,\delta dx+dy\,\delta dy+dz\,\delta dz)\\ &+S\,b\,(d^2x\,\delta d^2x+d^2y\,\delta d^2y+d^2z\,\delta d^2z)\\ &+S\,c\,(d^3x\,\delta d^3x+d^3y\,\delta d^3y+d^3z\,\delta d^3z); \end{aligned}$$

le signe d'intégration S devant s'étendre à toute la courbe. Par des intégrations par parties, et en négligeant les termes qui se rapportent aux limites de l'intégrale, cette somme des momens étant jointe à celle $S(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)\,dm$ des forces extérieures, se réduit à

$$\begin{aligned} &S[Xdm-d(adx)+d^2(bd^2x)-d^3(cd^3x)]\,\delta x\\ &+S[Ydm-d(ady)+d^2(bd^2y)-d^3(cd^3y)]\,\delta y\\ &+S[Zdm-d(adz)+d^2(bd^2z)-d^3(cd^3z)]\,\delta z; \end{aligned}$$

et l'on sait que les termes multipliés par δx, δy, δz doivent être séparément égalés à zéro; ce qui fournit les trois équations indéfinies,

Digitized by Google

$$o = X\,dm - d(a\,dx) + d^2(b\,d^2x) - d^3(c\,d^3x),$$

$$(f_{12}) \qquad o = Y\,dm - d(a\,dy) + d^2(b\,d^2y) - d^3(c\,d^3y),$$

$$o = Z\,dm - d(a\,dz) + d^2(b\,d^2z) - d^3(c\,d^3z).$$

[13.] Selon le problème que l'on traite, l'objet de ces équations est très-différent ; s'il s'agit de déterminer la figure que prend un fil élastique, qui d'abord avait une forme connue, et de laquelle les élémens d'élasticité dépendaient avant l'application des forces extérieures, il existera entre les forces intérieures A, B, C, et ces élémens d'élasticité, des relations que l'on conçoit pouvoir être déduites, d'après ce que nous avons dit ci-dessus [11.], à l'occasion des polygones élastiques : nous reviendrons, au reste, sur ce sujet. Mais pour prendre une idée des forces A, B, C, supposons le fil parfaitement raide : ces forces seront alors des résistances propres à établir dans le fil cette raideur, lorsqu'il détruit les forces extérieures qui agissent sur ses particules. La figure du fil étant donnée par deux équations entre trois coordonnées, les équations ci-dessus seront complétement intégrables ; car les forces X, Y, Z ne pourront alors dépendre que de la variable qui fixe le point de la courbe auquel elles se rapportent. On tirera donc d'abord ces intégrales,

$$o = \int X\,dm - a\,dx + d(b\,d^2x) - d^2(c\,d^3x),$$

$$o = \int Y\,dm - a\,dy + d(b\,d^2y) - d^2(c\,d^3y),$$

$$o = \int Z\,dm - a\,dz + d(b\,d^2z) - d^2(c\,d^3z);$$

où le signe $\int$ se rapporte à une intégration faite depuis une des extrémités de la courbe jusqu'au point pour lequel on veut calculer les efforts A, B, C, qui sont remplacés dans ces équations par a, b, c. Je suppose, en outre, que les constantes soient attachées à ce signe $\int$. Éliminons a de ces équations, nous pourrons ainsi former les trois suivantes, dont deux comportent la troisième :

Digitized by Google

$$0 = dy\int Z\,dm + dy\,d(b\,d^2\zeta) - dy\,d^2(c\,d^3\zeta)$$
$$- d\zeta\int Y\,dm - d\zeta\,d(b\,d^2y) + d\zeta\,d^2(c\,d^3y),$$
$$0 = d\zeta\int X dm + d\zeta\,d(b\,d^2x) - d\zeta\,d^2(c\,d^3x)$$
$$- dx\int Z dm - dx\,d(b\,d^2\zeta) + dx\,d^2(c\,d^3\zeta),$$
$$0 = dx\int Y dm + dx\,d(b\,d^2y) - dx\,d^2(c\,d^3y)$$
$$- dy\int X dm - dy\,d(b\,d^2x) + dy\,d^2(c\,d^3x).$$

On peut encore intégrer celles-ci, et arriver aux suivantes, dans lesquelles nous supposons encore les constantes comprises dans les nouveaux signes d'intégration introduits,

$$0 = y\int Z\,dm - \zeta\int Y dm - \int(y\,Z - \zeta\,Y)\,dm + b\,[dy\,d^2\zeta - d\zeta d^2y]$$
$$- c\,[(dy\,d^4\zeta - d\zeta\,d^4y) - (d^2y\,d^3\zeta - d^2\zeta\,d^3y)] - dc\,[dy\,d^3\zeta - d\zeta\,d^3y],$$

$$0 = \zeta\int X\,dm - x\int Z dm - \int(\zeta X - xZ)\,dm + b\,[d\zeta\,d^2x - dx d^2\zeta]$$
$$- c\,[(d\zeta\,d^4x - dx\,d^4\zeta) - (d^2\zeta\,d^3x - d^2x\,d^3\zeta)] - dc\,[d\zeta d^3x - dx d^3\zeta],$$

$$0 = x\int Y\,dm - y\int X dm - \int(x\,Y - y\,X)\,dm + b\,[dx\,d^2y - dy d^2x]$$
$$- c\,[(dx\,d^4y - dy\,d^4x) - (d^2x\,d^3y - d^2y\,d^3x)] - dc\,[dx\,d^3y - dy\,d^3x].$$

On peut observer qu'en multipliant ces trois équations respectivement par dx, dy, $d\zeta$, et ajoutant les produits b et dc, elles s'éliminent ensemble; et il vient pour déterminer c l'équation

$$0 = (y\,d\zeta - \zeta\,dy)\int X dm + (\zeta dx - x\,d\zeta)\int Y dm + (x\,dy - y\,dx)\int Z dm$$
$$+ dx\int(yZ - \zeta Y)dm + dy\int(\zeta X - xZ)\,dm + d\zeta\int(xY - yX)\,dm$$
$$- c\left\{\begin{array}{l} dx\,d^2y\,d^3\zeta + dy\,d^2\zeta\,d^3x + d\zeta\,d^2x\,d^3y \\ - dx\,d^2\zeta\,d^3y - dy\,d^2x\,d^3\zeta - d\zeta\,d^2y\,d^3x \end{array}\right\}.$$

Ajoutant les mêmes équations après les avoir multipliées par d^3x, d^3y, $d^3\zeta$; dc se trouve éliminé, mais b y est conservé :

Digitized by Google

$$0 = (yd^3z - zd^3y)\int X dm + (zd^3x - xd^3z)\int Y dm + (xd^3y - yd^3x)\int Z dm$$
$$+ d^3x\int(yZ - zY)\,dm + d^3y\int(zX - xZ)\,dm + d^3z\int(xY - yX)\,dm$$
$$- b\begin{Bmatrix} dx\,d^2y\,d^3z + dy\,d^2z\,d^3x + dz\,d^2x\,d^3y \\ - dx\,d^2z\,d^3y - dy\,d^2x\,d^3z - dz\,d^2y\,d^3x \end{Bmatrix}$$
$$- c\begin{Bmatrix} dx\,d^3y\,d^4z + dy\,d^3z\,d^4x + dz\,d^3x\,d^4y \\ - dx\,d^3z\,d^4y - dy\,d^3x\,d^4z - dz\,d^3y\,d^4x \end{Bmatrix}.$$

Par le moyen de cette équation, b sera déterminé, puisque c l'est déjà; mais a entre dans les premières intégrales avec b et c, ainsi il sera lui-même facile à obtenir.

Avant d'aller plus loin, il est peut-être bon de remarquer que les intégrales précédentes des trois équations $(f_{,2})$, qui sont du troisième ordre par rapport à a, b, c, ne contiennent que les six constantes arbitraires comprises dans les intégrales

$$\int X dm,\ \int Y dm,\ \int Z dm,\ \int(yZ - zY)dm,\ \int(zX - xZ)dm,\ \int(xY - yX)dm.$$

Cela tient à la manière dont a, b, c entrent dans ces équations : elles ne contiennent chacune que les différentielles da, db, dc, d^2b, d^2c, d^3c; en sorte qu'elles ne sont du troisième ordre que relativement à c, du 2.e à b et du 1.er à a. On s'assurera que leurs intégrales complètes ne peuvent contenir que six constantes arbitraires par cette considération. Concevons que l'on différencie trois fois de suite ces équations, il en résultera neuf équations, qui contiendront a, b, c, da, db, dc, d^2a, d^2b, d^2c, d^3a, d^3b, d^3c, d^4a, d^4b, d^4c, d^5b, d^5c, d^6c, et une variable principale. Joignant à ces neuf équations, les trois primitives, on pourra faire l'élimination des onze quantités a, b, da, db, d^2a, d^2b, d^3a, d^3b, d^4a, d^4b, d^5b, et il restera une équation différentielle du sixième ordre par rapport à c. On sait que cette équation intégrée complètement fournira par des éliminations, les intégrales complètes des trois équations

Digitized by Google

équations primitives, intégrales qui ne contiendront que les six constantes arbitraires de l'équation du sixième ordre en c.

[14.] Ayant a, b, c, les forces intérieures A, B, C propres à chaque point, seront données par les équations $A = a\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, $B = b\sqrt{(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2)}$, $C = c\sqrt{(d^3x^2 + d^3y^2 + d^3z^2)}$. Or, la quantité c trouvée ci-dessus, a pour numérateur une fonction différentielle du premier ordre, et pour dénominateur une quantité différentielle du sixième; en sorte que sa valeur est infinie du cinquième ordre, et multipliée par $\sqrt{(d^3x^2 + d^3y^2 + d^3z^2)}$, elle donne pour C une expression infinie du second ordre. On voit de la même manière que b a pour dénominateur une fonction différentielle du sixième ordre, et pour numérateur une autre du troisième : mais, pour avoir B, il faut multiplier cette valeur par $\sqrt{(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2)}$, qui est infiniment petit du second ordre; il est donc évident qu'il y aura une dimension infiniment petite de moins au numérateur de B qu'à son dénominateur, et qu'il sera infiniment grand du premier ordre. Quant à A, ce sera une quantité finie. On se rendra raison de ce qu'il y a de singulier sur la grandeur de ces forces, en rapprochant tout ceci de ce que nous avons dit [5.] et [9.] relativement aux polygones. On verra de cette manière que la force B qui s'oppose à l'ouverture de l'angle de deux côtés contigus infiniment petits, a sa direction à une distance infiniment petite du premier ordre du sommet de cet angle; que la force C qui s'oppose principalement à la variation de l'angle compris par le plan des deux premiers élémens de la courbe, et le plan du second et du troisième; que cette force, dis-je, est à une distance infiniment petite du second ordre de l'arête de l'angle de ces plans. Ces forces doivent compenser par leur grandeur le rapprochement de leur direction des sommets ou arêtes des angles à l'ouverture desquels elles s'opposent.

[15.] Ce que nous venons de dire des forces A, B, C qui maintiennent la courbe dans la forme qu'on suppose qu'elle conserve, lors-

Digitized by Google

qu'elle est considérée comme raide, peut s'appliquer aux forces intérieures qui ont lieu dans une courbe à double courbure élastique, quand la courbe a pris la forme qu'elle doit avoir, sous l'action des forces extérieures qui se font équilibre, en réagissant par son élasticité : mais l'expression de cette qualité de la courbe ne pourrait être donnée au moyen des forces infinies que nous venons de rencontrer. On peut éviter l'emploi de ces forces infinies, en introduisant des élémens, soit de l'élasticité, soit de la raideur, plus naturels que les forces *A*, *B*, *C*. Nous prendrons pour cela, 1.° la tension qui a lieu dans le sens de l'élément de la courbe; 2.° l'élasticité de l'angle compris entre deux côtés contigus infiniment petits, mesurée par la tension d'une ligne matérielle qui joindrait les extrémités des deux côtés infiniment petits, prolongés chacun d'une longueur égale à l'unité, dans le sens des côtés de l'angle infiniment petit : la distance de ces deux points sera précisément la mesure de cet angle; 3.° l'élasticité de l'inclinaison des deux plans osculateurs consécutifs. Cette dernière force se mesurera encore par la tension d'une ligne qui joindrait les extrémités de deux droites égales à l'unité, situées dans les deux plans osculateurs, et perpendiculaires à leur commune intersection, ou bien au deuxième des trois côtés infiniment petits de la courbe consécutifs au point donné. En prenant ces deux lignes, à partir de ce second côté de la courbe dans le sens où leur angle est infiniment petit, la distance de leurs extrémités sera la mesure de l'angle infiniment petit des deux plans osculateurs consécutifs, et la tension de cette ligne pourra être regardée comme une force de torsion du second côté de la courbe. Nommons i cet angle ou bien la ligne infiniment petite qui le mesure, et dont nous nommerons t la tension. On a (f_3')

$$i = ds\,\frac{dx\,d^2y\,d^3z + dy\,d^2z\,d^3x + dz\,d^2x\,d^3y - dx\,d^2z\,d^3y - dy\,d^2x\,d^3z - dz\,d^2y\,d^3x}{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}.$$

Le carré de la fonction qui entre au numérateur de cette valeur, peut être mis sous la forme

Digitized by Google

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2)(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2)(d^3x^2 + d^3y^2 + d^3z^2)$$
$$+2(d^2x d^3x + d^2y d^3y + d^2z d^3z)(d^3x dx + d^3y dy + d^3z dz)(dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z)$$
$$-(dx^2 + dy^2 + dz^2)(d^2x\, d^3x + d^2y\, d^3y + d^2z\, d^3z)^2$$
$$-(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2)(d^3x\, dx + d^3y\, dy + d^3z\, dz)^2$$
$$-(d^3x^2 + d^3y^2 + d^3z^2)(dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z)^2.$$

Mais si l'on représente, comme dans la *Mécanique analytique*,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 \text{ par } \alpha,$$
$$d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 \text{ par } \beta,$$
$$d^3x^2 + d^3y^2 + d^3z^2 \text{ par } \gamma,$$

on aura
$$dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z = \frac{d\alpha}{2},$$
$$d^2x\, d^3x + d^2y\, d^3y + d^2z\, d^3z = \frac{d\beta}{2},$$
$$d^3x\, dx + d^3y\, dy + d^3z\, dz = \frac{d^2\alpha}{2} - \beta.$$

Le dénominateur,

$$(dy\, d^2z - dz\, d^2y)^2 + (dz\, d^2x - dx\, d^2z)^2 + (dx\, d^2y - dy\, d^2x)^2$$

revient à

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2)(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2) - (dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z)^2.$$

On voit ainsi que la fonction différentielle i ne dépend que de

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad d\alpha, \quad d\beta, \quad d^2\alpha.$$

Je puis me dispenser de l'écrire; mais il est évident que la variation de cet angle ou δi sera de la forme

$$o\,\delta\alpha + p\,\delta\beta + q\,\delta\gamma + o'\delta d\alpha + p'\delta d\beta + o''\delta d^2\alpha,$$

et cette variation multipliée par i sera le moment virtuel de cette force i, mesure de la torsion au point considéré sur la courbe.

Digitized by Google

L'angle e de deux élémens consécutifs de la courbe, est selon la formule (f_3),

$$\frac{\sqrt{[(dx^2+dy^2+dz^2)(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2)-(dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z)^2]}}{dx^2+dy^2+dz^2};$$

ainsi cette valeur ne dépend que de α, β, $d\alpha$. Sa variation sera donc de la forme

$$\delta e = m\delta\alpha + n\delta\beta + m'\delta d\alpha.$$

Nommons ε la force d'élasticité de cet angle, mesurée comme nous venons de le dire; son moment sera $\varepsilon\delta e$. Enfin σ étant la force de tension de l'élément de la courbe dans la direction de ds, son moment sera $\sigma\delta ds$; or on a $\delta ds = \frac{\delta\alpha}{2\sqrt{\alpha}}$, ainsi ce moment sera de la forme $\sigma l\delta\alpha$. La somme des momens des forces au point x, y, z, sera donc

$$(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)dm + \sigma l\delta\alpha + \varepsilon(m\delta\alpha+n\delta\beta+m'\delta d\alpha) + \iota(o\delta\alpha+p\delta\beta+q\delta\gamma+o'\delta d\alpha+p'\delta d\beta+o''\delta d^2\alpha);$$

et en supposant le fil élastique ou raide libre dans sa longueur, mais pouvant avoir ses extrémités assujetties, l'intégrale de cette somme, relative à toute l'étendue du fil, étant ajoutée à la somme des momens des forces des extrémités, devra être nulle. Ainsi l'on aura, en faisant abstraction de ces dernières forces, ne nous proposant de trouver que les équations indéfinies,

$$\begin{aligned} 0 = {} & S(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dm \\ & + S[\sigma l + \varepsilon m + \iota o]\,\delta\alpha \\ & + S[\varepsilon n + \iota p]\,\delta\beta + S\iota q\,\delta\gamma \\ & + S[\varepsilon m' + \iota o']\,d\delta\alpha + S\iota p'd\delta\beta + S\iota o''d^2\delta\alpha. \end{aligned}$$

Les trois dernières intégrales peuvent être en partie exécutées et remplacées par les suivantes, dans lesquelles on omet encore des termes qui se rapportent aux limites, comme au n.° [12.]; savoir :

Digitized by Google

$$S[\varepsilon m' + \iota o'] d\delta\alpha \quad \text{par} \quad -Sd[\varepsilon m' + \iota o']\delta\alpha,$$
$$S\iota p' d\delta\beta \quad \text{par} \quad -Sd[\iota p']\delta\beta$$
$$S\iota o'' d^2\delta\alpha \quad \text{par} \quad +Sd^2[\iota o'']\delta\alpha;$$

l'intégrale ci-dessus pourra donc être remplacée par

$$S(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dm$$
$$+ S\{\sigma l + \varepsilon m + \iota o - d[\varepsilon m' + \iota o'] + d^2[\iota o'']\}\delta\alpha$$
$$+ S\{\varepsilon n + \iota p - d[\iota p']\}\delta\beta$$
$$+ S\{\iota q\}\delta\gamma.$$

Mais,

$$\delta\alpha = 2(dx\,d\delta x + dy\,d\delta y + dz\,d\delta z),$$
$$\delta\beta = 2(d^2x\,d^2\delta x + d^2y\,d^2\delta y + d^2z\,d^2\delta z),$$
$$\delta\gamma = 2(d^3x\,d^3\delta x + d^3y\,d^3\delta y + d^3z\,d^3\delta z).$$

Si l'on met ces valeurs dans la somme ci-dessus, le résultat auquel on parviendra sera identique dans sa forme à celui du n.° [12.], et l'on en déduira trois équations indéfinies toutes semblables à celles (f_{12}) de cet article, mais dans lesquelles les quantités a, b, c seront remplacées respectivement par

$$2\{\sigma l + \varepsilon m + \iota o - d[\varepsilon m' + \iota o'] + d^2[\iota o'']\},$$
$$2\{\varepsilon n + \iota p - d[\iota p']\},$$
$$2\{\iota q\}.$$

Ayant déterminé ci-dessus [13.] les valeurs de a, b, c pour une verge raide de figure donnée, on déduira de l'équation $c = 2\iota q$ la valeur de la force ι; sur quoi l'on peut remarquer que q est une quantité infinie du cinquième ordre, et nous avons reconnu ci-dessus que c est du même ordre; ainsi ι sera une quantité finie, comme nous l'avions annoncé. Connaissant ι, on aura ε au moyen de l'équation

$$b = 2\{\varepsilon n + \iota p - d[\iota p']\},$$

dans laquelle b est infinie du troisième ordre, ainsi que n, ιp, $d[\iota p']$;

Digitized by Google

d'où il suit que ϵ sera fini. Il en sera de même de σ déterminé au moyen de a, de ϵ et de ι qui sont actuellement connus.

La valeur de la torsion ι est remarquable; on trouve par des substitutions assez simples,

$$\iota = \frac{y dz - z dy}{ds}\int X dm + \frac{z dx - x dz}{ds}\int Y dm + \frac{x dy - y dx}{ds}\int Z dm$$
$$+ \frac{dx}{ds}\int (yZ - zY) dm + \frac{dy}{ds}\int (zX - xZ) dm + \frac{dz}{ds}\int (xY - yX) dm.$$

C'est, comme il est facile de le voir, la somme des momens de toutes les forces extérieures, à partir d'une des extrémités de la verge jusqu'au point x, y, z de la courbe relativement à la tangente à la courbe en ce point. On ne parvient aux valeurs générales de ϵ et de σ que par des calculs pénibles, dont les résultats paraissent fort compliqués.

[16.] Telle est donc la manière d'introduire dans les équations indéfinies de l'équilibre d'un fil raide ou élastique, les élémens de la raideur ou de l'élasticité les plus complètes. Ces élémens nous paraissent naturels, et en outre remplacer avec quelque avantage, ceux que M. *Lagrange* a introduits pour la raideur, selon sa belle méthode des indéterminées, qui lui servent à multiplier les variations de certaines fonctions α, β, γ dont il ne dit pas la signification particulière. D'après notre discussion, il est facile de voir que les forces qui résultent de ces indéterminées, ne seraient autres que celles que nous avons désignées par A, B, C; c'est-à-dire que deux d'entre elles, B, C, auraient l'inconvénient d'être des grandeurs infinies de divers ordres.

J'ai cru, dans tout ceci, ne devoir pas séparer le problème de l'équilibre d'une verge raide de celui d'un fil élastique, parce que les équations indéfinies sont les mêmes dans leur forme : mais nous avons déjà annoncé qu'elles diffèrent essentiellement par l'usage qu'on doit en faire dans ces deux questions. Pour l'équilibre d'une verge raide, on connaît la forme de la verge par deux équations entre trois coordonnées. Si, par exemple, on la suppose entièrement libre, il entre dans ces mêmes

Digitized by Google

équations six constantes arbitraires et non davantage, d'après lesquelles cette courbe, sans changer de forme, peut prendre toutes les situations dans l'espace. Or, on voit par la discussion de ce cas, dans la *Mécanique analytique*, pag. 163 (nouvelle édit.^{on}), que l'on est conduit aux équations qui suivent,

$$0 = SXdm, \qquad 0 = SYdm, \qquad 0 = SZdm,$$
$$0 = S(Y\zeta - Zy)dm, \quad 0 = S(Zx - X\zeta)dm, \quad 0 = S(Xy - Yx)dm,$$

le signe S représentant toujours des intégrales étendues à toute la longueur du fil. Ces intégrations définies se pourront effectuer, puisque les forces X, Y, Z sont des fonctions qui ne peuvent dépendre que de la position du point de la courbe sur lequel elles agissent, et qu'à cause des deux équations données de la courbe, ce point sera déterminé par l'une de ses coordonnées. Dans les résultats de ces intégrations, les six constantes des équations de la courbe entreront, et seront déterminées par les six équations formées de ces intégrales égalées à zéro. Dès que ces constantes seront connues, la position particulière de la courbe le sera elle-même, puisqu'il ne restera rien d'indéterminé dans ses deux équations. On mettra dans les équations du n.° [13.] les valeurs de x, y, ζ, X, Y, Z en fonction de la variable que l'on jugera commode de conserver pour fixer la position du point de la courbe. Les intégrations ne portant plus que sur des fonctions connues de cette variable, nous les considérons encore comme effectuées. Au moyen de ces équations, les élémens a, b, c de la raideur pour chaque point de la courbe (lesquels remplacent les indéterminées λ, μ, ν de M. *Lagrange*), se trouvent connues, et fournissent par suite les forces A, B, C, que nous avons employées, ou bien encore les valeurs des forces σ, ε, ι que nous trouvons convenable d'y substituer, afin d'éviter les grandeurs infinies des forces B, C. L'évaluation de σ, ε, ι n'exigeant que des différenciations, n'offrira aucune difficulté. L'examen de tout autre cas conduit également à la détermination entière des constantes qui fixent une verge rigide dans son équilibre.

Digitized by Google

Mais, lorsque l'on s'occupe d'un fil doué des trois espèces d'élasticité que nous représentons par σ, ϵ, ι, de deux ou d'une d'entre elles seulement, ces quantités sont données par la nature et la constitution du fil ; et la chose à connaître, c'est la forme qu'il doit prendre sous l'action des forces. On saura, par exemple, qu'avant d'être soumis à cette action, le fil avait une certaine forme, au changement de laquelle sa constitution lui permet de s'opposer avec des forces connues pour chacune des trois espèces d'élasticité. On connaîtrait donc la tension σ, l'élasticité ϵ, la torsion ι ; en les concevant exprimées pour chaque point de la courbe par une même variable, ainsi que les forces X, Y, Z qui se rapportent à ce point, il suffira de ces trois équations indéfinies pour avoir celles dont la forme de la courbe dépend : mais il entrera nécessairement dans ces équations une indéterminée dépendante elle-même de la longueur inconnue que devra prendre le fil extensible sous l'action des forces, et ce ne sera que lorsqu'on connaîtra la forme qu'il affectera dans son équilibre qu'on pourra obtenir cette indéterminée. Elle devra être préalablement éliminée, et cela réduit à deux leur nombre. La difficulté de leur intégration sera très-grande dans tous les cas. Notre objet étant uniquement d'indiquer la manière d'y faire entrer les élémens de l'élasticité la plus complète, l'exemple que nous venons de suivre nous semble suffire ; mais chaque cas à traiter pourra apporter encore plusieurs modifications à cette marche. Quant aux équations des limites, nous avons constamment négligé de nous en occuper, parce que la méthode des variations et les applications que M. *Lagrange* en a développées dans sa *Mécanique*, ne laissent aucune obscurité sur ce point.

MÉMOIRE

Digitized by Google

MÉMOIRE

Sur la Détermination du nombre des Racines réelles dans les Équations algébriques ;

Extrait de plusieurs Mémoires lus à l'Institut, dans le courant de l'année 1813.

Par A. L. Cauchy, *Ingénieur des Ponts et Chaussées.*

I.re SECTION.

Exposition générale de la théorie.

§. I.er Les géomètres se sont beaucoup occupés de la question qui fait l'objet de ce mémoire, et qui peut être envisagée sous deux points de vue différens, selon qu'il s'agit des équations littérales, ou que l'on considère une équation dont tous les coefficiens sont donnés en nombres. Dans le second cas, on résout complétement le problème en formant par les règles connues une équation auxiliaire dont les racines sont les carrés des différences entre celles de la proposée ; ce qui fournit le moyen d'assigner une quantité moindre que la plus petite de ces différences, et par suite de fixer avec le nombre des racines réelles, des limites entre lesquelles chacune des racines est comprise. Mais, relativement aux équations littérales, la question consiste à trouver des fonctions rationnelles de leurs coefficiens, dont les signes déterminent dans chaque cas particulier le nombre et l'espèce de leurs racines réelles. Or ce n'était, jusqu'à présent, que pour un petit nombre d'équations d'une forme déterminée que l'on avait réussi

Digitized by Google

à former de semblables fonctions. Ce qu'il y avait de plus général sur cette matière avait été donné par *Degua*, dans les mémoires de l'Académie des Sciences, année 1741. Mais, quoiqu'il eût établi la plupart des principes qui devaient conduire à la solution du problème, il paraissait désespérer que l'on pût jamais y parvenir, et les géomètres desiraient encore une méthode générale applicable aux équations littérales de tous les degrés. M. *Poisson* ayant bien voulu m'indiquer ce sujet de recherches, je me suis proposé de compléter, s'il était possible, cette partie de l'algèbre; et après diverses tentatives, je suis enfin parvenu à la méthode qui fait l'objet du présent mémoire. Afin de rendre cette méthode plus sensible, je commencerai par l'exposer d'une manière géométrique; et pour plus de simplicité, je supposerai d'abord que ni l'équation proposée ni aucune des équations auxiliaires qu'on sera obligé de considérer n'ont de racines égales entre elles ou égales à zéro.

Si l'on désigne par x la variable de l'équation donnée et par X son premier membre, X étant un polynome en x du degré n; ce polynome pourra être considéré comme représentant l'ordonnée d'une courbe parabolique, dont les points d'intersection avec l'axe des x auront pour abscisses les racines réelles de l'équation proposée. La parabole dont il s'agit sera une courbe continue à une seule branche, composée en général 1.° de plusieurs portions finies terminées par leurs deux extrémités à l'axe des abscisses, 2.° de deux portions indéfinies qui toutes deux s'éleveront au-dessus de l'axe des x, si l'équation proposée est de degré pair, et dont l'une s'abaissera au-dessous du côté des abscisses négatives dans le cas contraire. Toutes ces portions se réduiraient à une seule, si l'équation donnée n'avait que des racines imaginaires; et, dans ce cas, la courbe s'étendrait indéfiniment au-dessus de l'axe des abscisses. Dans tout autre cas, le nombre des portions finies de la parabole, augmenté de l'unité, sera toujours égal au nombre des points d'intersection de la courbe avec l'axe des x, c'est-à-dire, au nombre des racines réelles de la proposée.

Digitized by Google

Après les points où la parabole coupe l'axe des x, les plus remarquables sont ceux où la tangente devient horizontale, et que je désignerai sous le nom de *sommets*. Ces mêmes points sont aussi ceux où l'ordonnée de la courbe devient un *maximum* ou un *minimum*. J'appellerai *sommets de première espèce* ceux où la courbe tourne sa concavité vers l'axe des abscisses, et où l'ordonnée, abstraction faite du signe, devient un *maximum*. J'appellerai *sommets de seconde espèce* ceux où la courbe tourne sa convexité vers le même axe, et où l'ordonnée, abstraction faite du signe, devient un *minimum*. Si l'on parcourt une partie de la parabole située toute entière d'un même coté de l'axe des abscisses, les divers sommets que l'on rencontrera seront alternativement de l'une et de l'autre espèce ; et, si l'une des extrémités est un point d'intersection de la courbe avec l'axe, le sommet le plus voisin de cette extrémité sera un sommet de première espèce. Il en résulte que, dans chaque portion finie de courbe, comprise entre deux points d'intersection consécutifs, le nombre des sommets de première espèce surpasse toujours d'une unité le nombre des sommets de seconde espèce. De plus, ces deux espèces de sommets sont toujours en même nombre dans chacune des deux portions indéfinies.

Il suit de cette remarque, que le nombre total des sommets de première espèce surpasse le nombre total des sommets de seconde espèce d'autant d'unités qu'il y a de portions finies dans la courbe que l'on considère. Par suite, la différence de ces deux nombres, augmentée de l'unité, sera toujours égale au nombre des points d'intersection de la courbe avec l'axe. En général, *si l'on considère une partie quelconque de la courbe, comprise entre deux points fixes, le nombre des points d'intersection et ceux des sommets de première et de seconde espèce compris dans cette même partie auront entre eux une relation qu'il est facile de déterminer. Le premier de ces trois nombres sera égal à la différence des deux autres, si, en s'approchant de ses deux extrémités, la partie en question s'approche d'un côté et s'éloigne de l'autre de l'axe des abscisses. Il surpassera la même différence*

Digitized by Google

d'une unité, si vers ses deux extrémités la même partie s'éloigne de l'axe des x. *Enfin il en sera surpassé d'une unité dans le cas contraire.*

Pour faire une application de ce théorème, supposons que l'on considère la moitié de la parabole située à droite de l'axe des ordonnées, ou du côté des abscisses positives. Si, en s'approchant de l'axe des ordonnées, cette moitié de parabole s'approche également de l'axe des x, alors du côté des abscisses positives la différence entre les nombres de sommets de première et de seconde espèce sera égale au nombre des points d'intersection de la courbe avec l'axe. Si, dans le même cas, on considère l'autre moitié de parabole située du côté des abscisses négatives, on trouvera qu'en s'approchant de l'axe des ordonnées cette moitié s'éloigne de l'axe des x; et par conséquent du côté des abscisses négatives le nombre des points d'intersection de la courbe avec l'axe surpassera d'une unité la différence entre les nombres de sommets de première et de seconde espèce. On obtiendrait des résultats inverses, si, en s'approchant de l'axe des ordonnées, la moitié de parabole qui correspond aux abscisses positives s'éloignait de l'axe des x. Par suite de ce qu'on vient de dire, *si l'on forme les différences qui existent entre les nombres de sommets de première et de seconde espèce, 1.° du côté des abscisses positives, 2.° du côté des abscisses négatives, la somme de ces deux différences, augmentée de l'unité, sera toujours égale au nombre total des points d'intersection de la courbe avec l'axe*, ce que l'on savait déjà ; et de plus, *l'excès de la première différence sur la seconde sera supérieur ou inférieur d'une unité à la différence qui existe entre le nombre des points d'intersection correspondans aux abscisses positives et le nombre des points d'intersection correspondans aux abscisses négatives, selon qu'en s'approchant de l'axe des ordonnées du côté des abscisses positives la parabole s'approchera ou s'éloignera de l'axe des* x. Ces théorèmes étant une fois établis en géométrie, voyons comment on peut les traduire en analyse.

§. II. Soit toujours X le premier membre de l'équation proposée, et désignons par X' et X'' ses fonctions dérivées du premier et du

Digitized by Google

second ordre. X sera l'ordonnée de la parabole que nous avons considérée ci-dessus. Les points d'intersection de cette parabole avec l'axe des x auront pour abscisses les racines réelles de l'équation $X = 0$; et ces mêmes points seront situés du côté des abscisses positives ou du côté des abscisses négatives, suivant que les racines correspondantes seront elles-mêmes positives ou négatives. Quant aux sommets, c'est-à-dire, aux points de la courbe où l'ordonnée devient un *maximum* ou un *minimum*, ils auront évidemment pour abscisses les racines réelles de l'équation dérivée

$$X' = 0.$$

On sait de plus que la fonction X ne peut devenir un *maximum* absolu, c'est-à-dire abstraction faite du signe, qu'autant que X et X'' sont de signes différens, et ne peut devenir un *minimum* absolu que dans le cas où X et X'' sont de même signe. Par suite, le produit XX'' sera toujours négatif relativement aux sommets de première espèce, et positif relativement aux sommets de seconde espèce. Enfin, pour décider si, en s'approchant de l'axe des ordonnées du côté des abscisses positives, la parabole s'approche ou s'éloigne de l'axe des abscisses, il suffira évidemment de voir si, quand l'abscisse devient nulle, l'ordonnée et sa dérivée sont de même signe ou de signes contraires, c'est-à-dire, si le produit des deux derniers termes de l'équation donnée est positif ou négatif.

Il suit de ces considérations que, si l'on savait résoudre l'équation $X' = 0$, il serait facile d'obtenir non-seulement l'excès du nombre total des sommets de première espèce sur le nombre total des sommets de seconde espèce, mais encore l'excès de la différence entre les nombres de sommets de première et de seconde espèce situés du côté des abscisses positives sur la différence entre les nombres de sommets de première et de seconde espèce situés du côté des abscisses négatives. En effet, pour obtenir la somme de ces deux dernières différences ou le premier excès, il suffirait de substituer successivement toutes les racines

Digitized by Google

reelles de l'équation $X'=0$ dans le produit XX'', puis de retrancher le nombre des valeurs positives de ce produit du nombre de ses valeurs négatives ; et pour obtenir l'excès de la première différence sur la seconde, il suffirait de changer préalablement les signes de toutes les valeurs du produit XX'' qui correspondent à des abscisses négatives, ce qui revient à remplacer le produit XX'' par le suivant xXX''.

Supposons maintenant qu'au lieu de résoudre l'équation $X'=0$, on forme deux équations auxiliaires qui aient respectivement pour racines les diverses valeurs des deux produits XX'', xXX'' prises avec des signes contraires, et correspondantes à toutes les racines réelles ou imaginaires de l'équation dérivée $X'=0$. Si, comme nous le supposerons d'abord, ces deux équations auxiliaires n'ont pas de racines égales, celles de leurs racines qui correspondront à des racines imaginaires de l'équation dérivée seront elles-mêmes imaginaires ; et par suite, si l'on forme successivement pour chacune d'elles l'excès du nombre des racines positives sur le nombre des racines négatives, on aura précisément les deux excès ou quantités cherchées. Au reste, il sera facile d'obtenir par l'élimination les deux équations auxiliaires dont il s'agit : car, si l'on représente par y l'inconnue de la première, par z l'inconnue de la seconde, et par

$$Y = 0, \quad Z = 0$$

les équations elles-mêmes, il suffira, pour obtenir la première auxiliaire $Y=0$, d'éliminer x entre les deux équations

$$X' = 0, \quad y + XX'' = 0,$$

et pour obtenir la seconde auxiliaire $Z=0$, d'éliminer x entre les deux équations

$$X' = 0, \quad z + xXX'' = 0.$$

Cela posé, les deux théorèmes de géométrie que nous avons énoncés ci-dessus, page 460, se réduisent aux deux suivans.

Digitized by Google

Théorème 1.er *Le nombre des racines réelles de la proposée* $X=0$ *surpasse toujours d'une unité la différence qui existe entre les nombres de racines positives et négatives de la première auxiliaire* $Y=0$.

Théorème 2.e *La différence qui existe dans la proposée* $X=0$ *entre les nombres de racines positives et négatives est supérieure ou inférieure d'une unité à la même différence dans la seconde équation auxiliaire* $Z=0$, *suivant que le produit des deux derniers coefficiens de l'équation proposée pris en signe contraire est positif ou négatif.*

Si l'équation proposée $X=0$ est du degré n, l'équation dérivée $X'=0$, et par suite les deux équations auxiliaires $Y=0$, $Z=0$, seront toutes trois du degré $n-1$ inférieur d'une unité à celui de la proposée. Il est maintenant facile de voir comment les deux théorèmes précédens peuvent conduire à la solution du problème qui fait l'objet de ce mémoire. En effet, ce que l'on cherche est le nombre et l'espèce des racines réelles, ou, si l'on veut, le nombre des racines positives et le nombre des racines négatives de l'équation $X=0$. Pour y parvenir, il suffit évidemment de résoudre séparément chacune des deux questions suivantes :

1.° Déterminer le nombre total des racines réelles de l'équation $X=0$;

2.° Déterminer le différence entre les nombres de racines positives et négatives de cette même équation.

D'ailleurs, en vertu des théorèmes ci-dessus énoncés, on pourra résoudre relativement à l'équation donnée du degré n les deux questions précédentes, si l'on sait résoudre la seconde relativement à une équation quelconque du degré $n-1$. Pareillement, on pourra réduire la détermination de la différence entre les nombres de racines positives et négatives dans une équation du degré $n-1$ à la détermination de la même différence dans une équation du degré $n-2$, et abaisser ainsi continuellement la difficulté jusqu'à ce que l'on parvienne à une équation du premier degré. Cette dernière n'ayant qu'une seule racine tou-

Digitized by Google

jours réelle, la différence entre les nombres de racines positives et négatives y sera évidemment égale à $+1$ ou à -1, suivant que le produit des deux cofficiens de l'équation pris en signe contraire sera positif ou négatif. Toutes les difficultés étant ainsi levées, les deux questions ci-dessus énoncées se trouveront complétement résolues.

En résumant ce qui vient d'être dit, on aura pour déterminer la différence qui existe entre le nombre des racines positives et le nombre des racines négatives de la proposée, la règle suivante :

Soit $X=0$ *l'équation proposée du degré* n, X' *et* X'' *les deux premières dérivées de* X. *Éliminez la variable* x *entre les deux équations*

$$X' = 0, \quad z + xXX'' = 0;$$

et soit $Z=0$ *l'équation auxiliaire en* z *qui en résultera. Cette équation sera du degré* $n-1$. *Soient* Z' *et* Z'' *les deux premières dérivées de* Z. *Éliminez de nouveau la variable* z *entre les deux équations*

$$Z' = 0, \quad v + zZZ'' = 0;$$

et soit $V=0$ *l'équation auxiliaire en* v *qui en résultera. Cette équation sera du degré* $n-2$, *&c..... Continuez de même jusqu'à ce que vous arriviez à une équation auxiliaire du premier degré. Vous aurez en tout* n *équations, y compris la proposée, savoir,*

$$X=0, \quad Z=0, \quad V=0, \quad \&c....$$

Si dans chacune d'elles vous multipliez l'un par l'autre les coefficiens des deux derniers termes, vous obtiendrez n *produits différens;* et la valeur négative ou positive de chaque produit fera connaître si la différence entre les nombres de racines positives et négatives de l'équation à laquelle il se rapporte est supérieure ou inférieure d'une unité à la même différence dans l'équation suivante. Par suite, *si l'on change les signes de tous ces produits, et qu'après ce changement on remplace les produits qui obtiendront une valeur positive par* $+1$, *et ceux qui obtiendront une valeur négative par* -1 ; *la somme algébrique des résultats sera précisément égale à la différence entre le nombre des racines positives et le nombre des racines négatives de l'équation proposée.*

On

Digitized by Google

On aura ensuite, pour déterminer le nombre total des racines réelles de l'équation donnée, cette autre règle :

Soit toujours $X = o$ *l'équation proposée du degré* n ; X' *et* X'' *les deux premières dérivées de* x. *Éliminez* x *entre les deux équations*

$$X' = o, \quad y + XX' = o ;$$

et soit $Y = o$ *l'équation auxiliaire en* y *qui en résultera. Cette équation sera du degré* $n - 1$; *et si l'on détermine, par la règle précédente, la différence entre les nombres de ses racines positives et négatives, cette différence augmentée d'une unité sera précisément égale au nombre des racines réelles de la proposée.*

Le nombre des produits que l'on forme, en suivant la première règle, étant égal à n; le nombre de ceux que l'on formera, en suivant la seconde, sera égal à $n - 1$, et par suite les signes de $2n - 1$ fonctions différentes des coefficiens de l'équation donnée suffiront pour déterminer le nombre et l'espèce de ses racines réelles.

§. III. La méthode précédente suppose évidemment que ni l'équation proposée ni aucune des équations auxiliaires n'aient de racines égales entre elles ou égales à zéro : et d'abord, si l'équation proposée avait des racines réelles égales entre elles, la courbe dont l'ordonnée représente le premier membre de cette équation devenant tangente en un ou plusieurs points à l'axe des abscisses, chaque point de tangence devrait être considéré comme formé par la réunion d'autant de points d'intersection de la courbe avec l'axe, et d'autant de sommets moins un qu'il y aurait pour ce même point de racines égales dans la proposée. De plus, les points de tangence dont il s'agit étant situés sur l'axe des abscisses, les valeurs correspondantes de l'ordonnée X et du produit XX'' s'évanouiraient, et ce produit cesserait d'avoir un signe déterminé. Enfin, si la proposée avait une ou plusieurs racines nulles, cette équation n'ayant plus de dernier terme, le produit des deux derniers coefficiens s'évanouirait, et ne pourrait plus être considéré comme positif ou comme négatif.

Digitized by Google

Les racines égales des équations auxiliaires du degré $n-1$ peuvent provenir de deux causes, savoir, 1.° de racines égales dans l'équation dérivée $X'=0$, 2.° d'un ou plusieurs couples de racines imaginaires dans l'équation dérivée, qui, par suite de relations particulières entre les coefficiens de cette équation, fournissent des racines réelles aux équations auxiliaires. Ainsi, par exemple, si $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ désigne une racine imaginaire de $X'=0$, et que la substitution de $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ dans le produit XX'' donne pour résultat la quantité réelle A, la substitution de $\alpha-\beta\sqrt{-1}$ dans le même produit donnera encore le même résultat; et comme les racines imaginaires

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}, \quad \alpha-\beta\sqrt{-1}$$

appartiennent toutes deux à l'équation dérivée, la première équation auxiliaire aura deux racines égales à $-A$. Toutes les fois que l'équation dérivée aura des racines égales, les racines qui en proviendront dans les équations auxiliaires seront non-seulement égales entre elles, mais encore égales à zéro; car dans ce cas, la fonction X'' étant nulle aussi bien que la fonction X', le produit XX'' s'évanouira nécessairement. Par suite, on ne pourra plus déterminer quel est le signe de ce produit, ni décider par ce moyen si, pour le sommet que l'on considère, l'ordonnée de la courbe devient un *maximum* ou un *minimum* absolu. Il pourra même arriver qu'elle ne soit ni l'un ni l'autre. Pour savoir dans quel cas cela aura lieu, désignons par

$$X', \quad X'', \quad X''', \quad X^{IV}, \quad X^{V}, \quad \&c.....$$

les dérivées des divers ordres de l'ordonnée X; et supposons que dans toutes ces fonctions x désigne l'abscisse du sommet que l'on considère. Si l'on fait croître ou diminuer cette abscisse d'une quantité indéterminée h, l'ordonnée X deviendra

$$X\pm hX'+\frac{h^2}{1.2}X''\pm\frac{h^3}{1.2.3}X'''+\frac{h^4}{1.2.3.4}X^{IV}\pm\frac{h^5}{1.2.3.4.5}X^{V}+\&c...;$$

ou, parce que $X'=0$,

Digitized by Google

$$X + \frac{h^2}{1.2} X'' \pm \frac{h^3}{1.2.3} X''' + \frac{h^4}{1.2.3.4} X^{IV} \pm \frac{h^5}{1.2.3.4.5} X^V + \&c....$$

Par conséquent, la différence entre l'ordonnée correspondante à l'abscisse $x \pm h$ et l'ordonnée correspondante à l'abscisse x, ou, pour abréger, la différence de l'ordonnée sera

$$\frac{h^2}{1.2} X'' \pm \frac{h^3}{1.2.3} X''' + \frac{h^4}{1.2.3.4} X^{IV} \pm \frac{h^5}{1.2.3.4.5} X^V + \&c....$$

Pour de très-petites valeurs de h, cette différence se réduira au premier de ses termes qui ne s'évanouira pas. Elle se réduira donc à

$\frac{h^2}{1.2} X''$, si X'' n'est pas nul, ou si, pour le sommet que l'on considère, l'équation dérivée n'a pas de racines égales ;

$\pm \frac{h^3}{1.2.3} X'''$, si l'on a $X'' = 0$, X''' < ou > 0, c'est-à-dire, si, pour le sommet que l'on considère, l'équation dérivée a deux racines égales ;

$\frac{h^4}{1.2.3.4} X^{IV}$, si l'on a $X'' = 0$, $X''' = 0$, X^{IV} < ou > 0, c'est-à-dire, si, pour le sommet que l'on considère, l'équation dérivée a trois racines égales ;

$\pm \frac{h^5}{1.2.3.4.5} X^V$, si l'on a $X'' = 0$, $X''' = 0$, $X^{IV} = 0$, X^V > ou < 0, c'est-à-dire, si, pour le sommet que l'on considère, l'équation dérivée a quatre racines égales ;

&c.... &c....

En général on voit que la différence de l'ordonnée conservera le même signe, quel que soit d'ailleurs celui de h, si, pour le point que l'on considère, la dérivée a un nombre pair de racines égales. Elle changera de signe avec h dans le cas contraire. Dans ce dernier cas, l'ordonnée ne pourra être ni un *maximum* ni un *minimum*. Mais si la

Digitized by Google

dérivée a un nombre pair de racines égales, l'ordonnée correspondante à l'abscisse $x \pm h$ sera représentée, pour de très-petites valeurs de h, par un des binomes

$$X + \frac{h^2}{1.2} X'',$$

$$X + \frac{h^4}{1.2.3.4} X^{IV} :$$

&c. . . . . ,

et par suite l'ordonnée X correspondante à l'abscisse x sera un *minimum* ou un *maximum* absolu, suivant que le second terme de ce binome aura un signe égal ou opposé à celui du premier terme, c'est-à-dire, suivant que le premier des produits

$$XX'', \quad XX^{IV}, \quad XX^{VI}, \quad \&c. . . . .$$

qui ne s'évanouira pas, sera positif ou négatif.

On vient de voir que les équations auxiliaires peuvent acquérir des racines nulles dans deux cas différens, savoir, 1.° quand la proposée a des racines égales, 2.° quand l'équation dérivée a des racines égales : et en effet, la fonction X dans le premier cas, la fonction X'' dans le second, et par suite les produits XX'', xXX'' dans les deux cas, s'évanouissent. Il est encore un troisième cas où la seconde équation auxiliaire seulement peut avoir des racines nulles. C'est celui où il existe déjà de telles racines dans la dérivée : car le produit xXX'' s'évanouit alors avec son premier facteur x. Dans toutes ces hypothèses, le dernier terme d'une équation auxiliaire étant nul, le produit des deux derniers termes de cette équation se réduit à zéro; et par suite, on ne peut plus décider si ce produit est positif ou négatif.

De même que des racines égales dans l'équation proposée du degré n produisent des racines nulles dans les équations auxiliaires du degré $n-1$; de même les racines égales qui pourraient se trouver dans ces

Digitized by Google

dernières produiront des racines nulles dans les équations auxiliaires du degré $n-2$. En général, si, dans une des suites d'équations auxiliaires qu'on est obligé de former, quelque équation a des racines égales, la suivante aura des racines nulles, et le produit de ses deux derniers coefficiens se trouvera réduit à zéro.

Ainsi, toutes les hypothèses possibles dans lesquelles la méthode générale se trouve en défaut, coïncident avec cette circonstance remarquable, que, sur les produits dont les signes devaient déterminer le nombre et l'espèce des racines réelles de la proposée, un ou plusieurs s'évanouissent, et ne peuvent plus par cela même servir à la détermination dont il s'agit. On voit en même temps que cela n'aura jamais lieu, à moins que la proposée ou les équations auxiliaires n'aient des racines égales entre elles ou égales à zéro. Pour faire disparaître les inconvéniens qui résultent de cette égalité, on peut employer diverses méthodes que je vais indiquer en peu de mots.

§. IV. La première méthode et celle qui se présente d'abord à l'esprit consiste à passer en revue tous les cas particuliers que peut offrir l'équation donnée, et à fournir les moyens de lever les difficultés propres à chacun des cas dont il s'agit. Ainsi, par exemple, si la proposée a des racines nulles, il sera facile d'en constater le nombre et de s'en débarrasser ensuite. On peut éviter de même la considération des racines égales, en supposant l'équation préparée d'avance, de manière que toutes ses racines soient inégales entre elles. Après cela il faudra examiner si la dérivée a des racines égales entre elles ou à zéro, et remédier aux inconvéniens qui pourraient naître de cette égalité. On y parviendra comme il suit.

Lorsque plusieurs racines de la dérivée deviennent égales entre elles, les différens sommets dont ces racines étaient les abscisses se réunissent, et de cette réunion résulte un nouveau sommet qui sera double, triple, quadruple, &c.... suivant le nombre des racines qui viendront à coïncider. L'ordonnée de ce sommet sera un *maximum* ou un *minimum*

Digitized by Google

absolu, si les racines qui deviennent égales sont en nombre impair: et pour déterminer l'espèce du sommet dans cette hypothèse, il suffira de consulter le signe du produit XX'', s'il s'agit d'un sommet simple, du produit XX^{IV}, s'il s'agit d'un sommet triple, &c..... Quant aux sommets doubles, quadruples, &c..... on devra cesser d'en tenir compte, attendu que les ordonnées de ces sommets ne doivent point être rangées parmi les ordonnées *maxima* et *minima*. Cela posé, si la dérivée n'a point de racines nulles, les théorèmes de géométrie établis ci-dessus (page 460) subsisteront toujours; et pour déterminer le nombre et l'espèce des racines réelles de la proposée, il suffira de calculer, 1.° la somme des différences qui existent du côté des abscisses positives et du côté des abscisses négatives entre les sommets de première et de seconde espèce; 2.° l'excès de la première différence sur la seconde. On y parviendra facilement en déterminant ainsi qu'il suit les diverses parties de la somme et de l'excès en question qui correspondent aux racines simples, triples, quintuples, &c..... Soit toujours X' l'équation dérivée; soit de plus X_1' le produit de ses facteurs simples, X_2' celui de ses facteurs doubles, X_3' celui des facteurs triples, &c.... élevés chacun à la première puissance, en sorte qu'on ait

$$X' = X_1' \cdot (X_2')^2 \cdot (X_3')^3 \cdot \ldots .$$

La méthode des racines égales fera connaître chacun des polynomes X_1', X_3', X_5', &c....; et pour obtenir la différence totale entre les nombres de sommets de première espèce, il suffira d'éliminer x

1.° Entre les équations $X_1' = 0$, $y + XX'' = 0$,

2.° Entre les équations $X_3' = 0$, $y + XX^{IV} = 0$,

3.° Entre les équations $X_5' = 0$, $y + XX^{VI} = 0$.

&c.....

On aura par ce moyen plusieurs équations auxiliaires en y au lieu d'une seule; et la somme des différences qui auront lieu pour ces diverses

Digitized by Google

équations entre les nombres de racines positives et négatives sera égale à la différence cherchée, ou à la somme des différences qui existent tant du côté des abscisses positives que du côté des abscisses négatives entre les nombres de sommets de première et de seconde espèce. On obtiendra de même l'excès de la première différence sur la seconde, en substituant aux équations

$$y+XX''=0,\quad y+XX^{IV}=0,\quad y+XX^{VI}=0,\quad \&c....,$$

les suivantes

$$z+xXX''=0,\quad z+xXX^{IV}=0,\quad z+xXX^{VI}=0,\quad \&c....;$$

et cet excès, augmenté ou diminué d'une unité, fera connaître la différence qui existe entre les nombres de racines positives et négatives de la proposée. Cette dernière différence et l'excès dont il s'agit deviendraient égaux entre eux, si un sommet de première ou de seconde espèce était situé sur l'axe des abscisses, ou, ce qui revient au même, si la dérivée avait un nombre impair de racines nulles : mais si la dérivée n'a point de racines nulles, ou si ces racines sont en nombre pair, il faudra, pour obtenir la même différence, augmenter ou diminuer l'excès en question d'une unité, suivant qu'en s'approchant de l'axe des ordonnées du côté des abscisses positives la courbe s'éloignera ou s'approchera de l'axe des x; c'est-à-dire, suivant que le produit du dernier terme de l'équation proposée par celui des termes précédens, qui renfermera la puissance la moins élevée de x, sera négatif ou positif.

La théorie précédente suppose évidemment que les équations auxiliaires en y et z, qui correspondent aux facteurs simples, triples, quintuples, &c..... de l'équation dérivée, n'ont pas de racines égales. S'il en était autrement, ces racines pourraient à-la-fois être réelles, et provenir de quelques couples de racines imaginaires des équations

$$X_1'=0,\quad X_3'=0,\quad X_5'=0,\quad \&c....$$

On évitera cet inconvénient, si l'on multiplie chacun des produits

Digitized by Google

$$XX'', \quad XX^{IV}, \quad XX^{VI}, \quad \&c.....$$
$$xXX'', \quad xXX^{IV}, \quad xXX^{VI}, \quad \&c.....$$

par une fonction de x qui reste positive pour toutes les valeurs réelles de la variable x, et qui empêche ces mêmes produits de devenir réels pour les valeurs imaginaires de x qui satisfont à l'équation dérivée. Telle est la fonction

$$(x + k)^2,$$

dans laquelle la constante arbitraire k peut recevoir une infinité de valeurs qui remplissent la condition exigée.

En suivant la méthode précédente, on finit toujours par obtenir la solution complète de la question proposée; mais s'il s'agit d'une équation littérale, cette méthode entraîne, comme on le voit, l'examen d'autant de cas particuliers que l'on peut faire d'hypothèses différentes sur le nombre des racines égales, non-seulement de la proposée, mais encore des diverses équations auxiliaires. C'est pourquoi elle ne peut être employée avec avantage que dans certaines occasions où, en raison de la forme de l'équation donnée, elle devient facilement applicable.

§. V. Une autre méthode consiste à établir la distinction des diverses espèces de sommets sur la considération immédiate du signe du produit qu'on obtient, en multipliant l'ordonnée X par la série

$$\frac{h^2}{1.2} X'' \pm \frac{h^3}{1.2.3} X''' + \frac{h^4}{1.2.3.4} X^{IV} \pm \frac{h^5}{1.2.3.4.5} X^V + \&c.....,$$

laquelle représente pour un quelconque des sommets l'accroissement de l'ordonnée correspondant à l'accroissement très-petit $\pm h$ de la variable x.

Si l'on fait, pour plus de commodité,

$$X = f(x), \quad \text{et par suite} \quad X'' = f''(x),$$

la

Digitized by Google

la série précédente sera toujours de même signe que

$$f''(x \pm h);$$

d'où il suit que le produit de cette série par X pourra être remplacé par le produit

$$Xf''(x \pm h).$$

Supposons qu'après avoir substitué pour x dans ce dernier produit une des racines réelles de la dérivée, on donne successivement à l'indéterminée h les signes $+$ et $-$; les deux valeurs obtenues par ce moyen seront de signes contraires, si la racine réelle dont il s'agit représente l'abscisse d'un sommet double, quadruple, sextuple, &c.... Elles seront de même signe, si cette racine correspond à un sommet simple, triple, quintuple, &c.... ; et dans cette dernière hypothèse, les deux valeurs du produit seront ou négatives ou positives, suivant que le sommet en question sera de première ou de seconde espèce. De plus, la quantité h restant indéterminée, il est aisé de voir que la substitution des racines imaginaires de la dérivée dans chacun des produits

$$Xf''(x+h), \quad Xf''(x-h),$$

fournira en général des résultats imaginaires. Cela posé, on obtiendra évidemment la différence totale entre les nombres de sommets de première et de seconde espèce, si, après avoir éliminé x entre les deux équations

$$X' = 0, \quad y + Xf''(x \pm h) = 0,$$

on détermine pour l'équation auxiliaire en y ainsi formée et pour de très-petites valeurs de h la différence entre les nombres de racines inégales positives et négatives, 1.° dans le cas où l'on admet pour h le signe supérieur, 2.° dans le cas où l'on admet pour h le signe inférieur, et qu'on prenne ensuite la moyenne entre les deux résultats. C'est ce résultat moyen que je désignerai ici sous le nom de *différence*

Digitized by Google

moyenne entre le nombre des racines inégales positives et le nombre des racines inégales négatives de l'équation auxiliaire en y.

De même, pour obtenir l'excès de la différence entre les nombres de sommets de première et de seconde espèce situés du côté des abscisses positives sur la différence entre les nombres de sommets de première et de seconde espèce situés du côté des abscisses négatives, il suffira d'éliminer x entre les deux équations

$$X' = 0, \quad z + xXf''(x+h) = 0,$$

et de chercher ensuite la différence moyenne entre les nombres de racines inégales positives et négatives de l'équation auxiliaire en z résultante de cette élimination.

Lorsque la dérivée a des racines nulles, un des sommets de la courbe étant situé sur l'axe des ordonnées ne peut plus être compté ni parmi ceux qui répondent aux abscisses positives ni parmi ceux qui répondent aux abscisses négatives; mais alors aussi, le produit

$$xXf''(x+h)$$

venant à s'évanouir avec son premier facteur x, la racine correspondante de l'équation auxiliaire en z ne fait plus partie ni des racines positives ni des racines négatives de cette même équation.

Les résultats précédens subsistent dans le cas même où la proposée a des racines égales. Dans cette hypothèse, la parabole que l'on considère devient tangente en plusieurs points à l'axe des abscisses; et ces points sont évidemment des sommets de la courbe, puisque leurs abscisses satisfont à l'équation dérivée. Mais quoique ces sommets puissent être simples, ou triples, ou quintuples, &c....., ils ne peuvent dans aucun cas être considérés comme sommets de première ou de seconde espèce, attendu que l'ordonnée de chacun d'eux étant nulle n'a plus de signe déterminé, et qu'on ne peut décider par suite si cette ordonnée devient un *maximum* ou un *minimum* absolu. On ne doit donc tenir aucun compte des racines des équations auxiliaires

Digitized by Google

en y et z, qui correspondent à de semblables sommets; mais ces racines disparaissent d'elles-mêmes à cause du facteur X, qui, étant égal à zéro, fait évanouir les deux produits

$$Xf''(x+h), \quad xXf''(x+h).$$

Ainsi, dans tous les cas possibles, la différence moyenne entre les nombres de racines inégales positives et négatives des équations auxiliaires ci-dessus mentionnées détermine immédiatement, 1.° la somme faite de la différence entre les nombres de sommets de première et de seconde espèce situés du côté des abscisses positives, et de la différence semblable formée du côté des abscisses négatives; 2.° l'excès de la première différence sur la seconde. D'ailleurs, si l'on veut étendre les théorèmes précédemment démontrés au cas où l'équation donnée a des racines égales entre elles, on reconnaîtra sans peine que *la somme des deux différences en question est toujours inférieure d'une unité au nombre total des points d'intersection ou de tangence de la courbe avec l'axe des* x. De plus, *l'excès de la première différence sur la seconde sera supérieur d'une unité, égal ou inférieur d'une unité à l'excès du nombre des points d'intersection ou de tangence situés du côté des abscisses positives sur le nombre de ceux qui seront situés du côté des abscisses négatives, selon qu'en s'approchant de l'axe des ordonnées du côté des abscisses positives, et s'éloignant ensuite de ce même axe du côté des abscisses négatives, la courbe s'approchera constamment de l'axe des* x; *ou qu'en passant par l'axe des ordonnées, elle cessera de s'approcher de l'axe des abscisses pour s'en éloigner, ou de s'en éloigner pour s'en rapprocher; ou qu'elle s'éloignera constamment de l'axe des* x. Le premier ou le troisième cas aura lieu, si, la proposée n'ayant pas de racines nulles, la dérivée n'en a pas non plus, ou si ces racines y sont en nombre pair; c'est-à-dire, si la proposée ayant un terme constant, le dernier terme de l'équation dérivée renferme une puissance paire de x. Le second cas aura lieu, si la proposée a des racines nulles, ou si la dérivée a des racines nulles en nombre impair; c'est-à-dire, si l'équation donnée n'a pas de terme constant, ou si le dernier terme de

Digitized by Google

l'équation dérivée renferme une puissance impaire de x. Enfin, pour distinguer le premier cas du troisième, il suffira d'examiner si le produit du dernier terme de l'équation donnée par le dernier terme de la dérivée est positif ou négatif. Soit p le terme constant de la proposée, qui peut être égal à zéro, et qx^r le dernier terme de l'équation dérivée, ou celui qui renferme la plus petite puissance de x. Si dans le produit

$$p \cdot qx^r$$

on donne successivement à x deux valeurs égales et de signes contraires, et qu'on prenne ensuite la valeur moyenne entre les deux résultats, on reconnaîtra facilement que cette valeur moyenne sera positive dans le premier cas, nulle dans le second, négative dans le troisième. Ainsi, en ayant égard au produit du terme constant de la proposée par le dernier terme de la dérivée, on pourra toujours déterminer le nombre et l'espèce des racines inégales de l'équation donnée, à l'aide de la différence moyenne entre le nombre des racines inégales positives et le nombre des racines inégales négatives dans chacune des équations auxiliaires en y et z. Pour obtenir cette différence moyenne relativement à l'une d'elles, par exemple, relativement à l'équation auxiliaire en y, il semble d'abord qu'on serait obligé de déterminer la différence entre les nombres de racines inégales positives et négatives: 1.° dans le cas où l'indéterminée h a de très-petites valeurs positives; 2.° dans le cas où h a de très-petites valeurs négatives. Mais on arrivera au même but, si, après avoir formé les fonctions des coefficiens de l'équation auxiliaire en y qui déterminent la différence dont il s'agit, en laissant le signe et la valeur de h entièrement arbitraires, on substitue à ces fonctions les valeurs qu'elles obtiennent, lorsque ayant développé chacune d'elles suivant les puissances ascendantes de h, et réduit le développement à son premier terme vis-à-vis duquel tous les autres doivent être négligés, on donne successivement à h deux valeurs égales et de signes contraires, et qu'on prend la moyenne entre les deux

Digitized by Google

résultats. Par suite, chacune des fonctions que l'on considère devra être remplacée par zéro, si le premier terme de son développement renferme une puissance impaire de h. Dans le cas contraire, il faudra la considérer comme positive ou comme négative, suivant que le coefficient de ce premier terme sera lui-même positif ou négatif.

Nous venons d'indiquer comment l'emploi de l'indéterminée h peut servir à lever les difficultés que faisaient naître les racines égales des équations en y et z, c'est-à-dire, des équations auxiliaires du degré $n-1$. L'introduction de plusieurs autres indéterminées h', h'', &c..... servirait de même à lever les difficultés qui peuvent résulter de l'égalité de quelques racines dans les équations auxiliaires des degrés

$$n-2, \quad n-3, \quad \&c.....;$$

et, à l'aide de cet artifice, on finirait par déterminer dans tous les cas possibles le nombre et l'espèce des racines de l'équation donnée. Il est bon toutefois d'observer que, si plusieurs de ces racines sont égales entre elles, on obtiendra seulement de cette manière le nombre des racines inégales positives et le nombre des racines inégales négatives; c'est-à-dire, le nombre des quantités réelles essentiellement différentes de valeur ou de signe qui satisfont à la proposée.

La méthode précédente se réduit, comme on le voit, à remplacer dans les deux produits

$$XX'', \quad xXX'',$$

le dernier facteur $X''=f''(x)$ par

$$f''(x\pm h);$$

c'est-à-dire, à substituer dans $f''(x)$ à l'abscisse du sommet que l'on considère l'abscisse $x\pm h$ d'un point de la parabole très-rapproché de ce même sommet. Cette nouvelle méthode, sans exiger comme la première un examen préalable de tous les cas particuliers, a néanmoins le désavantage de compliquer extrêmement les calculs par l'admission

Digitized by Google

de quantités arbitraires dans les équations auxiliaires des divers degrés. On évite cet inconvénient en suivant une troisième méthode dont je vais rendre compte.

§. VI. Dans cette troisième méthode, comme dans la première, je supposerai l'équation donnée préparée de manière qu'elle n'ait pas de racines égales entre elles ou à zéro. Cette préparation faite, on levera facilement tous les obstacles à l'aide des considérations suivantes.

Si les équations auxiliaires n'avaient pas de racines égales entre elles ou à zéro, elles serviraient immédiatement, comme on l'a déjà fait voir, à déterminer le nombre et l'espèce des racines réelles de la proposée; mais si le contraire a lieu, pour ramener ce second cas au premier, il faudra détruire l'égalité dont il s'agit, en substituant aux sommets de la courbe d'autres points très-rapprochés de ces mêmes sommets. Il existe deux manières différentes d'opérer cette substitution. La première consiste à remplacer un quelconque des sommets par un autre point très-voisin de ce sommet, et pris sur la courbe que l'on considère. La seconde consiste à remplacer la courbe elle-même par une autre courbe très-voisine, et à substituer les sommets de cette dernière à ceux de la courbe donnée. Pour effectuer la première substitution, il suffit d'augmenter les abscisses des sommets de quantités indéterminées supposées très-petites. Pour effectuer la seconde, il faut augmenter de quantités très-petites les coefficiens de l'équation proposée, dont les valeurs respectives déterminent la nature de la courbe. Le premier moyen coïncide avec la seconde des deux méthodes précédentes, et rend très-pénible, comme on l'a remarqué, la formation des équations auxiliaires. Le second n'a pas cet inconvénient, et il conduit facilement à la solution du problème proposé dans tous les cas possibles.

En effet, lorsqu'on augmente de quantités très-petites mais arbitraires les coefficiens de l'équation donnée, on détruit les relations qui existaient entre ces coefficiens, et en vertu desquelles les racines des

Digitized by Google

diverses équations auxiliaires pouvaient devenir nulles ou égales entre elles. Par suite, les fonctions des coefficiens qui étaient destinées en général à déterminer le nombre des racines de chaque espèce cessent d'être nulles, et redeviennent propres à la détermination dont il s'agit.

Cela posé, pour obtenir le nombre des racines positives et le nombre des racines négatives d'une équation du degré n, dans le cas où cette équation n'a pas de racines égales entre elles ou à zéro, il suffira de former par la méthode indiquée dans le second paragraphe $2n - 1$ fonctions différentes des coefficiens de cette équation. On substituera ensuite dans chaque cas particulier, à la place des coefficiens dont il s'agit, leurs valeurs prises dans l'équation donnée. Si cette substitution ne fait disparaître aucune des fonctions que l'on considère, leurs signes détermineront immédiatement le nombre des racines de chaque espèce. Mais si quelques-unes de ces fonctions s'évanouissent, on augmentera chacun des coefficiens de l'équation donnée d'une quantité très-petite, mais arbitraire, que l'on peut supposer à volonté positive ou négative. De plus, on assignera à ces mêmes variations un ordre de grandeur déterminé, de telle manière qu'on puisse toujours négliger les unes par rapport aux autres. Les fonctions qui s'évanouissaient, étant développées suivant les variations dont il s'agit, pourront toujours être réduites à un seul terme, et toutes les difficultés seront ainsi levées. On pourra même se dispenser de faire varier à-la-fois tous les coefficiens; il suffira d'en faire varier un ou plusieurs l'un après l'autre, et l'on devra toujours s'arrêter au moment où chacune des fonctions que l'on considère cessera de s'évanouir.

§. VII. Quel que soit le degré n de l'équation donnée, il est possible de former, comme on le verra tout-à-l'heure, plusieurs systèmes d'équations auxiliaires qui jouissent des mêmes propriétés. Il convient de choisir le système pour lequel les fonctions qui déterminent le nombre et l'espèce des racines réelles sont les plus simples possibles. Ce choix étant fait, il faut encore examiner si les fonctions dont il

Digitized by Google

s'agit sont décomposables en facteurs, et si quelques-uns de ces facteurs peuvent être supprimés sans inconvénient. Nous ferons à cet égard les remarques suivantes.

Les deux équations auxiliaires du degré $n-1$, que nous avons appris à former dans le second paragraphe, ont respectivement pour racines des fonctions rationnelles et entières des racines de la dérivée : mais on peut, sans nul inconvénient, multiplier ou diviser les fonctions dont il s'agit par d'autres fonctions qui soient toujours positives, quand les racines de la dérivée sont réelles. Pour faciliter autant que possible le calcul de l'élimination, il faut représenter l'inconnue de chaque équation auxiliaire par une fraction, dont les deux termes soient des polynomes entiers en x choisis de telle manière, que la plus haute puissance de la variable renfermée dans ces deux polynomes soit la plus petite possible. L'expérience m'a fait voir que dans ce cas on arrivait encore à des résultats plus simples. On satisfera à ces conditions, si l'on divise par X^2 les deux produits

$$-XX'', \quad -xXX'',$$

qui représentaient dans le §. II. les valeurs respectives de y et z; ce qui revient à prendre pour inconnue de la première équation auxiliaire la fraction

$$\frac{-X''}{X},$$

et pour inconnue de la seconde équation auxiliaire la fraction

$$\frac{-xX''}{X}.$$

Dans cette hypothèse, on peut simplifier de beaucoup la recherche des fonctions propres à déterminer le nombre des racines de chaque espèce, à l'aide des théorèmes suivans :

1.° *Étant donnée une équation quelconque, si l'on substitue successivement toutes ses racines dans le premier membre de l'équation dérivée, et qu'on fasse le*

le produit des résultats; ce produit sera égal, à un coefficient numérique près, au dernier terme de l'équation qui aurait pour racines les carrés des différences entre celles de la proposée. Ce même produit sera encore égal à celui qu'on aurait trouvé, si l'on eût substitué successivement toutes les racines de la dérivée dans le premier membre de l'équation donnée, et qu'on eût multiplié l'un par l'autre les résultats ainsi obtenus.

2.° *Étant donnée une équation quelconque, si l'on divise par le premier membre de l'équation dérivée une fonction entière de la variable, et si l'on ajoute les diverses valeurs qu'obtient ce quotient lorsqu'on y substitue successivement pour* x *les diverses racines de l'équation donnée, la somme de ces valeurs sera toujours une fonction rationnelle et entière des coefficiens de la proposée.*

3.° *Si l'on divise le premier membre de l'équation donnée par le premier membre de l'équation dérivée du second ordre, et que l'on substitue successivement pour* x *dans ce quotient toutes les racines de la dérivée, la somme des valeurs obtenues, prise en signe contraire, sera égale, à un coefficient numérique près, à la somme des carrés des différences entre les racines de la proposée.*

4.° *Étant données deux équations tellement liées entre elles, que les racines de la seconde soient des fonctions rationnelles quelconques des racines de la première; si l'on forme respectivement les derniers termes des équations aux carrés des différences entre ces racines, et qu'on divise les deux termes obtenus l'un par l'autre, le quotient sera toujours un carré parfait.*

Il suit du troisième théorème que l'une des fonctions qui déterminent le nombre des racines réelles est égale, quel que soit le degré de l'équation donnée, à la somme des carrés des différences entre les racines de cette équation. On peut encore, en appliquant à la méthode précédente un artifice d'analyse indiqué par *Euler*, déterminer pour tous les degrés une autre de ces fonctions. Enfin on prouve facilement que le produit de toutes ces fonctions doit toujours avoir le même signe que le produit des carrés des différences entre les racines. Par suite, sur

Digitized by Google

les $n-1$ fonctions qui déterminent le nombre des racines réelles, le nombre de celles qu'on sera obligé de former séparément pour un degré donné, se trouvera réduit à $n-4$: on n'aura donc besoin d'en calculer aucune en particulier par les équations du second, du troisième et du quatrième degré ; il suffira de calculer une nouvelle fonction pour le cinquième degré, deux pour le sixième, &c.....

Quant aux fonctions de la seconde espèce, c'est-à-dire, à celles qui déterminent la différence entre le nombre des racines positives et négatives de la proposée, on peut en déterminer une pour tous les degrés possibles, en ayant égard au second théorème ; et de plus, on prouve facilement que le produit de toutes ces fonctions doit toujours être affecté du même signe que le produit des carrés des différences entre les racines multiplié par le produit des racines elles-mêmes. Ces dernières fonctions sont les seules qu'on soit obligé de considérer, lorsqu'on veut savoir combien l'équation donnée a de racines réelles comprises entre deux limites α et β ; car le nombre de ces racines réelles est égal à la quantité dont le nombre des fonctions positives diminue, ou dont le nombre des fonctions négatives augmente, lorsqu'on passe de la transformée en $x-\alpha$ à la transformée en $x-\beta$. Par suite, les fonctions de la seconde espèce suffisent pour déterminer le nombre des racines réelles comprises soit entre o et $-\infty$, soit entre o et $+\infty$, c'est-à-dire, le nombre total des racines positives ou négatives ; en sorte qu'on peut toujours se passer, si l'on veut, des fonctions de la première espèce, ou bien les déduire des autres.

Je joins ici la démonstration des théorèmes ci-dessus énoncés, et plusieurs développemens relatifs aux méthodes exposées dans les paragraphes IV, V et VI de la présente section. Pour plus de clarté, j'appliquerai ces méthodes à divers exemples, et particulièrement à la détermination du nombre des racines réelles dans les équations générales des cinq premiers degrés.

Digitized by Google

II.e SECTION.

Développemens analytiques.

Théorème I.er

Soient $\varphi(x) = 0$, $f(x) = 0$, *deux équations différentes, la première du degré* m, *la seconde du degré* n. *Supposons que l'on substitue successivement dans le polynome* $f(x)$ *toutes les racines de l'équation* $\varphi(x) = 0$, *et qu'on fasse le produit des résultats; qu'ensuite l'on substitue dans le polynome* $\varphi(x)$ *toutes les racines de l'équation* $f(x) = 0$, *et qu'on fasse encore le produit des résultats. Les deux produits ainsi obtenus seront égaux et de même signe, si l'un des deux nombres* m *et* n *est pair; ils seront égaux et de signes contraires, si les deux nombres* m *et* n *sont tous deux impairs.*

Démonstration. En effet, soient respectivement α, β, γ, &c..... les racines de l'équation $\varphi(x) = 0$, et a, b, c, &c..... celles de l'équation $f(x) = 0$. Supposons de plus, à l'ordinaire, que la plus haute puissance de la variable dans chacune des fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ soit positive, et ait l'unité pour coefficient : on aura

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ \&c....,$$
$$\varphi(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ \&c....;$$

et par suite les deux produits

$$f(\alpha) \cdot f(\beta) \cdot f(\gamma) \cdot \&c.....,$$
$$\varphi(a) \cdot \varphi(b) \cdot \varphi(c) \cdot \&c.....$$

seront respectivement égaux, le premier à

$$(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)...(\beta-a)(\beta-b)...(\gamma-a)\ \&c....,$$

et le second à

Digitized by Google

$$(a-\alpha)\,(a-\beta)\,(a-\gamma)\ldots.(b-\alpha)\,(b-\beta)\ldots.(c-\alpha)\ \&c\ldots.$$

Sous cette forme le second produit a ses facteurs égaux et de signes contraires à ceux du premier; et comme le nombre de ces mêmes facteurs est mn, on aura

$$f(\alpha).f(\beta).f(\gamma)\ldots. = (-1)^{mn}\,\varphi(a).\varphi(b).\varphi(c)\ldots..,$$

ce qui vérifie le théorème énoncé.

COROLLAIRE 1. Si l'on élimine x, 1.° entre les équations

$$\varphi(x) = 0, \qquad y + f(x) = 0,$$

2.° entre les équations

$$f(x) = 0, \qquad y + \varphi(x) = 0,$$

les deux équations en y résultantes de cette double élimination auront, au signe près, le même terme constant.

COROLLAIRE 2. Désignons en général par $f_n(x)$ le polynome

$$x^n + n a_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 x^{n-2} + \ldots. + n a_{n-1} x + a_n;$$

$f_{n-1}(x)$ désignera le polynome

$$x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} a_2 x^{n-3} + \ldots + (n-1) a_{n-2} x + a_{n-1};$$

et comme on aura dans ce cas

$$f_n'(x) = n f_{n-1}(x),$$

l'équation (1) $f_n(x) = 0$ aura pour dérivée la suivante, (2) $f_{n-1}(x) = 0$.

Si maintenant on désigne par

$$X_1, \quad X_2 \ldots\ldots X_{n-1}, \quad X_n$$

Digitized by Google

les racines de l'équation (1), et par

$$x_1, \quad x_2 \ldots\ldots x_{n-1}$$

celles de l'équation (2); l'un des nombres n, $n-1$ étant nécessairement pair, on aura en vertu du théorème précédent

$$f_n(x_1) f_n(x_2) \ldots f_n(x_{n-1}) = f_{n-1}(X_1) f_{n-1}(X_2) \ldots f_{n-1}(X_{n-1}) f_{n-1}(X_n),$$

ce qui vérifie la seconde partie du premier théorème énoncé dans le §. VII de la section précédente.

THÉORÈME 2.e

Conservons la même notation que dans le second corollaire du théorème précédent; soit, en conséquence,

$$f_n(x) = 0$$

l'équation proposée, et par suite

$$f_{n-1}(x) = 0$$

sa dérivée. Concevons de plus que l'on forme une nouvelle équation qui ait pour racines les carrés des différences entre celles de la proposée. Le dernier terme de cette nouvelle équation sera égal, à un coefficient numérique près, à chacun des produits

$$f_n(x_1) \cdot f_n(x_2) \ldots\ldots f_n(x_{n-1}),$$
$$f_{n-1}(X_1) \cdot f_{n-1}(X_2) \ldots\ldots f_{n-1}(X_{n-1}) \cdot f_{n-1}(X_n).$$

Démonstration. Le dernier terme de l'équation aux carrés des différences entre les racines de la proposée sera

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (X_1 - X_2)^2, \ (X_1 - X_3)^2 \ldots (X_{n-1} - X_n)^2.$$

Ce même terme pourra être considéré comme formé par la multiplication de n produits différens, qui seront respectivement

Digitized by Google

$$(X_1-X_2),\ (X_1-X_3).....(X_1-X_n),$$
$$(X_2-X_1),\ (X_2-X_3).....(X_2-X_n),$$
$$\&c.....$$
$$(X_n-X_1),\ (X_n-X_2).....(X_n-X_{n-1});$$

d'ailleurs, le premier de ces produits est égal à

$$f_n'(X_1) = nf_{n-1}(X_1),$$

le second à

$$f_n'(X_2) = nf_{n-1}(X_2),$$
$$\&c.....$$

le dernier à

$$f_n'(X_n) = nf_{n-1}(X_n)$$

Le dernier terme de l'équation aux carrés des différences entre les racines de la proposée pourra donc être représenté par

$$n^n f_{n-1}(X_1) \cdot f_{n-1}(X_2) \cdot .... \cdot f_{n-1}(X_n).$$

Ce dernier terme sera donc égal à chacun des produits

$$f_{n-1}(X_1) \cdot f_{n-1}(X_2) \cdot .... \cdot f_{n-1}(X_n),$$
$$f_n(x_1) \cdot f_n(x_2) \cdot .... \cdot f_n(x_{n-1}),$$

multiplié par le coefficient numérique n^n; ce qui vérifie en totalité le premier théorème énoncé dans le §. VII de la précédente section.

Corollaire 1. Soit toujours $f_n(x) = 0$ l'équation proposée. Pour obtenir le dernier terme de l'équation aux carrés des différences entre les racines de celle-ci, il suffira d'éliminer x entre les deux équations

$$f_{n-1}(x) = 0,$$
$$y + f_n(x) = 0,$$

et de multiplier ensuite le dernier terme de l'équation résultante par n^n.

Digitized by Google

On obtiendrait encore, mais à un coefficient numérique près, le terme dont il s'agit, si l'on cherchait la condition nécessaire pour que les deux équations

$$f_n(x) = 0,$$
$$f_{n-1}(x) = 0,$$

puissent être en même temps satisfaites.

PROBLÈME I.er

Étant donnée une équation quelconque du degré n, *trouver le dernier terme de l'équation qui aurait pour racines les carrés des différences entre celles de la proposée.*

Solution. Soit toujours

$$f_n(x) = 0,$$

ou

$$x^n + na_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 x^{n-2} + \ldots + na_{n-1} x + a_n = 0,$$

l'équation proposée. On commencera par éliminer x entre les deux équations

$$f_n(x) = 0,$$
$$f_{n-1}(x) = 0;$$

et l'on obtiendra par ce moyen une fonction des coefficiens

$$a_1, \quad a_2 \ldots\ldots a_n,$$

qui sera nulle, toutes les fois que les deux équations précédentes seront en même temps satisfaites. Désignons par B_n la fonction dont il s'agit, et par A_n le dernier terme cherché. Les deux quantités A_n, B_n seront égales, à un coefficient numérique près; et si l'on désigne par λ ce coefficient, on aura

Digitized by Google

$$A_n = \lambda B_n.$$

Cette dernière équation devant être satisfaite, quels que soient les coefficiens a_1, $a_2 \ldots\ldots a_n$ de l'équation donnée, aura encore lieu, si l'on suppose

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0 \ldots\ldots a_{n-1} = 0, \quad a_n = 1.$$

Supposons que dans ce cas B_n se change en β. Dans la même hypothèse, on aura évidemment

$$A_n = n^n.$$

En effet, les deux équations

$$f_{n-1}(x) = 0,$$
$$y + f_n(x) = 0$$

devenant alors

$$x^{n-1} = 0,$$
$$y + x^n + 1 = 0;$$

l'équation en y résultante de l'élimination de x entre les deux précédentes sera

$$(y + 1)^{n-1} = 0;$$

et, le dernier terme de cette équation étant égal à $+1$, en le multipliant par n^n on aura

$$A_n = n^n.$$

Par suite on trouvera

$$\lambda = \frac{n^n}{\beta};$$

et l'on aura en général

$$A_n = n_n \cdot \frac{B_n}{\beta},$$

β étant ce que devient B_n quand on y suppose à-la-fois

a_1

Digitized by Google

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0 \ldots\ldots a_{n-1} = 0, \quad a_n = 1.$$

COROLLAIRE 1. Au lieu d'éliminer x entre les deux équations

$$f_n(x) = 0, \quad f_{n-1}(x) = 0,$$

on peut l'éliminer entre les deux suivantes,

$$f_n(x-a_1) = 0, \quad f_{n-1}(x-a_1) = 0;$$

et il est clair que dans les deux cas on doit arriver à la même équation de condition. D'ailleurs, si l'on fait en général

$$f_n(-a_1) = b_n,$$

on aura

$$f_n'(-a_1) = n b_{n-1},$$
$$f_n''(-a_1) = n(n-1) b_{n-2},$$
$$\&c.\ldots\ldots$$
$$f_n^{(n-1)}(-a_1) = n(n-1)\ldots 3.2.b_1,$$
$$f_n^{(n)}(-a_1) = n(n-1)\ldots 3.2.1.b_0.$$

De plus, comme on a

$$b_1 = f_1(-a_1) = -a_1 + a_1 = 0, \quad b_0 = 1,$$

les deux dernières équations se réduiront à

$$f_n^{(n-1)}(-a_1) = 0;$$
$$f_n^{(n)}(-a_1) = 1.2.3\ldots n.$$

Cela posé, on aura par le théorème de *Taylor*

$$f_n(x-a_1) = x^n + \frac{n(n-1)}{1.2} b_2 x^{n-2} + \frac{n(n-1).(n-2)}{1.2.3} b_3 x^{n-3} + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{n}{1} b_{n-1} x + b_n,$$

$$f_{n-1}(x-a_1) = x^{n-1} + \frac{(n-1).(n-2)}{1.2} b_2 x^{n-3} + \frac{(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3} b_3 x^{n-4} \ldots$$
$$+ b_{n-1};$$

Digitized by Google

et par suite

$$f_n(x-a_1) - x f_{n-1}(x-a_1) = (n-1)\left[b_2 x^{n-2} + \frac{n-2}{1} \cdot \frac{b_3}{2} x^{n-3} + \frac{(n-2).(n-3)}{1.2} \frac{b_4}{3} x^{n-4} + \ldots + (n-2)\frac{b_{n-1}}{n-2} x + \frac{b_n}{n-1}\right].$$

Si l'on fait, pour abréger,

$$f_n(x-a_1) - x f_{n-1}(x-a_1) = (n-1) f_{n-2}(x),$$

et

$$b_r = (r-1)\, c_{r-1};$$

on trouvera

$$f_{n-2}(x) = c_1 x^{n-2} + \frac{n-2}{1} c_2 x^{n-3} + \frac{(n-2)\,(n-3)}{1.2} c_3 x^{n-4} + \ldots + (n-2)\, c_{n-2} x + c_{n-1}.$$

Enfin il est aisé de voir que l'élimination de la variable x entre les deux équations

$$f_{n-1}(x-a_1) = 0, \quad f_{n-2}(x) = 0,$$

doit conduire au même résultat que celle de la même variable entre les deux équations

$$f_n(x-a_1) = 0, \quad f_{n-1}(x-a_1) = 0.$$

On obtiendra donc l'équation de condition cherchée, si l'on élimine x entre les deux suivantes :

$$(3) \quad x^{n-1} + \frac{(n-1).(n-2)}{1.2} c_1 x^{n-3} + \frac{(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2} 2 c_2 x^{n-4} + \ldots + \frac{n-1}{1} (n-3)\, c_{n-3} x + (n-2)\, c_{n-2} = 0;$$

$$(4) \quad c_1 x^{n-2} + \frac{n-2}{1} c_2 x^{n-3} + \frac{(n-2).(n-3)}{1.2} c_3 x^{n-4} + \ldots \text{ \&c.} + \frac{n-2}{1} c_{n-2} x + c_{n-1} = 0.$$

Digitized by Google

Si l'on désigne par $B_n = 0$ cette équation de condition, et par β ce que devient B_n lorsqu'on suppose

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0 \ldots\ldots a_{n-1} = 0, \quad a_n = 1;$$

$$n^n \cdot \frac{B_n}{\beta}$$

représentera le dernier terme de l'équation aux carrés des différences entre les racines de la proposée.

1.er *Exemple.* Supposons l'équation donnée du second degré, et soit $f_2(x) = 0$, ou

$$x^2 + 2a_1 x + a_2 = 0,$$

cette même équation. Si l'on fait comme ci-dessus

$$f_r(-a_1) = b_r = (r-1)c_{r-1},$$

on aura

$$c_1 = f_2(-a_1) = a_2 - a_1^2.$$

De plus, les équations (3) et (4) se réduiront à

$$(3) \qquad x = 0,$$

$$(4) \qquad c_1 = 0.$$

La dernière de ces deux équations étant indépendante de x, sera elle-même l'équation de condition cherchée. On pourra donc supposer

$$B_2 = c_1 = a_2 - a_1^2,$$

$$\beta = 1;$$

et par suite, le dernier terme de l'équation aux carrés des différences entre les racines de la proposée sera

$$A_2 = 2^2 . c_1 = -4(a_1^2 - a_2).$$

2.e *Exemple.* Supposons l'équation donnée du troisième degré, et soit $f_3(x) = 0$, ou

Digitized by Google

$$x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0,$$

cette même équation : on aura

$$c_1 = f_2(-a_1) = a_2 - a_1^2,$$
$$2c_2 = f_3(-a_1) = a_3 - 3a_1a_2 + 2a_1^3.$$

De plus, les équations (3) et (4) se réduiront à

$$(3) \qquad x^2 + c_1 = 0,$$
$$(4) \qquad c_1x + c_2 = 0.$$

Si l'on élimine x entre ces deux dernières équations, on obtiendra l'équation de condition suivante

$$c_2^2 + c_1^3 = 0.$$

On pourra donc supposer

$$B_3 = c_2^2 + c_1^3.$$

D'ailleurs, si l'on fait

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 1,$$

on aura

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \tfrac{1}{2}.$$

Par suite

$$\beta = \frac{1}{2^2};$$

et le dernier terme de l'équation aux carrés des différences entre les racines de la proposée sera

$$A_3 = 2^2 \cdot 3^3 (c_2^2 + c_1^3).$$

3.e *Exemple.* Supposons l'équation donnée du quatrième degré, et soit $f_4(x) = 0$, ou

$$x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0,$$

Digitized by Google

cette même équation : on aura

$$c_1 = f_2(-a_1) = a_2 - a_1^2,$$
$$2c_2 = f_3(-a_1) = a_3 - 3a_1a_2 + 2a_1^3,$$
$$3c_3 = f_4(-a_1) = a_4 - 4a_1a_3 + 6a_1^2a_2 - 3a_1^4.$$

De plus, les équations (3) et (4) deviendront respectivement

$$(3) \qquad x^3 + 3c_1x + 2c_2 = 0,$$
$$(4) \qquad c_1x^2 + 2c_2x + c_3 = 0.$$

Si l'on désigne par x_1, x_2, x_3 les trois racines de l'équation (3), et par $B_3 = 0$ l'équation de condition cherchée, on aura

$$B_3 = (c_1x_1^2 + 2c_2x_1 + c_3).(c_1x_2^2 + 2c_2x_2 + c_3).(c_1x_3^2 + 2c_2x_3 + c_3).$$

D'ailleurs si l'on fait, pour abréger,

$$c_2^2 - c_1c_3 = f,$$

on aura

$$c_1x^2 + 2c_2x + c_3 = \frac{1}{c_1}(c_1x + c_2 + f^{\frac{1}{2}}).(c_1x + c_2 - f^{\frac{1}{2}}).$$

Par suite, la valeur précédente de B_3 sera égale au produit des six facteurs

$$c_1x_1 + c_2 + f^{\frac{1}{2}}, \quad c_1x_2 + c_2 + f^{\frac{1}{2}}, \quad c_1x_3 + c_2 + f^{\frac{1}{2}},$$
$$c_1x_1 + c_2 - f^{\frac{1}{2}}, \quad c_1x_2 + c_2 - f^{\frac{1}{2}}, \quad c_1x_3 + c_2 - f^{\frac{1}{2}},$$

divisé par c_1^3. Le produit des trois premiers facteurs est, en vertu de l'équation (3), égal à

$$(c_2 + f^{\frac{1}{2}})^3 + 3c_1^3(c_2 + f^{\frac{1}{2}}) - 2c_1^3c_2,$$
$$= c_2(c_2^2 + c_1^3) + 3c_2f + f^{\frac{1}{2}}[3(c_2^2 + c_1^3) + f].$$

De même, le produit des trois autres facteurs sera

$$c_2(c_2^2 + c_1^3) + 3c_2f - f^{\frac{1}{2}}[3(c_2^2 + c_1^3) + f].$$

Digitized by Google

On aura donc

$$B_3 = \frac{[c_2(c_2^2 + c_1^3) + 3c_2 f]^2 - f[3(c_2^2 + c_1^3) + f]^2}{c_1^3};$$

ou, si l'on fait

$$c_2^2 + c_1^3 = g,$$

$$B_3 = \frac{c_2^2(g + 3f)^2 - f(3g + f)^2}{c_1^3}$$

$$= \frac{g(g + 3f)^2 - f(3g + f)^2}{c_1^3} - (g + 3f)^2$$

$$= \frac{(g - f)^3}{c_1^3} - (g + 3f)^2.$$

Si l'on restitue à la place des quantités f et g leurs valeurs

$$c_2^2 - c_1 c_3 \text{ et } c_2^2 + c_1^3,$$

on trouvera

$$\frac{g - f}{c_1} = c_1^2 + c_3, \quad g + 3f = 4c_2^2 - 3c_1 c_3 + c_1^3;$$

et par suite,

$$B_3 = (c_3 + c_1^2)^3 - (4c_2^2 - 3c_1 c_3 + c_1^3)^2.$$

Si l'on suppose dans cette dernière équation

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 1;$$

on aura

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \tfrac{1}{3},$$

et par conséquent

$$\beta = \frac{1}{3^3}.$$

Par suite, le dernier terme de l'équation aux carrés des différences entre les racines de la proposée sera

$$A_4 = 3^3 \cdot 4^4 [(c_3 + c_1^2)^3 - (4c_2^2 - 3c_1 c_3 + c_1^3)^2].$$

Digitized by Google

OLLAIRE 2. Désignons en général par

$$K_n$$

uit des diverses valeurs que reçoit la fonction $f_{n-1}(x)$, lorsqu'on titue successivement pour x les diverses racines de l'équation

$$f_{n-1}(x - a_1) = 0 ;$$

ce que devient K_n, quand on y fait

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0 \ldots a_{n-1} = 0, \quad a_n = 1.$$

ourra dans l'équation

$$A_n = n^n \frac{B_n}{\beta}$$

ıser

$$B_n = K_n, \quad \beta = \varkappa.$$

leurs, si l'on fait

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0 \ldots a_{n-1} = 0, \quad a_n = 1,$$

ıura évidemment

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0 \ldots\ldots c_{n-2} = 0, \quad c_{n-1} = \frac{1}{n-1},$$

$$f_{n-1}(x - a_1) = f_{n-1}(x) = x^{n-1},$$

$$f_{n-2}(x) = c_{n-1} = \frac{1}{n-1} ;$$

par suite

$$\varkappa = \frac{1}{(n-1)^{n-1}}.$$

n aura donc aussi

$$A_n = n^n \frac{K_n}{\varkappa} = n^n (n-1)^{n-1} K_n.$$

On peut vérifier cette dernière équation sur chacun des exemples rapportés ci-dessus. Si l'on fait successivement

Digitized by Google

$$n=2,\quad n=3,\quad n=4,\quad n=5,\quad \&c.\ldots\ldots,$$

on trouvera

$$A_2=1^1.2^2.K_2,\quad K_2=c_1,$$
$$A_3=2^2.3^3.K_3,\quad K_3=c_1^3+c_2^2,$$
$$A_4=3^3.4^4.K_4,\quad K_4=(c_1^2+c_3)^3-(4c_2^2-3c_1c_3+c_1^3)^2,$$
$$A_5=4^4.5^5.K_5,\quad K_5=c_4^4-4.15c_1c_2c_4^3+6c_4^2(15c_1c_3^2+110c_1^2c_2^2-45c_1^3c_3+45c_2^2c_3+36c_1^5)$$
$$+4c_4(315c_1^2c_2c_3^2+160c_1^3c_2^3-135c_2c_3^3-945c_1c_2^3c_3-270c_1^4c_2c_3+432c_2^5)$$
$$+243c_3^5-810c_1^2c_3^4+2430c_1c_2^2c_3^3+675c_1^4c_3^3-1215c_2^4c_3^2-450c_1^3c_2^2c_3^2,$$
$$\&c.\ldots\quad\quad \&c.\ldots\ldots$$

A_2, A_3, A_4, A_5 désignent ici les derniers termes des équations aux carrés des différences entre les racines des équations suivantes

$$x^2+2a_1x+a_2=0,$$
$$x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0,$$
$$x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0,$$
$$x^5+5a_1x^4+10a_2x^3+10a_3x^2+5a_4x+a_5=0,$$
$$\&c.\ldots\ldots;$$

et l'on a de plus

$$c_1=a_2-a_1^2,$$
$$2c_2=a_3-3a_1a_2+2a_1^3,$$
$$3c_3=a_4-4a_1a_3+6a_1^2a_2-3a_1^4,$$
$$4c_4=a_5-5a_1a_4+10a_1^2a_3-10a_1^2a_2+4a_1^5,$$
$$\&c.\ldots\ldots$$

Si les équations données n'avaient pas de second terme, ou si l'on supposait $a_1=0$, on trouverait simplement

$$c_1=a_2,\quad c_2=\tfrac{1}{2}a_3,\quad c_3=\tfrac{1}{3}a_4,\quad c_4=\tfrac{1}{4}a_5,\quad \&c.\ldots$$

THÉORÈME

Digitized by Google

THÉORÈME 3.e

Supposons que l'on garde la même notation que dans le théorème 2.e Soit toujours

$$f_n(x) = 0$$

l'équation donnée. Soient $X_1, X_2 \ldots X_n$ *ses différentes racines; et*

$$f_{n-1}(x) = 0$$

l'équation dérivée. Enfin désignons par $\Phi(x)$ *une nouvelle fonction rationnelle et entière de la variable* x. *La somme suivante*

$$\frac{\varphi(X_1)}{f_{n-1}(X_1)} + \frac{\varphi(X_2)}{f_{n-1}(X_2)} + \&c\ldots\ldots + \frac{\varphi(X_n)}{f_{n-1}(X_n)}$$

sera nécessairement une fonction rationnelle et entière des coefficiens de la proposée.

Démonstration. Supposons à l'ordinaire

$$f_n(x) = x^n + na_1x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}a_2x^{n-2} + \&c\ldots + na_{n-1}x + a_n;$$

et soit de plus

$$\Phi(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + \zeta x^{n-2} + \lambda x^{n-1} + \mu x^n + \nu x^{n+1} + \&c\ldots.$$

Enfin désignons par N la somme cherchée. Si l'on réduit au même dénominateur toutes les fractions dont cette somme se compose; le dénominateur commun, multiplié par n^n, sera en vertu du théorème 2.e égal à

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(X_1-X_2)^2(X_1-X_3)^2\ldots\ldots(X_{n-1}-X_n)^2.$$

De plus, si l'on fait usage de la notation adoptée dans l'un des précédens mémoires (*voyez* page 33 de ce Cahier), on aura

$$(X_1-X_2)(X_1-X_3)\ldots(X_{n-1}-X_n) = S(\pm X_1^{n-1}X_2^{n-2}\ldots X_n^0);$$

Digitized by Google

et par suite le dénominateur commun de toutes les fractions sera représenté par

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{n^n} [S(\pm X_1^{n-1} X_2^{n-2} \ldots . X_n^0)]^2.$$

Quant au numérateur de la première fraction, il deviendra égal à

$$\Phi(X_1) \cdot f_{n-1}(X_2) \cdot f_{n-1}(X_3) \ldots . f_{n-1}(X_n).$$

D'ailleurs le produit $f_{n-1}(X_2) . f_{n-1}(X_3) \ldots . f_{n-1}(X_n)$, multiplié par n^{n-1}, se trouvera formé des mêmes facteurs que le dénominateur commun. Seulement chacun des facteurs

$$X_1 - X_2 \ldots X_1 - X_3 \ldots . X_1 - X_n$$

n'y sera élevé qu'à la première puissance. Cela posé, on reconnaîtra facilement que ce même produit est décomposable en deux autres; dont l'un ayant pour facteurs toutes les différences qu'on obtient en disposant les racines de l'équation donnée suivant l'ordre de grandeur de leurs indices, et retranchant successivement de chacune d'elles toutes celles qui la précèdent, peut être représenté par

$$(X_2 - X_1)(X_3 - X_1) \ldots (X_n - X_1)(X_3 - X_2) \ldots (X_n - X_{n-1})$$
$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} S(\pm X_1^{n-1} X_2^{n-2} \ldots X_n^0);$$

et dont l'autre ayant pour facteurs les mêmes différences prises en signe contraire, à l'exception toutefois de celles qui renferment la racine X_1, pourra être désigné par

$$(X_2 - X_3)(X_2 - X_4) \ldots (X_2 - X_n)(X_3 - X_4) \text{ \&c.} \ldots (X_{n-1} - X_n)$$
$$= S(\pm X_2^{n-2} X_3^{n-3} \ldots . X_n^0),$$

Par suite le numérateur de la première fraction se trouvera représenté par

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{n^{n-1}} S(\pm X_1^{n-1} X_2^{n-2} \ldots X_n^0) . \Phi(X_1) . S(\pm X_2^{n-2} X_3^{n-3} \ldots X_n^0),$$

Digitized by Google

et la somme des numérateurs de toutes les fractions semblables par

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{n^{n-1}} S(\pm X_1^{n-1} X_2^{n-2} \ldots\ldots X_n^{0}) \ldots\ldots$$
$$\times S[\pm \varphi(X_1) . S(\pm X_2^{n-2} X_3^{n-3} \ldots\ldots X_n^{0})].$$

En divisant cette somme par le dénominateur commun, on aura pour la somme de toutes les fractions

$$N = n \frac{S[\pm \varphi(X_1) . S(\pm X_2^{n-2} X_3^{n-3} \ldots X_n^{0})]}{S(\pm X_1^{n-1} X_2^{n-2} X_3^{n-3} \ldots X_n^{0})}.$$

Il sera maintenant facile d'obtenir la valeur de N. En effet, si l'on remet pour $\varphi(X_1)$ sa valeur

$$\alpha + \beta X_1 + \gamma X_1^2 + \ldots + \zeta X_1^{n-2} + \lambda X_1^{n-1} + \mu X_1^n + \nu X_1^{n+1} + \&c\ldots,$$

on trouvera

$$S[\pm \varphi(X_1) . S(\pm X_2^{n-2} X_3^{n-3} \ldots\ldots X_n^{0})]$$
$$= S[\pm(\alpha + \beta X_1 + \gamma X_1^2 + \ldots + \zeta X_1^{n-1} + \lambda X_1^{n-1} \mu X_1^n + \nu X_1^{n+1} + \ldots) S(\pm X_2^{n-2} X_3^{n-3} \ldots X_n^{0})]$$
$$= \alpha S(\pm X_1^{0} X_2^{n-2} X_3^{n-3} \ldots\ldots X_n^{0}) + \beta S(\pm X_1^{1} X_2^{n-2} X_3^{n-3} \ldots\ldots X_n^{0}) + \&c\ldots\ldots$$
$$+ \zeta S(\pm X_1^{n-2} X_2^{n-2} X_3^{n-3} \ldots\ldots X_n^{0}) + \lambda S(\pm X_1^{n-1} X_2^{n-2} X_3^{n-3} \ldots\ldots X_n^{0})$$
$$+ \mu S(\pm X_1^{n} X_2^{n-2} X_3^{n-3} \ldots\ldots X_n^{0}) + \nu S(\pm X_1^{n+1} X_2^{n-2} X_3^{n-3} \ldots X_n^{0}) + \&c\ldots\ldots$$

Les premiers termes de la série précédente, jusqu'à celui qui a ζ pour coefficient, sont évidemment nuls : car si l'on désigne par r un quelconque des indices 1, 2, 3 . . . $n-2$, on aura toujours

$$S(\pm X_1^{r} X_2^{n-2} X_3^{n-3} \ldots\ldots X_n^{0}) = 0.$$

De plus, si l'on désigne par r un nombre entier supérieur à $n-2$, l'expression

$$S(\pm X_1^{r} X_2^{n-2} X_3^{n-3} \ldots\ldots X_n^{0})$$

sera, en vertu des théorèmes établis dans le mémoire déjà cité *(pag. 46 et suiv.)*, divisible par

$$S(\pm X_1^{n-1} X_2^{n-2} X_3^{n-3} \ldots\ldots X_n^{0});$$

Digitized by Google

et, si l'on représente par N_r le quotient, on trouvera

$$N_{n-1} = 1,$$
$$N_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = S^n(X_1) = -na_1,$$
$$N_{n+1} = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_1X_2 + \ldots = S^n(X_1^2) + S^n(X_1X_2)$$
$$= n^2a_1^2 - \frac{n(n-1)}{1.2}a_2,$$

&c.....

Cela posé, la valeur de N précédemment trouvée deviendra

$$N = n(\lambda N_{n-1} + \mu N_n + \nu N_{n+1} + \&c.....)$$
$$= n\left[\lambda - na_1\mu + n\left(na_1^2 - \tfrac{n-1}{2}a_2\right)\nu + \&c....\right].$$

Cette valeur sera donc une fonction rationnelle et entière des coefficiens de la proposée; ce qui vérifie le second théorème du VII.e paragraphe de la première section.

COROLLAIRE 1. Si la fonction $\varphi(x)$ est par rapport à x d'un degré inférieur à $n-1$, ou si l'on a simplement

$$\varphi(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + \zeta x^{n-2},$$

la somme N sera nulle, quelles que soient d'ailleurs les valeurs de $\alpha, \beta, \gamma \ldots \zeta$; et l'on aura par suite

$$\frac{\varphi(X_1)}{f_{n-1}(X_1)} + \frac{\varphi(X_2)}{f_{n-1}(X_2)} + \&c..... + \frac{\varphi(X_n)}{f_{n-1}(X_n)} = 0.$$

COROLLAIRE 2. Si l'on suppose en même temps

$$\varphi(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 \ldots + \zeta x^{n-2} + \lambda x^{n-1} + \mu x^n + \nu x^{n+1} + \&c....,$$

et

$$\downarrow(x) = \lambda x^{n-1} + \mu x^n + \nu x^{n+1} + \&c..... ;$$

il suffira, pour déterminer la valeur de N, d'avoir égard aux termes de $\varphi(x)$ qui renferment des puissances de x supérieures à $n-2$: et

Digitized by Google

l'on aura par suite

$$N = -\frac{\psi(X_1)}{f_{n-1}(X_1)} + \frac{\psi(X_2)}{f_{n-1}(X_2)} + \&c..... + \frac{\psi(X_n)}{f_{n-1}(X_n)}$$

$$= n\left[\lambda - n a_1 \mu + n\left(n a_1^2 - \frac{n-1}{2} a_2\right)\nu - \&c....\right].$$

COROLLAIRE 3. Soit toujours

$$f_n(x) = 0 \quad \text{l'équation proposée,}$$
$$f_{n-1}(x) = 0 \quad \text{sa dérivée,}$$

et $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$ les racines de cette dernière équation. Si l'on fait

$$N' = \frac{\varphi(x_1)}{f_{n-2}(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{f_{n-2}(x_2)} + \&c....+ \frac{\varphi(x_{n-1})}{f_{n-2}(x_{n-1})},$$

on aura

$$N' = (n-1)\left\{\zeta - (n-1)a_1\lambda + (n-1)\left[(n-1)a_1^2 - \tfrac{n-2}{2}a_2\right]\mu - \&c.\right\}.$$

En effet, pour déduire la valeur de N' de celle de N, il suffira évidemment de changer n en $n-1$, et de remplacer λ par ζ, μ par λ, ν par μ, &c., c'est-à-dire, le coefficient d'une puissance quelconque de x dans $\Phi(x)$ par le coefficient de la puissance immédiatement inférieure.

COROLLAIRE 4. Si dans le corollaire précédent on suppose

$$\Phi(x) = f_n(x),$$

on aura

$$\zeta = \frac{n(n-1)}{2} a_2, \quad \lambda = n a_1, \quad \mu = 1;$$

et par suite

$$\frac{f_n(x_1)}{f_{n-2}(x_1)} + \frac{f_n(x_2)}{f_{n-2}(x_2)} + \&c....+ \frac{f_n(x_{n-1})}{f_{n-2}(x_{n-1})} = (n-1)^2(a_2 - a_1^2).$$

On a d'ailleurs

Digitized by Google

$$a_1 = \frac{1}{n} S^n(X_1), \quad a_2 = \frac{2}{n(n-1)} S^n(X_1 X_2);$$

et par suite

$$-(n-1)^2 (a_2 - a_1^2) = \frac{n-1}{n^2} S^n(X_1 - X_2)^2;$$

ce qui vérifie le 3.e théorème de la section précédente (§. VII).

THÉORÈME 4.e

Soit toujours $f_n(x) = 0$ *l'équation proposée. Soit de plus* $\downarrow(x)$ *une fonction rationnelle quelconque de* x*; et supposons que l'élimination de* x *entre les deux équations*

$$f_n(x) = 0, \quad \zeta - \downarrow(x) = 0,$$

donne pour résultat l'équation

$$\Phi(\zeta) = 0.$$

Si l'on désigne par A_n *le dernier terme de l'équation aux carrés des différences entre les racines de la proposée, et par* α *le dernier terme de l'équation aux carrés des différences entre les racines de* $\Phi(\zeta) = 0$*; le quotient* $\frac{\alpha}{A_n}$ *sera toujours un carré parfait.*

Démonstration. En effet, soient $X_1, X_2 \ldots X_n$ les racines de la proposée : on aura

$$A_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \{(X_1 - X_2)(X_1 - X_3) \ldots (X_{n-1} - X_n)\}^2,$$

$$\alpha = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \{[\downarrow(X_1) - \downarrow(X_2)][\downarrow(X_1) - \downarrow(X_3)] \ldots [\downarrow(X_{n-1}) - \downarrow(X_n)]\}^2;$$

et par suite

$$\frac{\alpha}{A_n} = \left[\frac{\downarrow(X_1) - \downarrow(X_2)}{X_1 - X_2} \cdot \frac{\downarrow(X_1) - \downarrow(X_3)}{X_1 - X_3} \cdots \cdots \frac{\downarrow(X_{n-1}) - \downarrow(X_n)}{X_{n-1} - X_n}\right]^2.$$

D'ailleurs le produit

Digitized by Google

$$\frac{\downarrow(X_1)-\downarrow(X_2)}{X_1-X_2}\cdot\frac{\downarrow(X_1)-\downarrow(X_3)}{X_1-X_3}\cdots\cdots\frac{\downarrow(X_{n-1})-\downarrow(X_n)}{X_{n-1}-X_n}$$

est évidemment une fonction symétrique des racines de la proposée : car il ne change pas de valeur, lorsqu'on échange entre elles ces mêmes racines. Il peut donc être remplacé par une fonction rationnelle des coefficiens de l'équation donnée ; et par suite $\frac{a}{A_n}$ sera le carré de cette même fonction.

COROLLAIRE. Quel que soit le degré de l'équation donnée, le produit des carrés des différences entre les racines de chacune des équations auxiliaires en y et z aura toujours le même signe que le produit des carrés des différences entre les racines de l'équation dérivée.

PROBLÈME 2.e

Déterminer le nombre et l'espèce de racines réelles d'une équation du degré n.

Solution. Pour plus de commodité, supposons ici que ni l'équation donnée, ni aucune des équations auxiliaires que l'on est obligé de former, n'aient de racines égales entre elles ou à zéro. Soit toujours

$f_n(x) = 0$ l'équation donnée, et

$f_{n-1}(x) = 0$ sa dérivée du premier ordre.

La fonction dérivée du second ordre de $f_n(x)$, savoir $f_n''(x)$, sera de même signe que $f_{n-2}(x)$; et, par suite de la méthode exposée dans le §. II de la première section, il suffira, pour obtenir le nombre des racines réelles de la proposée, d'éliminer x entre les deux équations

$$y + f_n(x) \cdot f_{n-2}(x) = 0, \quad f_{n-1}(x) = 0,$$

et d'ajouter une unité à la différence entre les nombres de racines positives et négatives de l'équation en y résultante de cette élimination.

Digitized by Google

D'ailleurs, en vertu de la remarque faite plus loin §. VII, on peut remplacer le produit

$$f_n(x) \cdot f_{n-2}(x)$$

par la fraction

$$\frac{f_{n-2}(x)}{f_n(x)}.$$

Par suite, le nombre des racines réelles de la proposée surpassera d'une unité la différence entre les nombres de racines positives et négatives de l'équation en y, qu'on obtient par l'élimination de x entre les deux suivantes

$$yf_n(x) + f_{n-2}(x) = 0, \quad f_{n-1}(x) = 0,$$

ou, ce qui revient au même, entre les deux suivantes

$$yf_n(x-a_1) + f_{n-2}(x-a_1) = 0, \quad f_{n-1}(x-a_1) = 0.$$

De plus, si l'on fait usage de la notation adoptée ci-dessus (*voy.* le premier problème, *corollaire 1.er*), on aura

$$f_n(x-a_1) = xf_{n-1}(x-a_1) + (n-1)f_{n-2}(x);$$

et par conséquent, si l'on suppose $f_{n-1}(x-a_1) = 0$, on aura simplement

$$f_n(x-a_1) = (n-1)f_{n-2}(x).$$

On pourra donc, en faisant abstraction du facteur numérique $n-1$, remplacer la fonction $f_n(x-a_1)$ par $f_{n-2}(x)$: d'où il suit que, pour obtenir l'équation auxiliaire en y, on pourra se contenter d'éliminer x entre les deux suivantes

$$yf_{n-2}(x) + f_{n-2}(x-a_1) = 0, \quad f_{n-1}(x-a_1) = 0.$$

De même, pour obtenir l'équation auxiliaire en z, il suffira d'éliminer x entre les deux qui suivent

$$zf_{n-2}(x) + (x-a_2)f_{n-2}(x-a_1) = 0, \quad f_{n-1}(x-a_1) = 0.$$

Les

Digitized by Google

Les deux équations auxiliaires en y et z étant ainsi formées, si l'on détermine pour chacune d'elles la différence entre le nombre des racines positives et le nombre des racines négatives, la première des deux différences obtenues sera inférieure d'une unité au nombre des racines réelles de la proposée; et la seconde sera inférieure ou supérieure d'une unité à l'excès du nombre des racines positives sur le nombre des racines négatives, suivant que le produit $a_{n-1}.a_n$ sera négatif ou positif.

En appliquant aux équations auxiliaires les mêmes raisonnemens qu'à la proposée elle-même, on finira par obtenir les fonctions des coefficiens

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3 \ldots\ldots a_{n-1}, \quad a_n,$$

qui déterminent le nombre et l'espèce des racines réelles de l'équation donnée.

1.^er *Exemple.* Supposons l'équation donnée du second degré, et soit

$$x^2 + 2a_1 x + a_2 = 0$$

cette même équation. Si l'on fait comme ci-dessus (problème 1.^er)

$$c_1 = a_2 - a_1^2,$$

on aura

$$f_{n-1}(x - a_1) = x,$$
$$f_{n-2}(x - a_1) = 1,$$
$$f_{n-2}(x) = c_1.$$

Ainsi, pour obtenir les équations en y et z, il suffira d'éliminer x,

1.° entre les deux équations

$$c_1 y + 1 = 0, \quad x = 0,$$

2.° entre les deux équations

$$c_1 z + x - a_1 = 0, \quad x = 0.$$

Digitized by Google

Les équations auxiliaires en y et z seront donc respectivement

$$y + \frac{1}{c_1} = 0,$$

$$z - \frac{a_1}{c_1} = 0.$$

Par suite, la différence entre les nombres de racines positives et négatives sera, pour l'équation en y, $+1$ si $\frac{1}{c_1}$ ou c_1 est négatif, et -1 dans le cas contraire. La même différence, pour l'équation en z, sera $+1$, si $\frac{a_1}{c_1}$ ou $a_1 c_1$ est positif, et -1 dans le cas contraire. De plus, si l'on veut passer de l'équation en z à la proposée, il faudra augmenter ou diminuer la dernière différence d'une unité, suivant que le produit $a_1 a_2$ sera négatif ou positif. Cela posé, si l'on convient de remplacer constamment par $+1$ les fonctions des coefficiens de la proposée, qui obtiennent des valeurs positives, et par -1 celles qui obtiennent des valeurs négatives ; on aura, pour déterminer le nombre et l'espèce des racines réelles de l'équation

$$x^2 + 2a_1 x + a_2 = 0,$$

les quatre fonctions

$$\begin{cases} 1, & -c_1, \\ -a_1 a_2, & a_1 c_1 ; \end{cases}$$

la somme des deux premières fonctions devant toujours être, après le remplacement dont il s'agit, égale au nombre des racines réelles de l'équation donnée, et la somme des deux dernières à l'excès du nombre des racines positives sur le nombre des racines négatives.

Le nombre des racines réelles étant déterminé par les deux fonctions 1 et $-c_1 = a_1^2 - a_2$, dont la première est toujours positive ; il y aura deux racines réelles, si $a_1^2 - a_2$ est aussi positive : il n'y en aura point dans le cas contraire. Dans cette dernière hypothèse, a_2 sera nécessairement positif, et par suite les deux fonctions $-a_1 a_2$, $+a_1 c_1$

Digitized by Google

seront de signes opposés ; mais dans le premier cas, c_1 étant négatif, les deux fonctions $-a_1 a_2$, $+a_1 c_1$, et par suite les deux racines réelles de l'équation donnée, seront de même signe ou de signes contraires, suivant que a_2 sera positif ou négatif. Enfin ces racines, supposées de même signe, seront toutes deux positives, si a_1 est négatif, et négatives dans le cas contraire.

2.^e *Exemple.* Supposons l'équation donnée du troisième degré ; et soit

$$x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0$$

cette même équation : on aura dans le cas présent $n=3$; et si l'on fait, comme dans le problème 1.^er,

$$c_1 = a_2 - a_1^2, \quad 2c_2 = a_3 - 3a_1 a_2 + 2a_1^3 ;$$

on trouvera

$$f_{n-1}(x-a_1) = x^2 + c_1, \quad f_{n-2}(x-a_1) = x, \quad f_{n-2}(x) = c_1 x + c_2.$$

Par suite, pour obtenir les équations auxiliaires en y et z, il suffira d'éliminer x, 1.° entre les deux équations

$$y(c_1 x + c_2) + x = 0, \quad x^2 + c_1 = 0,$$

2.° entre les deux équations

$$z(c_1 x + c_2) + (x - a_1) = 0, \quad x^2 + c_1 = 0.$$

On tire de la première

$$x = \frac{-c_2 y}{c_1 y + 1}.$$

De plus, si dans l'équation

$$z(c_1 x + c_2) + x^2 - a_1 x = 0$$

on remplace x^2 par $-c_1$, on en déduira

$$x = \frac{c_1 - c_2 z}{c_1 z - a_1}.$$

Si l'on substitue successivement les deux valeurs précédentes de x

Digitized by Google

dans l'équation

$$x^2 + c_1 = 0,$$

on aura les deux équations suivantes en y et z

$$(c_2^2 + c_1^3)y^2 + 2c_1^2 y + c_1 = 0,$$
$$(c_2^2 + c_1^3)z^2 - 2c_1(a_1 c_1 + c_2)z + c_1(a_1^2 + c_1) = 0.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer pour chacune d'elles la différence entre les nombres de racines positives et négatives. Or on a déjà fait voir que, relativement à l'équation

$$x^2 + 2a_1 x + a_2 = 0,$$

la même différence était déterminée par les deux fonctions

$$-a_1 a_2, \quad -a_1(a_1^2 - a_2).$$

D'ailleurs, pour passer de cette dernière équation aux équations auxiliaires en y et z, il suffira évidemment de remplacer les deux quantités

$$a_1 \quad \text{et} \quad a_2,$$

1.° par $\dfrac{2c_1^2}{c_2^2 + c_1^3}$ et $\dfrac{c_1}{c_2^2 + c_1^3}$,

2.° par $\dfrac{-2c_1(a_1 c_1 + c_2)}{c_2^2 + c_1^3}$ et $\dfrac{c_1(a_1^2 + c_1)}{c_2^2 + c_1^3} = \dfrac{c_1 a_2}{c_2^2 + c_1^3}$.

Quant à la quantité

$$a_1^2 - a_2,$$

qui, relativement à l'équation

$$x^2 + 2a_1 x + a_2 = 0,$$

représentait le quart du carré de la différence entre les deux racines, elle devra être remplacée par la même fonction des racines des équations auxiliaires en y et z; et par suite, en vertu du théorème 4.e, on pourra lui substituer immédiatement le quart du carré de la diffé-

Digitized by Google

rence entre les racines de l'équation

$$x^2 + c_1 = 0,$$

c'est-à-dire, la quantité $-c_1$. Cela posé, si l'on fait abstraction des facteurs carrés qui n'ont aucune influence sur les signes, et que l'on change les diviseurs en multiplicateurs ; les deux fonctions

$$-a_1 a_2, \quad -a_1 (a_1^2 - a_2),$$

se trouveront remplacées, pour l'équation auxiliaire en y, par

$$-c_1, \quad c_1 (c_2^2 + c_1^3),$$

et pour l'équation auxiliaire en z, par

$$a_2 (a_1 c_1 + c_2), \quad -(a_1 c_1 + c_2).(c_2^2 + c_1^3).$$

Il est aisé d'en conclure que le nombre et l'espèce des racines réelles de l'équation

$$x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0$$

seront déterminés par les six fonctions

$$\left\{ \begin{array}{lll} 1, & -c_1, & c_1 (c_2^2 + c_1^3), \\ -a_2 a_3, & a_2 (a_1 c_1 + c_2), & -(a_1 c_1 + c_2).(c_2^2 + c_1^3). \end{array} \right.$$

Lorsque dans chaque cas particulier on aura remplacé celles des fonctions précédentes qui seront positives par $+1$, et celles qui seront négatives par -1 ; la somme des trois premières donnera le nombre des racines réelles de la proposée, et la somme des trois dernières, la différence entre les nombres de racines positives et négatives.

Il est bon de remarquer qu'à la fonction $a_1 c_1 + c_2$ on peut substituer

$$2a_1 c_1 + 2c_2 = a_3 - a_1 a_2,$$

en sorte que les trois fonctions qui déterminent la différence entre le nombre des racines positives et le nombre des racines négatives peuvent être présentées sous la forme suivante

Digitized by Google

$$-a_2 a_3, \quad a_2(a_3 - a_1 a_2), \quad -(a_3 - a_1 a_2).(c_2^2 + c_1^3).$$

Des trois fonctions

$$1, \quad -c_1, \quad c_1(c_2^2 + c_1^3),$$

qui déterminent le nombre des racines réelles, la première 1 est toujours essentiellement positive. De plus, les deux autres ne peuvent être à-la-fois négatives; car si la seconde est négative, la troisième sera évidemment positive. Enfin, le produit des deux dernières fonctions étant égal à $-c_1^2(c_2^2 + c_1^3)$, ce produit sera négatif, et les deux fonctions de signes contraires, si $c_2^2 + c_1^3$ est positif : le même produit sera positif, et par suite les deux fonctions seront positives, si $c_2^2 + c_1^3$ est négatif. Dans le premier cas, l'équation donnée n'aura qu'une racine réelle; dans le second, elle en aura trois.

La quantité $c_2^2 + c_1^3$, qui suffit en général pour déterminer le nombre des racines réelles, représente, comme on l'a fait voir ci-dessus, le dernier terme de l'équation aux carrés des différences entre les racines de la proposée divisé par le carré de 2 et le cube de 3.

Corollaire 1. On voit, par les exemples précédens, comment le nombre et l'espèce des racines réelles d'une équation donnée du degré n se trouvent déterminés à l'aide de plusieurs fonctions des coefficiens de cette équation.

Les premières fonctions, ou celles qui déterminent le nombre des racines réelles, sont en nombre égal à n. Les autres, qui déterminent la différence entre le nombre des racines positives et le nombre des racines négatives, sont encore en nombre égal à n. Le nombre total des fonctions que l'on considère est donc égal à $2n$. Mais, comme la première de ces fonctions est toujours égale à l'unité, le nombre de celles qui varient avec les coefficiens est seulement égal à $2n-1$; ce qui s'accorde avec le second paragraphe de la première section.

Corollaire 2. Après l'unité, la première des fonctions qui déterminent le nombre des racines réelles a été trouvée, pour le second et le

Digitized by Google

troisième degré, égale à $-c_1$. Cette fonction reste la même, quel que soit le degré de l'équation proposée. En effet elle est égale, et de signe contraire, au produit des deux derniers termes de l'équation en y : mais le produit de ces deux termes peut être remplacé par leur quotient, ou par

$$-\frac{f_n(x_1)}{f_{n-2}(x_1)} + \frac{f_n(x_2)}{f_{n-2}(x_2)} + \ldots + \frac{f_n(x_{n-1})}{f_{n-2}(x_{n-1})} ;$$

et, en vertu du théorème 3.e, ce même quotient, pris en signe contraire, est, à un coefficient numérique près, égal à

$$a_1^2 - a_2 = -c_1 ,$$

ou encore à la somme des carrés des différences entre les racines de la proposée.

Corollaire 3. Dans les exemples que nous venons de parcourir, le produit des fonctions qui déterminent le nombre des racines réelles a toujours le même signe que le produit des carrés des différences entre les racines de l'équation donnée. Cette proposition reste vraie, quel que soit le degré de l'équation que l'on considère. En effet, chacune des fonctions négatives indiquant un couple de racines imaginaires, le nombre des fonctions négatives sera pair ou impair, et par suite le produit de toutes les fonctions cherchées sera positif ou négatif, suivant que les couples de racines imaginaires seront en nombre pair ou en nombre impair : et l'on sait d'ailleurs que, pour lever toute incertitude à cet égard, il suffit d'examiner si le produit des carrés des différences entre les racines de la proposée est positif ou négatif.

Corollaire 4. Si l'on considère à-la-fois les diverses fonctions en nombre égal à $2n$ qui déterminent non-seulement le nombre, mais encore l'espèce des racines réelles, on déterminera facilement par l'inspection de leurs signes le nombre des racines positives. En effet, ce dernier nombre est égal à la moitié de la somme faite du nombre des racines réelles et de l'excès du nombre des racines positives sur le

Digitized by Google

nombre des racines négatives. Par suite, toutes les racines de l'équation donnée seront positives, si toutes les fonctions que l'on considère le sont aussi; mais chaque fonction qui deviendra négative, diminuera le nombre cherché d'une unité. Cela posé, il sera facile de reconnaître par le signe du produit de toutes les fonctions, si le nombre des racines positives est pair ou impair. On voit en effet que ce nombre sera de même espèce que le degré de l'équation donnée, si les fonctions négatives sont en nombre pair, ou, ce qui revient au même, si le produit de toutes les fonctions est positif, et qu'il sera d'espèce différente dans le cas contraire. D'ailleurs, on peut lever immédiatement toute incertitude à cet égard, en examinant si le produit des racines de l'équation donnée est positif ou négatif. Ainsi le produit des diverses fonctions qui déterminent le nombre et l'espèce des racines réelles doit toujours avoir le même signe que le produit des racines de la proposée : mais on a prouvé ci-dessus que le produit des fonctions qui déterminent seulement le nombre des racines réelles avait toujours même signe que le produit des carrés des différences entre les racines. Par suite le produit des fonctions qui déterminent la différence entre le nombre des racines positives et le nombre des racines négatives, aura même signe que le produit des racines par les carrés des différences entre les racines. Ainsi, par exemple, si l'on considère l'équation générale du troisième degré

$$x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0,$$

le produit des racines étant alors égal à $-a_3$, et le produit des carrés des différences entre les racines à

$$-2^2 . 3^3 . (c_2^2 + c_1^3),$$

le produit des fonctions qui déterminent la différence entre les nombres de racines positives et négatives doit avoir même signe que le suivant

$$a_3 (c_2^2 + c_1^3);$$

ce qui s'accorde avec les résultats trouvés ci-dessus.

COROLLAIRE

COROLLAIRE 5. En suivant la méthode précédente, on détermine le nombre des racines réelles d'une équation du degré n au moyen de la différence qui existe entre les nombres de racines positives et négatives dans une équation auxiliaire du degré $n-1$: mais, à l'aide d'un artifice indiqué par *Euler* (II.e Partie du *Calcul différentiel*, ch. XII), on peut abaisser d'une unité le degré de cette équation auxiliaire, ainsi qu'on va le faire voir.

PROBLÈME 3.e

Réduire la recherche du nombre des racines réelles dans une équation donnée du degré n *à la détermination de la différence qui existe entre les nombres de racines positives et négatives dans une équation du degré* n — 2.

Solution. Conservons la même notation que dans le problème précédent, et soit toujours $f_n(x) = 0$ l'équation proposée. Ses racines réelles seront en même nombre que les racines réelles de l'équation

$$f_n(x - a_1) = 0, \quad \text{ou}$$

$$x^n + \tfrac{n(n-1)}{1.2} c_1 x^{n-2} + \ldots\ldots + \tfrac{n(n-1)}{1.2}(n-3) c_{n-3} x^2 + \tfrac{n}{1}(n-2) c_{n-2} x + (n-1) c_{n-1} = 0.$$

Si dans cette dernière on change x en $\frac{1}{x}$, le nombre des racines réelles restera encore le même. On pourra donc à l'équation proposée substituer la suivante

$$(5) \quad (n-1) c_{n-1} x^n + \tfrac{n}{1}(n-2) c_{n-2} x^{n-1} + \tfrac{n(n-1)}{1.2}(n-3) c_{n-3} x^{n-2} + \ldots\ldots + \tfrac{n(n-1)}{1.2} c_1 x^2 + 1 = 0.$$

Pour déduire celle-ci de l'équation donnée, il suffira d'y remplacer

Digitized by Google

a_1 par $\frac{(n-2)c_{n-2}}{(n-1)c_{n-1}}$,

a_2 par $\frac{(n-3)c_{n-3}}{(n-1)c_{n-1}}$,

&c.....

a_{n-2} par $\frac{c_1}{(n-1)c_{n-1}}$,

enfin a_{n-1} par 0,

et a_n par $\frac{1}{(n-1)c_{n-1}}$.

On pourra donc se contenter de chercher les fonctions de

$$a_1, \quad a_2 \ldots\ldots a_{n-1}, \quad a_n,$$

qui déterminent le nombre des racines réelles de l'équation

$$(6) \qquad x^n + n a_1 x^{n-1} + \tfrac{n(n-1)}{1.2} a_2 x^{n-2} \ldots + \tfrac{n(n-1)}{1.2} a_{n-2} x^2 + a_n = 0;$$

pourvu qu'ensuite l'on effectue les substitutions que nous venons d'indiquer.

Pour obtenir l'équation (6), il suffit de faire $a_{n-1}=0$ dans l'équation générale du degré n, savoir, $f_n(x) = 0$. Par suite, pour obtenir l'équation auxiliaire en y qui doit servir à déterminer le nombre des racines réelles de l'équation (6), il suffit de supposer $a_{n-1}=0$ dans les deux fonctions ci-dessus désignées par

$$f_n(x), \quad f_{n-1}(x),$$

et d'éliminer x entre les deux équations

$$y f_n(x) + f_{n-2}(x) = 0, \quad f_{n-1}(x) = 0.$$

Désignons à l'ordinaire par $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$ les racines de l'équation $f_{n-1}(x) = 0$. Comme on a dans le cas présent

$$f_{n-1}(x) = x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \ldots + (n-1) a_{n-2} x,$$

Digitized by Google

on pourra supposer

$$x_{n-1} = 0,$$

et alors $x_1, x_2 \ldots\ldots x_{n-2}$ seront les racines de l'équation

$$(7) \qquad x^{n-2} + (n-1)a_1 x^{n-3} + \ldots + (n-1)a_{n-2}x = 0.$$

De plus, comme, dans la supposition où $x = 0$, l'équation

$$y f_n(x) + f_{n-2}(x) = 0 \quad \text{donne}$$

$$y = -\frac{a_{n-2}}{a_n},$$

l'une des racines de l'équation en y sera $-\frac{a_{n-2}}{a_n}$; et puisque, dans la recherche qui nous occupe, cette racine doit être comptée pour $+1$ si elle est positive, et pour -1 si elle est négative, on pourra la ranger immédiatement parmi les fonctions qui déterminent le nombre des racines réelles de l'équation (6), et se contenter de calculer la différence entre les nombres de racines positives et négatives de l'équation en y qu'on obtient par l'élimination de la variable x entre les deux suivantes

$$(8) \begin{cases} y f_n(x) + f_{n-2}(x) = 0, \\ x^{n-2} + (n-1)a_1 x^{n-3} + \ldots + (n-1)a_{n-2} = 0. \end{cases}$$

Cette nouvelle équation en y pourra être représentée par

$$(9) \qquad [y f_n(x_1) + f_{n-2}(x_1)]\,[y f_n(x_2) + f_{n-2}(x_2)]\ldots\ldots \times [y f_n(x_{n-2}) + f_{n-2}(x_{n-2})] = 0.$$

Dans cette dernière équation, les coefficiens du premier et du dernier terme peuvent être facilement déterminés à l'aide du théorème 2.e ; car ces mêmes coefficiens sont respectivement égaux aux deux produits

$$f_n(x_1) \cdot f_n(x_2) \ldots\ldots f_n(x_{n-2}) \cdot f_n(x_{n-1})$$

Digitized by Google

et $f_{n-2}(x_1) \cdot f_{n-2}(x_2) \ldots\ldots f_{n-2}(x_{n-2}) \cdot f_{n-2}(x_{n-1})$,

divisés le premier par $f_n(x_{n-1}) = a_n$ et le second par $f_{n-2}(x_{n-1}) = a_{n-1}$. On peut encore déterminer par le théorème 3.^e le rapport des coefficiens des deux derniers termes dans l'équation (9). En effet, ce rapport est égal à

$$\frac{f_n(x_1)}{f_{n-2}(x_1)} + \frac{f_n(x_2)}{f_{n-2}(x_2)} + \ldots\ldots + \frac{f_n(x_{n-1})}{f_{n-2}(x_{n-2})} ;$$

et l'on a de plus, en vertu du théorème 3.^e *(corollaire 4.^e)*,

$$\frac{f_n(x_1)}{f_{n-2}(x_1)} + \frac{f_n(x_2)}{f_{n-2}(x_2)} + \ldots + \frac{f_n(x_{n-2})}{f_{n-2}(x_{n-2})} = -(n-1)^2(a_1^2 - a_2) - \frac{f_n(x_{n-1})}{f_{n-2}(x_{n-1})}$$

$$= -(n-1)^2(a_1^2 - a_2) - \frac{a_n}{a_{n-2}} .$$

D'ailleurs le produit des deux derniers coefficiens de l'équation en y, pris en signe contraire, est une des fonctions qui déterminent le nombre des racines réelles de la proposée; et, comme le produit et le quotient de deux quantités sont toujours affectés du même signe, le rapport des deux derniers coefficiens de l'équation en y pris négativement, ou

$$(n-1)^2 (a_1^2 - a_2) + \frac{a_n}{a_{n-2}} ,$$

sera encore une des fonctions cherchées. On connaîtra donc, dans tous les cas possibles, deux des fonctions qui déterminent le nombre des racines réelles de l'équation

$$x^n + n a_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 x^{n-2} + \ldots + \frac{n(n-1)}{1.2} a_{n-2} x^2 + a_n = 0 ;$$

et ces deux fonctions seront

$$-\frac{a_{n-2}}{a_n} , \quad (n-1)^2 (a_1^2 - a_2) + \frac{a_n}{a_{n-2}} .$$

Si dans ces mêmes fonctions on remplace

Digitized by Google

a_1 par $\frac{(n-2)c_{n-2}}{(n-1)c_{n-1}}$,

a_2 par $\frac{(n-3)c_{n-3}}{(n-1)c_{n-1}}$,

a_{n-2} par $\frac{c_1}{(n-1)c_{n-1}}$,

a_n par $\frac{1}{(n-1)c_{n-1}}$,

et qu'après avoir changé les diviseurs en multiplicateurs on néglige les facteurs carrés, on obtiendra les deux suivantes

$$-c_1, \quad c_1[c_1\{(n-2)^2 c_{n-2}^2 - (n-1)(n-3)c_{n-1}c_{n-3}\} + c_{n-1}^2].$$

Ces deux dernières fonctions feront donc toujours partie de celles qui déterminent le nombre des racines réelles de l'équation donnée

$$x^n + n a_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 x^{n-2} + \ldots + \frac{n(n-1)}{1.2} a_{n-2} x^2 + n a_{n-1} x + a_n = 0.$$

De plus, le produit de toutes les fonctions dont il s'agit doit toujours être de même signe que le produit des carrés des différences entre les racines de la proposée. Si l'on désigne, comme nous l'avons déjà fait, par

$$A_n = n^n (n-1)^{n-1} K_n$$

le dernier terme de l'équation aux carrés des différences,

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} A_n$$

sera le produit des carrés des différences entre les racines ; et, si l'on suppose déjà connues à l'exception d'une seule les diverses fonctions qui déterminent le nombre des racines réelles, en désignant par P le produit de ces fonctions on pourra représenter la fonction qui reste inconnue par

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} K_n P.$$

Digitized by Google

Ainsi, à l'aide des considérations précédentes, on déterminera pour tous les degrés possibles trois des fonctions cherchées, sans compter la première de toutes qui est toujours l'unité. L'une de ces trois fonctions, représentée par $-c_1$, est égale à

$$a_1^2 - a_2,$$

c'est-à-dire, à un coefficient numérique près, à la somme des carrés des différences entre les racines de la proposée; ce qui s'accorde avec le *corollaire 2.e* du problème précédent.

1.er Exemple. Si l'on suppose $n=2$, les deux fonctions

$$1, \quad -c_1$$

suffiront pour déterminer le nombre des racines réelles.

2.e Exemple. Soit $n=3$. Il faudra, pour déterminer le nombre des racines réelles, avoir égard, non-seulement aux deux fonctions $1, -c_1$, mais encore à la fonction

$$c_1\left[c_1\left\{(n-2)^2 c_{n-2}^2 - (n-1)(n-3) c_{n-1} c_{n-3}\right\} + c_{n-1}^2\right],$$

qui dans le cas présent se réduit à

$$c_1(c_1^3 + c_2^2).$$

Par suite on aura, pour déterminer le nombre des racines réelles, les trois fonctions

$$1, \quad -c_1, \quad c_1(c_2^2 + c_1^3).$$

Le produit de ces trois fonctions, lorsqu'on néglige le facteur carré c_1^2, devient égal à

$$-(c_2^2 + c_1^3) = (-1)^{\frac{3\cdot 2}{2}} K_3;$$

ce qui s'accorde avec la théorie précédente.

3.e Exemple. Soit $n=4$. La fonction

$$c_1\left[c_1\left\{(n-2)^2 c_{n-2}^2 - (n-1)(n-3) c_{n-1} c_{n-3}\right\} + c_{n-1}^2\right]$$

Digitized by Google

deviendra

$$c_1[(4c_2^2 - 3c_1c_3)c_1 + c_3^2].$$

De plus, si l'on néglige le facteur carré c_1^2, le produit des trois premières fonctions multiplié par

$$(-1)^{\frac{4\cdot 3}{2}} K_4 = K_4$$

sera

$$-[c_1(4c_2^2 - 3c_1c_3) + c_3^2]K_4.$$

Par suite on aura, pour déterminer le nombre des racines réelles, les quatre fonctions

$$1, \quad -c_1, \quad c_1[4c_1c_2^2 - c_3(3c_1^2 - c_3)], \quad -[4c_1c_2^2 - c_3(3c_1^2 - c_3)]K_4.$$

4.e Exemple. Soit $n = 5$. Trois des fonctions cherchées seront immédiatement connues par ce qui précède, et ces trois fonctions seront

$$1, \quad -c_1, \quad c_1[c_1(9c_3^2 - 8c_2c_4) + c_4^2].$$

De plus, le produit des deux dernières fonctions devra être affecté du même signe que le produit des trois premières par le dernier terme de l'équation aux carrés des différences; mais, comme cette condition ne suffit pas pour déterminer entièrement les deux fonctions qui restent inconnues, il faudra nécessairement avoir recours à l'équation auxiliaire qui résulte de l'élimination de y entre les équations (8). Si, dans ces deux dernières équations, on fait $n = 5$, et que l'on remplace immédiatement

$$a_1 \quad \text{par} \quad -\frac{3c_3}{4c_4},$$

$$a_2 \quad \text{par} \quad -\frac{2c_2}{4c_4},$$

$$a_3 \quad \text{par} \quad -\frac{c_1}{4c_4},$$

$$a_5 \quad \text{par} \quad -\frac{1}{4c_4},$$

Digitized by Google

elles deviendront respectivement

$$(10)\begin{cases} y(4c_4x^3+15c_3x^4+20c_2x^3+10c_1x^2+1)+(4c_4x^3+9c_3x^2+6c_2x+c_1)=0, \\ c_4x^3+3c_3x^2+3c_2x+c_1=0. \end{cases}$$

On peut d'ailleurs à chacun des polynomes en x renfermés dans la première équation substituer le reste de la division de ce polynome par le premier membre de la seconde. Si l'on suppose pour plus de commodité

$$p = -27c_3^3+3c_4(11c_2c_3-2c_1c_4),$$
$$q = -27c_2c_3^2+3c_4(8c_2^2+c_1c_3),$$
$$r = -9c_1c_3^2+c_4(8c_1c_2-c_4),$$

les deux polynomes dont il s'agit donneront pour restes

$$-\frac{1}{c_4^2}(px^2+qx+r), \quad -3(c_3x^2+2c_2x+c_1);$$

et, comme les multiplicateurs $\frac{1}{c_4^2}$ et 3 sont essentiellement positifs, on pourra sans nul inconvénient se dispenser d'en tenir compte. Cela posé, les équations (10) se réduiront à

$$(px^2+qx+r)y+c_3x^2+2c_2x+c_1=0, \quad c_4x^3+3c_3x^2+3c_2x+c_1=0.$$

Si l'on fait pour abréger

$$py+c_3=y_3, \quad qy+2c_2=y_2, \quad ry+c_1=y_1,$$

elles deviendront

$$y_3x^2+y_2x+y_1=0, \quad c_4x^3+3c_3x^2+3c_2x+c_1=0.$$

L'élimination de x entre ces deux dernières conduit à la suivante,

$$c_4^2y_1^3+c_4[(3c_2y_1-c_1y_2)(y_2^2-2y_1y_3)-y_1y_2(3c_3y_1-c_1y_3)]$$
$$+y_3(3c_3y_1-c_1y_3)^2-y_3(3c_3y_2-3c_2y_3)(3c_2y_1-c_1y_2)=0.$$

Si dans celle-ci on remet pour y_1, y_2, y_3 leurs valeurs respectives, on aura

$3c_3y_2$

Digitized by Google

$$3c_3y_2 - 3c_2y_3 = 3c_2c_3 - 3c_4p'y,$$
$$3c_3y_1 - c_1y_3 = 2c_1c_3 - 3c_4q'y,$$
$$3c_2y_1 - c_1y_2 = c_1c_2 - 3c_4r'y;$$

p', q', r', &c.... étant déterminés par les trois équations

$$p' = 9c_2^2c_3 - 3c_1c_3^2 - 6c_1c_2c_4,$$
$$q' = 3c_1c_2c_3 + c_3c_4 - 2c_1^2c_4,$$
$$r' = c_1^2c_3 + c_2c_4:$$

et par suite, l'équation auxiliaire en y sera

$$c_4^2(ry + c_1)^3$$
$$+ c_4\{[(qy+2c_2)^2 - 2(py+c_3)(ry+c_1)][c_1c_2 - 3c_4r'y] - [qy+2c_2][ry+c_1][2c_1c_3 - 3c_4q'y]\}$$
$$+ [py+c_3][(2c_1c_3 - 3c_4q'y)^2 - (c_1c_2 - 3c_4r'y)(3c_2c_3 - 3c_4p'y)] = 0.$$

Représentons par

$$\alpha y^3 + 3\beta y^2 + 3\gamma y + \delta = 0$$

cette même équation; on aura

$$\alpha = c_4^2[r^3 + 3q(q'r - qr') + 3p(3q'^2 - 3p'r' + 2rr')],$$
$$3\beta = 3c_4^2[c_1(r^2 + 2pr' + qq') - 2c_2(2qr' - q'r) + c_3(3q'^2 - 3p'r' + 2rr')]$$
$$+ c_4[c_1c_2(q^2 - 2pr + 3pp') - c_1c_3(2qr + 12pq') + 9c_2c_3pr'],$$
$$3\gamma = 3c_4^2[c_1^2r + 2c_1c_2q' + 2(c_1c_3 - 2c_2^2)r']$$
$$+ c_4[2c_1(2c_2^2 - c_1c_3)q - 2c_1^2c_2p - 6c_1c_2c_3r + 3c_1c_2c_3p' - 12c_1c_3^2q' + 9c_2c_3^2r']$$
$$+ c_1c_3(4c_1c_3 - 3c_2^2)p,$$
$$\delta = c_1[c_1^2c_4^2 + c_2c_4(4c_2^2 - 6c_1c_3) + c_3^2(4c_1c_3 - 3c_2^2)].$$

Si maintenant on restitue les valeurs de p, q, r, p', q', r', que l'on donne à K, la même valeur que ci-dessus (page 496), et qu'on fasse pour abréger

Digitized by Google

$$L_5 = c_4^2 - 8c_1c_2c_4 + 9c_1c_3^2,$$

$$M_5 = c_4^4c_1 - 4c_4^3c_2(7c_1^2 + c_3),$$
$$+ c_4^2[3c_3^3 + 33c_1^2c_3^2 + 142c_1c_2^2c_3 - 54c_1^4c_3 + 52c_1^3c_2^2 - 96c_2^4],$$
$$- 2c_4[129c_1c_2c_3^3 - 147c_1^3c_2c_3^2 - 90c_2^3c_3^2 + 242c_1^2c_2^3c_3 - 96c_1c_2^5],$$
$$+ 9c_3^2[12c_1c_3^3 - 9c_2^2c_3^2 - 20c_1^3c_3^2 + 35c_1^2c_2^2c_3 - 15c_1c_2^4],$$

$$N_5 = c_4^2c_1^2 - 2c_4c_2(3c_1c_3 - 2c_2^2) + c_3^2(4c_1c_3 - 3c_2^2);$$

on trouvera

$$\alpha = -c_4^4K_5, \quad \beta = c_4^2M_5, \quad \gamma = -L_5N_5, \quad \delta = c_1N_5.$$

D'ailleurs, l'équation en y que nous avons représentée par

$$\alpha y^3 + 3\beta y^2 + 3\gamma y + \delta = 0,$$

étant du troisième degré, on obtient facilement par le problème 2.e les trois fonctions qui déterminent pour cette équation la différence entre les nombres de racines positives et négatives. Les deux premières de ces fonctions sont respectivement égales à

$$-\frac{\gamma}{\alpha}\cdot\frac{\delta}{\alpha}, \quad \frac{\gamma}{\alpha}\left(\frac{\delta}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\gamma}{\alpha}\right),$$

et peuvent être évidemment remplacées par les deux suivantes

$$-\gamma\delta, \quad \alpha\gamma(\alpha\delta - \beta\gamma).$$

De plus, si l'on désigne par Δ le produit des carrés des différences entre les racines de l'équation en y, le produit des trois fonctions cherchées sera de même signe que le suivant

$$-\frac{\delta}{\alpha}\Delta;$$

d'où il résulte que la troisième fonction peut être représentée par

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)\Delta.$$

Digitized by Google

Enfin, en vertu du théorème 4.e *(corollaire 1.er)*, on pourra remplacer Δ par le produit des carrés des différences entre les racines de l'équation

$$c_4 x^3 + 3 c_3 x^2 + 3 c_2 x^2 + c_1 x^3 = 0,$$

ou, si l'on veut, de l'équation réciproque

$$c_4 + 3 c_3 x + 3 c_2 x^2 + c_1 x^3 = 0.$$

Soit D le produit des carrés des différences entre les racines de cette dernière équation; on aura

$$D = -27 \frac{N_5}{c_1^4}.$$

D s'évanouit donc avec N_5, ce qu'il était facile de prévoir; car

$$N_5 = 0$$

exprime la condition nécessaire pour que les deux équations

$$c_4 x^3 + 3 c_3 x^2 + 3 c_2 x + c_1 = 0, \quad c_3 x^2 + 2 c_2 x + c_1 = 0,$$

ou, ce qui revient au même, les deux suivantes

$$c_4 + 3 c_3 x + 3 c_2 x^2 + c_1 x^3 = 0, \quad c_3 + 2 c_2 x + c_1 x^2 = 0$$

puissent être en même temps satisfaites; et, comme la seconde de ces dernières équations est la première dérivée de l'autre, la même condition peut encore être exprimée par

$$D = 0.$$

Si dans la valeur de D on fait abstraction du facteur numérique 27 et du diviseur carré c_1^4, on trouvera pour la troisième des fonctions cherchées

$$-(\alpha\delta - \beta\gamma) N_5.$$

Ainsi les trois fonctions qui déterminent la différence entre le nombre des racines positives et le nombre des racines négatives de l'équation en y sont respectivement

Digitized by Google

$$-\gamma\delta, \quad +\alpha\gamma(\alpha\delta-\beta\gamma), \quad -(\alpha\delta-\beta\gamma)N_5.$$

Si dans ces trois fonctions on substitue les valeurs de α, β, γ, δ données ci-dessus, on trouvera, en négligeant les facteurs carrés,

$$c_1 L_5, \quad L_5 K_5 (M_5 L_5 - c_1 c_4^2 K_5), \quad -(M_5 L_5 - c_1 c_4^2 K_5).$$

Cela posé, les fonctions qui relativement à l'équation générale du cinquième degré doivent déterminer le nombre des racines réelles, seront

$$1, \quad -c_1, \quad c_1 L_5, \quad -L_5 K_5 (c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5), \quad c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5;$$

K_5, L_5, M_5 ayant les valeurs que nous leur avons assignées plus haut.

Le produit de toutes ces fonctions a évidemment le même signe que le produit des carrés des différences entre les racines de l'équation générale du cinquième degré; ce qui confirme l'exactitude de nos calculs.

Corollaire 1. Désignons à l'ordinaire par

$$x^n + n a_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 x^{n-2} + \ldots + \frac{n(n-1)}{1.2} a_{n-2} x^2 + n a_{n-1} x + a_n = 0$$

l'équation générale du degré n. Soit toujours

$$A_n = n^n (n-1)^{n-1} K_n$$

le dernier terme de l'équation aux carrés des différences entre les racines de la proposée. Enfin supposons que l'on donne à

$$c_1, \quad c_2 \ldots\ldots c_{n-1}, \quad c_n$$

les mêmes valeurs que ci-dessus (problème 1.er, *corollaire* 2.e); et soit

$$L_n = c^2_{n-1} + c_1 [(n-2)^2 c^2_{n-2} - (n-1)(n-3) c_{n-1} c_{n-3}].$$

Si l'on fait successivement $n=3$, $n=4$, $n=5$, on trouvera

$$L_3 = c_2^2 + c_1^3 = K_3,$$
$$L_4 = c_3^2 + c_1 (4 c_2^2 - 3 c_1 c_3),$$
$$L_5 = c_4^2 + c_1 (9 c_3^2 - 8 c_2 c_4);$$

Digitized by Google

et, en vertu de la théorie qu'on vient de développer, les fonctions dont les signes détermineront le nombre des racines réelles de la proposée, seront respectivement

pour l'équation générale du second degré

$$1, \quad -c_1,$$

pour l'équation générale du troisième degré

$$1, \quad -c_1, \quad c_1 L_3,$$

pour l'équation générale du quatrième degré

$$1, \quad -c_1, \quad c_1 L_4, \quad -L_4 K_4,$$

enfin pour l'équation générale du cinquième degré

$$1, \quad -c_1, \quad c_1 L_5, \quad -L_5 K_5 (c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5), \quad c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5,$$

M_5 ayant toujours la valeur que nous lui avons précédemment assignée.

Jusqu'ici nous avons supposé que l'équation proposée et les équations auxiliaires des divers ordres n'avaient pas de racines égales entre elles ou égales à zéro. S'il en était autrement, parmi les fonctions dont les signes doivent déterminer le nombre et l'espèce des racines réelles, quelques-unes deviendraient nulles, et par suite ne pourraient plus servir à la détermination dont il s'agit. Il faudrait alors avoir recours à l'une des méthodes exposées dans les paragraphes IV, V et VI de la première section. Pour faire mieux sentir l'esprit de ces méthodes, je vais les appliquer à quelques exemples.

Problème 4.e

Déterminer le nombre et l'espèce des racines réelles de l'équation binome

$$x^n + a = 0,$$

a *étant un nombre entier quelconque positif ou négatif.*

Digitized by Google

Première Solution. L'équation proposée étant

$$x^n + a = 0,$$

l'équation dérivée, savoir,

$$x^{n-1} = 0$$

aura toutes ses racines égales entre elles et à zéro. Cela posé, si l'on veut faire usage de la méthode indiquée dans le IV.^e paragraphe (1.^re section), il faudra distinguer deux cas, suivant que n sera pair ou impair.

Supposons d'abord n pair. Comme l'équation dérivée n'a qu'une seule espèce de racines égales, on n'obtiendra qu'une seule équation auxiliaire en y, et une seule équation auxiliaire en z. Pour former ces équations auxiliaires, il suffira, conformément au §. IV.^e (1.^re sect.), d'éliminer x, 1.° entre les deux équations

$$y + XX^{(n)} = 0, \qquad x = 0,$$

2.° entre les deux équations

$$z + xXX^{(n)} = 0, \qquad x = 0.$$

On a d'ailleurs dans le cas présent, $X = x^n + a$; et $X^{(n)}$ étant une quantité constante et positive, on peut sans inconvénient remplacer $X^{(n)}$ par l'unité. Cela posé, les équations auxiliaires cherchées seront respectivement,

$$y + a = 0,$$

$$z = 0.$$

La première ayant une racine positive lorsque a est négatif, et une racine négative dans le cas contraire; l'équation proposée aura deux racines réelles dans le premier cas, et n'en aura pas dans le second. De plus, l'équation en z ayant une seule racine réelle égale à zéro, et les racines de l'équation dérivée étant en nombre impair, la différence entre les nombres de racines positives et négatives sera nulle dans la proposée;

Digitized by Google

et par suite, si a est négatif, les deux racines réelles de l'équation

$$x^n + a = 0$$

seront de signes contraires.

Supposons maintenant n impair. Toutes les racines de l'équation dérivée étant égales entre elles et en nombre pair, on n'aura plus d'équations auxiliaires à former; et par suite la proposée n'aura qu'une racine réelle. Pour savoir si cette racine est positive ou négative, il suffira d'examiner si le produit des deux termes de l'équation donnée est négatif ou positif. La racine réelle dont il s'agit sera donc positive, si a est négatif, et négative dans le cas contraire.

Ces résultats étaient déjà bien connus : mais on voit comme ils se déduisent naturellement de la méthode exposée dans le §. IV (1.re section). On peut encore les obtenir, ainsi qu'il suit, par la méthode du §. V.

Seconde Solution. Si l'on veut appliquer à l'équation

$$x^n + a = 0$$

la méthode exposée dans le §. V (1.re section), il faudra faire

$$X = f(x) = x^n + a, \quad X' = f'(x) = nx^{n-1}, \quad f''(x+h) = n(n-1)(x+h)^{n-2}.$$

On peut, dans la valeur de $f''(x+h)$, négliger le facteur numérique $n(n-1)$; et par suite, pour obtenir conformément à la méthode dont il s'agit les équations auxiliaires en y et z, il suffira d'éliminer x, 1.° entre les deux équations

$$y + (x^n + a)(x+h)^{n-2} = 0, \qquad x^{n-1} = 0,$$

2.° entre les deux équations

$$z + x(x^n + a)(x+h)^{n-2} = 0, \qquad x^{n-1} = 0.$$

Cela posé, les équations auxiliaires cherchées seront respectivement

$$(y + ah^{n-2})^{n-1} = 0,$$
$$z^{n-1} = 0;$$

Digitized by Google

et, comme on ne doit tenir compte que des racines inégales de ces mêmes équations, on pourra les supposer réduites à

$$y + a h^{n-2} = 0,$$
$$z = 0.$$

La différence moyenne entre les nombres de racines positives et négatives de l'équation en y se trouve ici déterminée par la valeur moyenne du produit

$$- a h^{n-2},$$

valeur qu'on obtient en supposant alternativement dans ce produit l'indéterminée h positive et négative, et prenant ensuite la moyenne entre les deux résultats. La valeur moyenne dont il s'agit sera donc égale à

$$\frac{- a h^{n-2} + a h^{n-2}}{2},$$

c'est-à-dire nulle, si n est un nombre impair; mais si n est un nombre pair, elle sera positive ou négative, suivant que a sera négatif ou positif. Sous cette condition, le nombre des racines réelles de l'équation

$$x^n + a = 0$$

se trouvera déterminé par les deux fonctions

$$1, \quad - a h^{n-2}.$$

La dernière de ces fonctions devant être remplacée par zéro, lorsque n est impair, l'équation donnée aura dans cette hypothèse une seule racine réelle. Dans le cas contraire, elle en aura deux, si a est négatif; aucune, si a est positif.

L'équation auxiliaire en z n'ayant qu'une seule racine réelle égale à zéro, et le produit du terme constant de l'équation proposée par le terme unique de l'équation dérivée étant égal à

$$a x^{n-1};$$

la

Digitized by Google

la valeur moyenne qu'obtient ce dernier produit, lorsqu'on y donne successivement à x deux valeurs égales et de signes contraires, suffira pour déterminer la différence entre le nombre des racines positives et le nombre des racines négatives de l'équation donnée. Si n est un nombre pair, cette valeur moyenne étant nulle, l'équation donnée aura dans cette hypothèse autant de racines positives que de négatives: mais si n est un nombre impair, auquel cas la proposée a toujours une seule racine réelle, cette racine sera positive ou négative, suivant que le produit ax^{n-1} sera négatif ou positif, c'est-à-dire, suivant que la quantité a sera elle-même négative ou positive.

Il serait facile d'appliquer les méthodes précédentes aux équations trinomes de la forme

$$x^n + ax^{n-1} + b = 0.$$

En effet, une semblable équation a pour première dérivée

$$x^{n-1} + \frac{n-1}{n} ax^{n-2} = 0;$$

et l'on voit au premier abord que celle-ci a toutes ses racines réelles et nulles, à l'exception d'une seule qui est égale à

$$-\frac{n-1}{n} a.$$

Mais nous ne nous arrêterons pas plus long-temps sur cet objet, et nous nous contenterons d'ajouter ici quelques développemens relatifs à la méthode exposée dans le VI.^e paragraphe de la première section.

PROBLÈME 5.^e

Déterminer le nombre des racines réelles dans les équations générales des cinq premiers degrés.

Solution. L'équation du premier degré ne présente aucune difficulté, puisqu'elle a toujours une seule racine réelle. De plus, nous avons

Digitized by Google

donné ci-dessus (problème 3.e, *corollaire 1.er*), les fonctions dont les signes déterminent ordinairement le nombre des racines réelles dans les équations générales des deuxième, troisième, quatrième et cinquième degrés; mais lorsque ces fonctions, ou du moins quelques-unes d'entre elles, viennent à s'évanouir, on ne sait plus si elles doivent être considérées comme positives ou comme négatives. Il nous reste maintenant à faire voir comment la méthode du VI.e paragraphe (1.re sect.) peut servir à lever cette difficulté. Je supposerai, comme dans le paragraphe dont il s'agit, que l'équation donnée n'a pas de racines égales. Si le contraire avait lieu, il serait facile de l'en débarrasser par les méthodes connues.

Cela posé, désignons toujours par

$$x^n + na_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 x^{n-2} + \ldots + \frac{n(n-1)}{1.2} a_{n-2} x^2 + na_{n-1} x + a_n = 0$$

l'équation donnée, n pouvant être un quelconque des nombres 2, 3, 4 ou 5. Faisons de plus à l'ordinaire

$$\begin{aligned} c_1 &= a_2 - a_1^2, \\ 2c_2 &= a_3 - 3a_1 a_2 + 2a_1^3, \\ 3c_3 &= a_4 - 4a_1 a_3 + 6a_1^2 a_2 - 3a_1^4, \\ 4c_4 &= a_5 - 5a_1 a_4 + 10a_1^2 a_3 - 10a_1^3 a_2 + 4a_1^5. \end{aligned}$$

Comme par hypothèse l'équation donnée n'a pas de racines égales, le dernier terme de l'équation aux carrés des différences représenté par

$$A_n = n^n (n-1)^{n-1} K_n$$

aura nécessairement une valeur positive ou négative différente de zéro. Supposons maintenant que parmi les fonctions trouvées ci-dessus (problème 3.e) quelques-unes s'évanouissent; alors, pour suivre la méthode du VI.e paragraphe (1.re section), il suffira d'attribuer à chacune des quantités

$$a_2, \quad a_3, \quad a_4, \quad a_5,$$

Digitized by Google

ou, ce qui revient au même, à chacune des quantités suivantes,

$$c_1, \quad c_2, \quad c_3, \quad c_4,$$

un accroissement très-petit, mais arbitraire, positif ou négatif, et d'établir entre les accroissemens de ces mêmes quantités un ordre de grandeur déterminé, en sorte qu'on puisse toujours négliger les uns par rapport aux autres. Désignons par h_1, h_2, h_3, h_4 les accroissemens de c_1, c_2, c_3, c_4. Si l'on fait varier ces quantités de leurs accroissemens respectifs dans les fonctions qui se trouvaient réduites à zéro, ces fonctions cesseront de s'évanouir, et leurs signes détermineront à l'ordinaire le nombre des racines réelles de la proposée. Il suffira même, dans beaucoup de cas, de faire varier seulement une ou deux des quantités que l'on considère. Appliquons ces principes aux équations générales du second, du troisième, du quatrième et du cinquième degré.

1.^er *Exemple.* Considérons l'équation générale du second degré

$$x^2 + 2a_1x + a_2 = 0.$$

Les fonctions dont les signes déterminent ordinairement le nombre de ses racines réelles sont, comme on l'a déjà fait voir,

$$1, \quad -c_1.$$

Ici la fonction c_1 est la seule qui puisse devenir nulle; mais cette fonction même étant égale à K_2 ne s'évanouira jamais tant que les racines de la proposée seront inégales entre elles, ainsi que nous l'avons admis ci-dessus.

2.^e *Exemple.* Considérons l'équation générale du troisième degré

$$x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0.$$

Le nombre de ses racines réelles est ordinairement déterminé par les signes des trois fonctions

$$1, \quad -c_1, \quad c_1L_3;$$

Digitized by Google

Comme la fonction K_3 n'est pas nulle par hypothèse, il en sera de même de la fonction L_3 qui lui est égale; mais il peut arriver que c_1 s'évanouisse. Dans ce cas on devra remplacer c_1 par h_1 : d'ailleurs, puisque l'on peut supposer à volonté h_1 positif ou négatif, et que ces deux hypothèses doivent conduire au même résultat, il sera nécessaire que les deux fonctions

$$-h_1, \qquad h_1 L_3$$

soient de signes contraires; car s'il en était autrement, si par exemple ces deux fonctions étaient positives dans le cas où l'on suppose h_1 négatif, elles deviendraient toutes deux négatives lorsque h_1 serait positif; et par suite on arriverait à des conclusions différentes, suivant que l'on admettrait l'une ou l'autre des deux hypothèses dont il s'agit. Il suit encore de la remarque précédente, que, dans le cas où c_1 devient nul, la quantité L_3 doit être positive; c'est ce dont il est facile de s'assurer directement, car L_3 se réduit alors à c_2^2. Dans le même cas, les deux fonctions

$$-h_1, \qquad h_1 L_3$$

étant de signes contraires, on peut en faire abstraction; et il en résulte que le nombre des racines réelles de la proposée est simplement égal à l'unité.

En général, lorsque c_1 est positif ou nul, L_3 est positif; et les deux fonctions

$$-c_1, \qquad c_1 L_3$$

doivent être considérées comme affectées de signes contraires. On peut donc alors les remplacer par les deux suivantes

$$1, \qquad -L_3.$$

D'ailleurs, lorsque c_1 est négatif, on peut remplacer encore

$$-c_1 \text{ par } 1 \quad \text{et} \quad c_1 L_3 \text{ par } -L_3 = -K_3.$$

Digitized by Google

On pourra donc, dans tous les cas possibles, substituer aux trois fonctions données les suivantes

$$1, \quad 1, \quad -K_3.$$

Ainsi l'équation proposée aura trois racines réelles, si le dernier terme de l'équation aux carrés des différences est négatif : elle n'en aura qu'une, si ce terme est positif.

3.e Exemple. Considérons l'équation du quatrième degré

$$x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0.$$

Le nombre de ses racines réelles est ordinairement déterminé par les signes des quatre fonctions

$$1, \quad -c_1, \quad c_1L_4, \quad -L_4K_4.$$

La quantité K_4 n'est pas nulle par hypothèse ; mais les quantités c_1 et L_4 peuvent être ensemble ou séparément égales à zéro.

Supposons d'abord que c_1 seule s'évanouisse : L_4 se réduisant alors à c_3^2 sera nécessairement positif ; et d'ailleurs, en raisonnant comme dans le second exemple, on fera voir que les fonctions

$$-c_1, \quad c_1L_4$$

doivent être considérées comme affectées de signes contraires. On pourra donc en faire abstraction ; et dans ce cas, le nombre des racines réelles sera uniquement déterminé par les signes des deux fonctions

$$1, \quad -L_4K_4,$$

ou, ce qui revient au même, des deux suivantes

$$1, \quad -K_4.$$

Supposons, en second lieu, que L_4 seule s'évanouisse. Si l'on fait varier c_2 de h_2, la variation de L_4 sera

$$8c_1c_2h_2.$$

Digitized by Google

On pourra donc, en négligeant les facteurs numériques et les facteurs carrés, substituer aux deux fonctions

$$c_1 L_4, \qquad -L_4 K_4$$

les deux suivantes

$$c_2 h_2, \qquad -c_1 c_2 K_4 h_2;$$

et, comme le signe de h_2 est tout-à-fait arbitraire, ces deux fonctions devront être de signes contraires, à moins toutefois que c_2 ne soit nul. Si ce dernier cas avait lieu, elles se réduiraient à zéro ; mais alors, en faisant varier c_1 de h_1, on trouverait pour la variation de L_4

$$-6 c_1 c_3 h_1;$$

et l'on ferait voir encore que les fonctions

$$c_1 L_4, \qquad -L_4 K_4$$

doivent être considérées comme affectées de signes contraires, à moins que c_3 ne soit nul. D'ailleurs, comme on ne peut supposer en même temps

$$c_2 = 0, \qquad c_3 = 0,$$

sans avoir aussi

$$K_4 = 0;$$

on voit qu'en excluant cette dernière hypothèse on pourra toujours faire abstraction des deux fonctions

$$c_1 L_4, \qquad -L_4 K_4,$$

dans le cas où L_4 s'évanouirait.

Il est facile d'arriver directement à la même conclusion, en prouvant que dans le cas où l'on suppose

$$L_4 = 0$$

les deux quantités c_1, K_4 sont nécessairement de même signe : et en effet on a dans cette hypothèse

Digitized by Google

$$K_4 = \left[\frac{2c_2(c_1^2 + c_3)}{c_1}\right]^2 c_1^2$$

Ainsi, dans le cas que l'on considère, les fonctions qui doivent déterminer le nombre des racines réelles se réduisent à

$$1, \quad -c_1,$$

ou, ce qui revient au même, à

$$1, \quad -K_4.$$

Supposons enfin que l'on ait en même temps

$$c_1 = 0, \quad L_4 = 0;$$

il sera facile de faire varier à-la-fois c_1, c_2 et c_3, de manière que, l'une des quantités c_1, L_4 restant nulle, l'autre cesse de s'évanouir. On rentrera par ce moyen dans l'une des deux hypothèses précédentes. Ainsi, par exemple, si l'on augmente c_3 de h_3 sans faire varier c_1, L_4 obtiendra une valeur différente de zéro; et l'on rentrera dans le premier des deux cas que nous avons considérés ci-dessus. Il suit de cette remarque, que dans la dernière hypothèse, comme dans les deux autres, le nombre des racines réelles sera déterminé par les signes des deux fonctions

$$1, \quad -K_4.$$

De plus, comme en supposant $c_1 = 0$, $L_4 = 0$, on a

$$c_3 = 0 \quad \text{et} \quad K_4 = -(4c_2^2)^2,$$

la fonction $-K_4$ sera positive; et par conséquent la proposée aura deux racines réelles.

4.^e *Exemple.* Considérons l'équation générale du cinquième degré

$$x^5 + 5a_1x^4 + 10a_2x^3 + 10a_3x^2 + 5a_4x + a_5 = 0.$$

Les fonctions dont les signes déterminent ordinairement le nombre de ses racines réelles sont, comme on l'a fait voir,

Digitized by Google

$$1,\quad -c_1,\quad c_1L_5,\quad -L_5K_5\,(c_1c_4^2K_5-L_5M_5),\quad c_1c_4^2K_5-L_5M_5.$$

Comme on suppose les racines de l'équation donnée inégales entre elles, K_5 a nécessairement une valeur différente de zéro : mais les trois quantités

$$c_1,\qquad L_5,\qquad c_1c_4^2K_5-L_5M_5$$

peuvent s'évanouir ensemble ou séparément; et par suite les fonctions données peuvent devenir nulles dans quatre hypothèses différentes, que nous allons examiner successivement.

1.° Supposons que des trois quantités que l'on considère, la première seule, ou c_1, s'évanouisse. On fera voir, comme dans le second exemple, qu'on peut ne tenir aucun compte des deux fonctions

$$-c_1,\qquad c_1L_5.$$

De plus, L_5 étant alors nécessairement positive, on pourra, dans les fonctions où cette quantité entre comme facteur, la remplacer par l'unité; et par conséquent il suffira, pour déterminer le nombre des racines réelles de la proposée, d'avoir égard aux signes des trois fonctions

$$1,\qquad K_5M_5,\qquad -M_5.$$

Les deux dernières seront de signes contraires, si K_5 est positif; la proposée n'aura donc alors qu'une racine réelle : mais si K_5 est négatif, les deux fonctions dont il s'agit seront de même signe; et, comme le nombre des fonctions négatives ne peut évidemment surpasser le nombre des positives, les deux fonctions que l'on considère seront nécessairement positives, d'où il suit que l'équation donnée aura trois racines réelles. On conclut aisément de ces remarques, que, dans le cas où $c_1=0$, le nombre des racines réelles peut toujours être déterminé par les signes des trois fonctions

$$1,\qquad 1,\qquad -K_5.$$

2.° Supposons que des trois quantités

$$c_1,\qquad L_5,\qquad c_1c_4^2K_5-L_5M_5$$

la

Digitized by Google

la seconde seule, ou L_5 s'évanouisse. On ne pourra supposer dans L_5

$$9c_3^2 - 8c_2c_4 = 0;$$

car on aurait alors nécessairement

$$c_4 = 0, \quad c_3 = 0, \quad K_5 = 0.$$

Cela posé, en faisant varier c_1 de h_1 dans la valeur générale de L_5, on prouvera facilement qu'on peut ne tenir aucun compte des deux fonctions

$$c_1 L_5, \quad -L_5 K_5 (c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5),$$

et que les deux quantités

$$c_1, \quad K_5 (c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5),$$

ou bien encore les deux suivantes

$$c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5, \quad c_1 K_5,$$

sont nécessairement affectées de même signe. Par suite, pour déterminer le nombre des racines réelles de la proposée, il suffira d'avoir égard aux signes des trois fonctions

$$1, \quad -c_1, \quad c_1 K_5,$$

ou, ce qui revient au même, des trois suivantes

$$1, \quad 1, \quad -K_5.$$

L'équation donnée aura donc une seule racine réelle, si K_5 est positif: elle en aura trois dans le cas contraire.

3.° Supposons que, chacune des quantités c_1, L_5 ayant une valeur différente de zéro, la quantité

$$c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5$$

soit nulle. Dans ce cas, les coefficiens de l'équation auxiliaire en y que

Digitized by Google

nous avons considérée ci-dessus (problème 3.e, 4.e *exemple*), et que nous avons représentée par

$$\alpha y^3 + 3\beta y^2 + 3\gamma y + \delta = 0,$$

satisferont à la condition suivante

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 0.$$

Alors, des trois fonctions qui déterminent la différence entre le nombre des racines positives et le nombre des racines négatives de cette équation, deux se réduiront à zéro. Mais, en faisant varier les coefficiens α, β, γ, δ de quantités très-petites et de signe arbitraire, on prouvera facilement qu'on peut faire abstraction des deux fonctions dont il s'agit, et déterminer uniquement la différence cherchée par le signe de la fonction

$$-\gamma\delta.$$

On doit toutefois excepter le cas où l'équation en y aurait des racines égales, et ceux où quelqu'un des coefficiens α, β, γ, δ deviendrait nul. Dans tout autre cas, le produit $\alpha\gamma$ et la quantité désignée par Δ seront nécessairement de signes contraires; et par suite les quantités K_5, L_5 seront de même signe. De plus, comme on peut en négligeant les facteurs carrés remplacer la fonction

$$-\gamma\delta$$

par la suivante

$$c_1 L_5,$$

on pourra encore, en vertu de la remarque précédente, lui substituer celle-ci

$$c_1 K_5;$$

et l'on aura enfin, pour déterminer le nombre des racines réelles de l'équation du cinquième degré proposée, les trois fonctions suivantes

$$1, \quad -c_1, \quad c_1 K_5,$$

Digitized by Google

que l'on peut aussi remplacer par ces trois dernières

$$1, \quad 1, \quad -K_5.$$

Il reste à savoir ce qui arriverait, si dans l'hypothèse précédente quelqu'une des quantités α, β, γ, δ se réduisait à zéro, ou si l'équation auxiliaire en y avait des racines égales.

Il suit évidemment de l'équation

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 0;$$

qu'une des quatre quantités α, β, γ, δ ne peut devenir nulle, sans qu'une des quantités α, δ le soit aussi; d'ailleurs, c_1 et K_5 n'étant pas nulles par hypothèse, on ne peut avoir

$$\alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \delta = 0,$$

sans avoir aussi

$$c_4 = 0 \quad \text{ou} \quad N_5 = 0,$$

c'est-à-dire, sans que l'équation auxiliaire en y acquière deux racines égales nulles ou infinies. Il suffira donc d'examiner le cas où, l'équation en y ayant des racines égales entre elles, $c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5$, et par suite $\alpha\delta - \beta\gamma$, s'évanouit.

Il est aisé de voir que pour satisfaire aux deux conditions précédentes, on est obligé de supposer à-la-fois

$$\alpha = 0, \quad c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5 = 0,$$

ou bien

$$\delta = 0, \quad c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5 = 0,$$

ou bien encore

$$\beta^2 - \alpha\gamma = 0, \quad c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5 = 0.$$

Supposons d'abord

$$\alpha = 0, \quad c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5 = 0.$$

K_5 et L_5 n'étant pas nuls par hypothèse, on aura nécessairement

$$c_4 = 0, \quad M_5 = 0,$$

Digitized by Google

De plus, lorsque c_4 s'évanouit, on a

$$M_5 = 9c_3^2(4c_1c_3 - 3c_2^2)(3c_3^2 - 5c_1^2c_3 + 5c_1c_2^2) = 9N_5(3c_3^2 - 5c_1^2c_3 + 5c_1c_2^2);$$

et, puisqu'on ne peut supposer à-la-fois

$$c_4 = 0, \quad c_3 = 0;$$

si $4c_1c_3 - 3c_2^2$ n'est pas nul, l'équation $M_5 = 0$ se trouvera réduite à

$$3c_3^2 - 5c_1^2c_3 + 5c_1c_2^2 = 0.$$

Dans le même cas, si l'on fait varier c_1 de h_1, c_2 de h_2, c_3 de h_3, la variation de M_5 sera en général

$$9[5(c_2^2 - 2c_1c_3)h_1 + 10c_1c_2h_2 + (6c_3 - 5c_1^2)h_3]N_5;$$

et, comme on ne peut avoir en même temps

$$c_2^2 - 2c_1c_3 = 0, \quad c_1c_2 = 0, \quad 6c_3 - 5c_1^2 = 0,$$

sans avoir aussi

$$K_5 = c_4^4 = 0,$$

on pourra toujours, en négligeant deux des accroissemens h_1, h_2, h_3 vis-à-vis du troisième, réduire la variation dont il s'agit à l'une des trois suivantes:

$$45(c_2^2 - 2c_1c_3)N_5h_1,$$
$$90c_1c_2N_5h_2,$$
$$9(6c_3 - 5c_1^2)N_5h_3.$$

Cela posé, la variation de

$$c_1c_4^2K_5 - L_5M_5$$

sera proportionnelle à l'un des accroissemens h_1, h_2, h_3. Le signe de chacun d'eux étant tout-à-fait arbitraire, il en résulte que les deux fonctions

$$-L_5K_5(c_1c_4^2K_5 - L_5M_5), \quad c_1c_4^2K_5 - L_5M_5$$

devront être considérées comme affectées de signes contraires, et que

Digitized by Google

les deux quantités L_5, K_5 seront nécessairement de même signe. Il est aisé d'en conclure que le nombre des racines réelles de la proposée sera encore déterminé par les signes des trois fonctions

$$1, \quad 1, \quad -K_5.$$

Si, pour satisfaire à l'équation $M_5 = 0$, on supposait $N_5 = 0$; la seconde des équations (10), savoir,

$$c_4 x^3 + 3 c_3 x^2 + 3 c_2 x + c_1 = 0$$

ayant alors des racines égales, la proposée aurait nécessairement des racines imaginaires. On pourrait donc assurer qu'elle a trois racines réelles si K_5 est négatif, une seule si K_5 est positif; ce qui revient à déterminer le nombre des racines réelles par les signes des trois fonctions

$$1, \quad 1, \quad -K_5.$$

Supposons maintenant

$$\Delta = 0, \quad c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5 = 0.$$

c_1 n'étant pas nul, par hypothèse, l'équation $\Delta = 0$ entraînera la suivante

$$N_5 = 0;$$

et par suite il suffira toujours, pour déterminer le nombre des racines réelles, d'avoir égard aux signes des trois fonctions

$$1, \quad 1, \quad -K_5.$$

Supposons enfin

$$\beta^2 - \alpha\gamma = 0, \quad c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5 = 0.$$

La dernière de ces deux équations pouvant être mise sous la forme

$$\alpha\Delta - \beta\gamma = 0,$$

on aura en même temps

$$\gamma = \frac{\beta^2}{\alpha}, \quad \Delta = \frac{\beta^3}{\alpha^2}.$$

Digitized by Google

Cela posé, l'équation auxiliaire en y deviendra

$$(\alpha y + \beta)^3 = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(c_4^2 K_5 y - M_5)^3 = 0.$$

Cette dernière équation aura ses trois racines réelles égales et positives, si M_5 n'étant pas nul K_5 et M_5 sont de même signe; et dans ce cas seulement la proposée pourra avoir toutes ses racines réelles. Pour qu'elles le soient en effet, il sera de plus nécessaire que c_1 soit négatif, et que la seconde des équations (10) ait ses trois racines réelles et inégales, ce qui entraîne la condition

$$N_5 < 0.$$

Ainsi, toutes les racines de la proposée seront réelles, si l'on a en même temps

$$c_1 < 0, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 0, \quad \beta^2 - \alpha\gamma = 0, \quad K_5 M_5 > 0, \quad N_5 < 0,$$

ou, ce qui revient au même, si l'on a

$$c_1 < 0, \quad c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5 = 0, \quad K_5 L_5 N_5 - M_5^2 = 0, \quad K_5 M_5 > 0, \quad N_5 < 0.$$

Dans cette hypothèse, K_5 et M_5 étant de même signe, il faudra, pour que l'équation $c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5 = 0$ puisse avoir lieu, que L_5 soit négatif. De plus, comme N_5 est aussi négatif, l'équation $K_5 L_5 N_5 - M_5^2 = 0$ entraînera la condition $K_5 > 0$; et par suite on aura encore $M_5 > 0$. Si les conditions précédentes ne sont pas satisfaites, et que la quantité

$$c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5$$

vienne à s'évanouir; le nombre des racines réelles de l'équation donnée, ne pouvant être égal à 5, sera nécessairement déterminé par les signes des trois fonctions

$$1, \quad 1, \quad -K_5.$$

4.° Jusqu'ici nous avons supposé que des trois quantités

Digitized by Google

$$c_1, \quad L_5, \quad c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5,$$

une seule devenait nulle. Mais il peut arriver que deux de ces quantités ou toutes trois à-la-fois se réduisent à zéro. Au reste, il est facile de prouver que dans cette hypothèse on aura nécessairement

$$c_1 = 0.$$

Car, si c_1 n'étant pas nul les deux quantités L_5, $c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5$ venaient à s'évanouir, on aurait en même temps les deux équations

$$c_4^2 K_5 = 0, \quad L_5 = 0,$$

auxquelles il est impossible de satisfaire tant que l'on attribue à K_5 une valeur différente à zéro. D'ailleurs, en faisant varier c_2, c_3 et c_4 de quantités très-petites mais arbitraires, on ramène facilement l'hypothèse précédente à celle où des trois quantités

$$c_1, \quad L_5, \quad c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5,$$

la première toute seule s'évanouit. On peut donc assurer que dans cette même hypothèse le nombre des racines réelles est uniquement déterminé par les signes des trois fonctions

$$1, \quad 1, \quad -K_5.$$

Corollaire 1.er En résumant tout ce qui a été dit ci-dessus, on arrive aux conclusions suivantes.

Lorsqu'une équation du second ou du troisième degré a toutes ses racines inégales entre elles; le nombre des racines réelles se trouve déterminé, si l'équation est du second degré, par les signes des deux fonctions

$$1, \quad -K_2,$$

et si l'équation est du troisième degré, par les signes des trois fonctions

$$1, \quad 1, \quad -K_3.$$

Lorsqu'une équation du quatrième ou du cinquième degré a toutes ses racines inégales entre elles ; le nombre des racines réelles de cette même équation est déterminé par les fonctions données ci-dessus

Digitized by Google

(problème 3.e, *corollaire 1.er*), pourvu toutefois qu'aucune de ces fonctions ne s'évanouisse : mais si quelques-unes d'entre elles se réduisent à zéro, alors les fonctions, dont les signes déterminent le nombre des racines réelles, sont pour l'équation générale du quatrième degré

$$1, \quad -K_4,$$

et pour l'équation générale du cinquième degré

$$1, \quad 1, \quad -K_5.$$

On doit seulement excepter, relativement à l'équation générale du cinquième degré, le cas où la quantité $c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5$ étant nulle on aurait de plus

$$c_1 < 0, \quad N_5 < 0, \quad K_5 M_5 > 0, \quad K_5 L_5 N_5 - M_5^2 = 0;$$

auquel cas les cinq racines seraient toutes réelles.

Corollaire 2.e On peut facilement comparer, jusqu'au quatrième degré, les résultats que nous venons d'obtenir avec les conditions à l'aide desquelles on fixe ordinairement le nombre des racines réelles; et d'abord il suit de la théorie précédente, que dans les équations du second et du troisième degré le nombre de ces racines est toujours déterminé par le signe du dernier terme de l'équation aux carrés des différences, ce que l'on savait déjà.

Je passe à l'équation du quatrième degré. La méthode par laquelle on détermine ordinairement le nombre de ses racines réelles, se réduit à ce qui suit. On commence par examiner si le dernier terme de l'équation aux carrés des différences est positif ou négatif. Lorsqu'il est négatif, on en conclut que la proposée a deux racines imaginaires. Lorsqu'il est positif, toutes les racines sont à-la-fois réelles ou imaginaires: elles sont réelles, si l'on a en même temps

$$c_1 < 0, \quad c_3 - 3c_1^2 < 0;$$

elles sont imaginaires, si l'une ou l'autre des deux conditions précédentes vient à manquer.

On

Digitized by Google

On peut arriver aux mêmes conclusions par la considération des quatre fonctions trouvées ci-dessus, savoir,

$$1, \quad -c_1, \quad c_1 L_4, \quad -L_4 K_4;$$

et d'abord, si K_4 est négatif, le produit de ces quatre fonctions étant aussi négatif, les fonctions négatives seront en nombre impair. D'ailleurs, le nombre de ces dernières ne pouvant surpasser le nombre de celles qui seront positives, on aura nécessairement dans l'hypothèse dont il s'agit une fonction négative, trois positives, et par suite deux racines réelles. Ce résultat subsiste dans le cas même où quelques-unes des fonctions données s'évanouissent; car les deux fonctions

$$1, \quad -K_4,$$

qui déterminent alors le nombre des racines réelles, étant toutes deux positives, indiquent deux racines de cette espèce dans l'équation proposée.

Supposons maintenant K_4 positif. Les quatre fonctions données seront positives, si les quantités c_1, L_4 sont toutes deux négatives; et dans ce cas, la proposée aura ses quatre racines réelles. Mais si l'une des quantités c_1, L_4 est positive, ou si ces quantités le sont toutes deux en même temps, le nombre des fonctions positives sera égal à celui des négatives; et par suite l'équation donnée n'aura pas de racines réelles. Il en serait encore de même, si quelques-unes des fonctions que l'on considère venaient à s'évanouir; car il faudrait alors, pour fixer le nombre des racines réelles, avoir recours aux deux fonctions

$$1, \quad -K_4,$$

qui, pour une valeur positive de K_4, sont évidemment de signes contraires. Les conditions nécessaires, mais suffisantes, pour que les racines soient toutes réelles, sont donc les trois suivantes

$$K_4 > 0; \quad c_1 < 0, \quad L_4 < 0.$$

Il nous reste à faire voir qu'elles sont équivalentes à celles que fournissent les méthodes connues, savoir,

Digitized by Google

$$K_4 > 0, \quad c_1 < 0, \quad c_3 - 3c_1^2 < 0.$$

On peut aisément démontrer cette assertion ainsi qu'il suit.

Il est d'abord facile de prouver que, si l'on a en même temps

$$K_4 > 0, \quad c_1 < 0, \quad L_4 < 0,$$

on aura aussi

$$c_3 - 3c_1^2 < 0;$$

et en effet la condition $K_4 > 0$ entraîne la suivante

$$(c_1^2 + c_3)^3 > (4c_2^2 - 3c_1c_3 + c_1^3)^2;$$

qu'on peut aussi mettre sous la forme

$$(c_1^2 + c_3)^3 > \frac{1}{c_1^2}(c_3^2 - c_1^4 - L_4)^2.$$

Cela posé, si c_3 est négatif, ou si c_3 étant positif reste inférieur à c_1^2; $c_3 - 3c_1^2$ sera évidemment négatif. Mais, si c_3 est positif et supérieur à c_1^2, alors, les deux quantités $c_3^2 - c_1^4$ et $-L_4$ étant positives, on aura

$$c_3^2 - c_1^4 - L_4 > c_3^2 - c_1^4.$$

Or on a déjà trouvé

$$(c_1^2 + c_3)^3 > \frac{1}{c_1^2}(c_3^2 - c_1^4 - L_4)^2.$$

On aura donc par suite

$$(c_1^2 + c_3)^3 > \frac{1}{c_1^2}(c_3^2 - c_1^4)^2.$$

Si l'on multiplie les deux membres de cette dernière inégalité par

$$\left(\frac{c_1}{c_1^2 + c_3}\right)^2,$$

on trouvera qu'elle se réduit à

$$c_1^2(c_1^2 + c_3) > (c_3 - c_1^2)^2;$$

ou bien encore à

$$c_3(c_3 - 3c_1^2) < 0;$$

Digitized by Google

et, comme par hypothèse c_3 est positif, il faudra nécessairement que $c_3 - 3c_1^2$ soit négatif : ainsi dans tous les cas possibles les trois conditions

$$K_4 > 0, \quad c_1 < 0, \quad L_4 < 0$$

entraînent la suivante

$$c_3 - 3c_1^2 < 0.$$

Réciproquement, si l'on a en même temps

$$K_4 > 0, \quad c_1 < 0, \quad c_3 - 3c_1^2 < 0,$$

on devra aussi avoir nécessairement

$$L_4 < 0 :$$

et en effet, les deux quantités c_1 et $c_3 - 3c_1^2$ étant négatives par hypothèse; si c_3 est positif, la valeur de L_4 donnée par l'équation

$$L_4 = 4c_2^2 c_1 + c_3(c_3 - 3c_1^2)$$

sera évidemment négative. De plus, K_4 ne pouvant être positif à moins que l'on n'ait

$$c_2^2 + c_3 > 0; \quad (c_1^2 + c_3)^3 > \frac{1}{c_1^2}(c_3^2 - c_1^4 - L_4)^2;$$

si l'on suppose c_3 négatif, on aura

$$c_1^2(c_1^2 + c_3)^2 > (c_1^2 + c_3)^3 > \frac{1}{c_1^2}(c_3^2 - c_1^4 - L_4)^2.$$

Mais, c_3 étant négatif, on a aussi

$$c_1^2(c_1^2 + c_3)^2 < \frac{1}{c_1^2}(c_3^2 - c_1^4)^2;$$

On aura donc par suite

$$(c_3^2 - c_1^4)^2 > (c_3^2 - c_1^4 - L_4)^2.$$

Pour satisfaire à cette dernière inégalité, on est obligé de supposer que

$$c_3^2 - c_1^4 \quad \text{et} \quad L_4$$

Digitized by Google

sont de même signe ; d'ailleurs, $c_3^2 - c_1^4$ étant le produit des deux facteurs

$$c_3 + c_1^2, \quad c_3 - c_1^2,$$

dont le premier est positif et le second négatif, a nécessairement une valeur négative. Il en sera donc de même de L_4. On ne pourra donc avoir en même temps

$$K_4 > 0, \quad c_1 < 0, \quad c_3 - 3c_1^2 < 0,$$

sans avoir aussi

$$L_4 < 0;$$

ce qui achève de prouver l'identité des conditions que fournissent relativement à l'équation générale du quatrième degré les méthodes connues et celle que nous avons précédemment exposée.

Quant à l'équation générale du cinquième degré, les conditions que nous avons trouvées pour déterminer le nombre de ses racines réelles, lorsque ces racines sont inégales, se réduisent à ce qui suit.

Les cinq racines seront réelles, si les quatre quantités

$$-c_1, \quad -L_5, \quad K_5, \quad c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5$$

sont toutes positives, ou si la dernière de ces quantités étant nulle on a

$$c_1 < 0, \quad N_5 < 0, \quad K_5 M_5 > 0, \quad K_5 L_5 N_5 - M_5^2 = 0.$$

Dans toute autre hypothèse, la proposée aura une seule racine réelle, ou bien elle en aura trois, suivant que la condition $K_5 > 0$ sera ou ne sera pas satisfaite. Les conditions qu'on vient d'énoncer peuvent remplacer celles que fournit l'équation aux carrés des différences, et leur sont nécessairement équivalentes ; mais il serait peut-être difficile de les en déduire directement.

Digitized by Google

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES;

Lues à l'Institut le 11 Juillet 1814,

PAR A. M. AMPÈRE.

§. I.er

NOTIONS PRÉLIMINAIRES ET DÉFINITIONS.

LES équations qui contiennent des différentielles, soit ordinaires, soit partielles, expriment, comme on sait, des relations entre les variables qui entrent dans ces équations, et les dérivées qui représentent les rapports des accroissemens infiniment petits qu'elles prennent lorsqu'on les fait varier conformément à la dépendance mutuelle que la nature de la question qu'on se propose de résoudre, établit entre elles.

Ces relations en supposent nécessairement entre les variables elles-mêmes; ces dernières sont exprimées par les intégrales primitives des équations différentielles, et par les solutions particulières primitives dont elles peuvent être susceptibles.

Je ne m'occuperai point, dans les recherches que j'ai l'honneur de présenter aujourd'hui à la classe, des intégrales et des solutions particulières qu'on peut appeler intermédiaires, et qui expriment les relations

Digitized by Google

qui doivent exister entre les va
vées de ces mêmes variables d'o
donnée, pour que cette équation p
d'arriver directement aux intégrales p
de l'ordre dans le travail que j'ai entr
autre mémoire tout ce qui est relatif à c
équations différentielles, et me borner dan
intégrales primitives des équations aux diff
variables indépendantes. Il ne peut y avoir de
quent d'équations différentielles, qu'autant que le
entre les quantités que l'on considère, permettent
ou plusieurs à volonté, sans que ces relations cessen
le premier cas, il n'y a qu'une variable indépendant
autres sont des fonctions ; c'est celui des équations au
ordinaires : dans le second, le nombre des variables ind
déterminé par la nature de la question, et les équations s
férentielles partielles : dans l'un et l'autre cas, on peut toujou
à volonté la variable ou les variables qu'on regarde comme i
dantes. Pour qu'une intégrale soit générale, il faut qu'il n'en résulte
les variables que l'on considère et leurs dérivées à l'infini, que les r
tions exprimées par l'équation donnée, et par les équations qu'on e
déduit en la différenciant.

Les intégrales et les solutions particulières, en même temps qu'elles établissent ces relations entre les variables et leurs dérivées, en établissent d'autres étrangères à la question, et elles n'en représentent par conséquent que des cas particuliers.

On distingue les intégrales particulières des solutions particulières, en ce que les premières peuvent être complétées de manière à produire une intégrale générale dans laquelle elles sont comprises, et que la même chose n'a pas lieu à l'égard des secondes, qui expriment des relations incompatibles avec celles que représentent les intégrales générales.

Digitized by Google

Pour que les intégrales [illegible]
définition, qu'elles [illegible]
les avoir éliminées entre [illegible]
que les relations exprim[illegible]

[illegible] te l'intégrale générale de cette dernière par

$$\downarrow\left(\frac{y}{x}\right)$$

Représentons par n [illegible] que l'on donne à la fonction $\downarrow$ cette
naires ou aux différentielles [illegible]
plus grand que n [illegible] $+B\frac{u}{x}$;
équation, et qui [illegible]
elle-même $n-1$ [illegible] équations
dérivées, il faudra [illegible]
que l'intégrale de la même [illegible]
équations obtenues [illegible] ler $z=Ax+By$ comme
arbitraires, afin qu'elles [illegible] donne à la fonction Φ
plus de k' équations.

On satisfait, par exemple, à [illegible]
$z=Ax+By$, équation [illegible]
donne la proposée [illegible] devient
mais elle n'a point la même [illegible]
second ordre, [illegible]

[illegible]

[illegible]

tandis que [illegible]

[illegible] de la
valeurs qui satisfont [illegible] de a,
qu'un cas particulier. [illegible] lors
Il est aisé de voir, [illegible] ne,
représentée par [illegible] le

(*) Traité du Calcul différentiel [illegible]

Digitized by Google

qui doivent exister entre les variables que l'on considère, et des dérivées de ces mêmes variables d'ordres inférieurs à celui de l'équation donnée, pour que cette équation puisse avoir lieu; je me suis proposé d'arriver directement aux intégrales primitives, et j'ai cru, pour mettre de l'ordre dans le travail que j'ai entrepris, devoir réserver pour un autre mémoire tout ce qui est relatif à cette manière de satisfaire aux équations différentielles, et me borner dans celui-ci à la recherche des intégrales primitives des équations aux différentielles partielles à deux variables indépendantes. Il ne peut y avoir de dérivées, ni par conséquent d'équations différentielles, qu'autant que les relations qui existent entre les quantités que l'on considère, permettent d'en faire varier une ou plusieurs à volonté, sans que ces relations cessent d'avoir lieu. Dans le premier cas, il n'y a qu'une variable indépendante dont toutes les autres sont des fonctions; c'est celui des équations aux différentielles ordinaires : dans le second, le nombre des variables indépendantes est déterminé par la nature de la question, et les équations sont aux différentielles partielles : dans l'un et l'autre cas, on peut toujours prendre à volonté la variable ou les variables qu'on regarde comme indépendantes. Pour qu'une intégrale soit générale, il faut qu'il n'en résulte entre les variables que l'on considère et leurs dérivées à l'infini, que les relations exprimées par l'équation donnée, et par les équations qu'on en déduit en la différenciant.

Les intégrales et les solutions particulières, en même temps qu'elles établissent ces relations entre les variables et leurs dérivées, en établissent d'autres étrangères à la question, et elles n'en représentent par conséquent que des cas particuliers.

On distingue les intégrales particulières des solutions particulières, en ce que les premières peuvent être complétées de manière à produire une intégrale générale dans laquelle elles sont comprises, et que la même chose n'a pas lieu à l'égard des secondes, qui expriment des relations incompatibles avec celles que représentent les intégrales générales.

Digitized by Google

Pour que les intégrales puissent être générales, il faut, d'après cette définition, qu'elles contiennent des quantités arbitraires, afin qu'après les avoir éliminées entre l'intégrale et ses dérivées à l'infini, il ne reste que les relations exprimées par l'équation donnée et par ses dérivées.

Représentons par m l'ordre d'une équation aux différentielles ordinaires ou aux différentielles partielles, et par n un nombre quelconque plus grand que m; si l'on différencie n fois l'intégrale primitive de cette équation, et qu'il en résulte h équations, si on la différencie ensuite elle-même $n-m$ fois, et qu'il en résulte h' équations entre les mêmes dérivées, il faudra, d'après l'observation que nous venons de faire, pour que l'intégrale ait la même généralité que l'équation donnée, que les h équations obtenues dans la première opération contiennent $h-h'$ arbitraires, afin qu'après l'élimination de ces arbitraires, il ne reste pas plus de h' équations.

On satisfait, par exemple, à l'équation $px+qy=z$ (*), en prenant $z=Ax+By$, équation qui contient deux constantes arbitraires, et qui donne la proposée lorsqu'on les élimine entre elle et ses deux dérivées; mais elle n'a point la même généralité, puisqu'en passant seulement au second ordre, $px+qy=z$ ne donne que ces deu xrelations,

$$xr+ys=0,$$
$$xs+yt=0,$$

tandis que $z=Ax+By$ donne

$$r=0, \quad s=0, \quad t=0;$$

valeurs qui satisfont à ces deux relations, mais qui n'en expriment qu'un cas particulier.

Il est aisé de voir, d'ailleurs, que les deux intégrales, dont l'une est représentée par $z=x\downarrow \frac{y}{x}$, et l'autre par le système des deux équations

(*) Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral, *tom. II, pag. 684.*

Digitized by Google

$$z = ax + y\varphi a \quad \text{et} \quad x + y\varphi' a = 0;$$

donnent seulement les deux relations

$$xr + ys = 0,$$
$$xs + yt = 0,$$

lorsqu'on élimine les fonctions arbitraires de leurs dérivées du second ordre; car on tire de la première

$$r = \frac{y^2}{x^3}\psi''\frac{y}{x}, \quad s = -\frac{y}{x^2}\psi''\frac{y}{x}; \quad t = \frac{1}{x}\psi''\frac{y}{x};$$

d'où l'on ne peut déduire que ces deux relations et les équations qui en sont une suite nécessaire.

Les deux équations de l'autre intégrale donnent

$$\frac{da}{dx} = -\frac{1}{y\varphi'' a},$$
$$\frac{da}{dy} = -\frac{\varphi' a}{y\varphi'' a} = \frac{x}{y^2\varphi'' a},$$
$$p = a, \quad q = \varphi a,$$

d'où il est aisé de conclure

$$r = -\frac{1}{y\varphi'' a}, \quad s = \frac{x}{y^2\varphi'' a}; \quad t = -\frac{x^2}{y^3\varphi'' a};$$

d'où résultent seulement entre r, s, t, les deux mêmes relations.

L'équation $z = Ax + By$, qui donne en outre $r = 0$, ne peut donc être qu'une intégrale ou une solution particulière de l'équation

$$px + qy = z.$$

D'après la théorie que M. *Lagrange* a donnée de cette sorte d'équations primitives, qu'il nomme *intégrales complètes*, il semble qu'on ne peut considérer $z = Ax + By$ comme une intégrale particulière de

$$px + qy = z,$$

que

Digitized by Google

que dans le cas où l'on représente l'intégrale générale de cette dernière par

$$z = x\downarrow\left(\frac{y}{x}\right)$$

dont elle résulte évidemment, lorsque l'on donne à la fonction $\downarrow$ cette forme particulière,

$$\downarrow\left(\frac{y}{x}\right) = A + B\frac{y}{x};$$

mais qu'en prenant le système des deux équations

$$z = \alpha x + y\varphi\alpha,$$
$$x + y\varphi'\alpha' = 0,$$

pour l'intégrale générale, on ne peut plus regarder $z = Ax + By$ comme une intégrale particulière, parce que, lorsqu'on donne à la fonction φ cette forme,

$$\varphi\alpha = B + K(\alpha - A),$$

qui y correspond, le système de ces deux équations devient

$$z = \alpha x + By + Ky(\alpha - A)$$

et

$$x + Ky = 0,$$

dont la seconde réduit bien la première à

$$z = Ax + By;$$

mais non pas comme il arrive pour toutes les autres formes de la fonction φ par l'élimination de α, à cause qu'il ne reste point de α dans la seconde équation. C'est l'élimination de k qui remplace alors celle de α: cependant comme le reste du calcul est absolument le même, et que k est entièrement arbitraire aussi bien que α, il me semble qu'on doit toujours regarder les équations primitives, telles que

$$z = Ax + By,$$

Digitized by Google

auxquelles M. *Lagrange* a donné le nom d'intégrales complètes, comme des intégrales particulières. On voit, en effet, dans l'exemple précédent, que $z = Ax + By$ se déduit également de l'intégrale générale représentée par $z = x\downarrow\left(\frac{y}{x}\right)$, lorsqu'on prend $\downarrow\frac{y}{x} = A + B\frac{y}{x}$, et de la même intégrale représentée par les deux équations

$$z = \alpha x + y\varphi\alpha,$$

$$x + y\varphi'\alpha = 0,$$

lorsqu'on prend

$$\varphi\alpha = B + K(\alpha - A).$$

Voyons maintenant comment on peut en général satisfaire à la condition que les h équations déduites de l'intégrale primitive par n différenciations, contiennent $h - h'$ arbitraires, et observons que h équations peuvent bien se réduire à h' équations, soit qu'il y ait $h - h'$ arbitraires, soit qu'il y ait plus, mais jamais quand il y a moins.

S'il n'y a qu'une seule variable indépendante, on n'obtiendra par la différenciation qu'une seule équation nouvelle d'une équation déjà obtenue, lorsqu'on passera d'un ordre de différentielles à l'ordre suivant. L'intégrale primitive pouvant toujours, dans ce cas, être exprimée par une seule équation, on aura donc

$$h = n + 1, \qquad h' = n - m + 1,$$

ce qui donne $h - h' = m$; il faudra donc un nombre $= m$, et par conséquent constant, de quantités arbitraires dans l'intégrale primitive, et les équations qu'on en déduit par la différenciation. On satisfera à cette condition par m constantes arbitraires, et on n'aura jamais à éliminer entre l'intégrale et ses dérivées que ces m constantes, parce que les différenciations ne peuvent que faire évanouir celles qui ne sont multipliées par aucune quantité variable dans l'intégrale, ou dans l'équation qui résulte des différenciations précédentes, et non en introduire de nouvelles.

Digitized by Google

Mais, lorsque l'équation donnée est aux différentielles partielles, le nombre $h - h'$ va en augmentant à l'infini avec celui des différenciations; d'où il suit qu'une équation primitive qui y satisferait et qui ne contiendrait qu'un nombre fini d'arbitraires constantes, ne pourrait jamais en être une intégrale générale. Par exemple, dans le cas où il y a seulement deux variables indépendantes, et où l'intégrale primitive est représentée par une seule équation, en z, en différenciant n fois cette intégrale,

$$h = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

pour le nombre des équations qui en résultent, et en différenciant $n - m$ fois l'équation donnée,

$$h' = \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2}$$

pour celui des équations résultant de ses différenciations : le nombre des arbitraires à éliminer ne pourra donc, pour que l'intégrale soit générale, être moindre que

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n+1-m)(n+2-m)}{2} = m\,\frac{2n+3}{2} - \frac{m^2}{2}$$

$$= m(n+1) - \frac{m(m-1)}{2},$$

qui croît à l'infini avec n.

Toute intégrale d'une équation aux différentielles partielles qui n'est pas composée d'un nombre infini de termes, ne peut donc être générale, à moins qu'elle ne contienne des arbitraires dont le nombre augmente lorsqu'on différencie.

Il y a dans l'état actuel de l'analyse deux sortes d'expressions qui jouissent de cette propriété, les *fonctions arbitraires* et les *intégrales partielles* contenant des fonctions arbitraires.

Je me sers de la dénomination d'intégrales partielles dans le même sens qu'on emploie celle de différentielles partielles, pour désigner les intégrales des fonctions de plusieurs quantités x, y, z, &c. prises en ne

Digitized by Google

considérant comme variable que celle dont la différentielle se trouve sous le signe d'intégration. Ainsi l'intégrale partielle de $(z + xy)dx$, prise depuis $x = 0$, est $zx + \frac{x^2 y}{2}$, quelque relation qui existe entre x, y, z, tandis que l'intégrale totale de la même fonction suppose entre ces trois quantités deux relations, en vertu desquelles y et z soient fonctions de x; ce sera, par exemple, en prenant de même cette intégrale depuis $x = 0$,

$$\frac{x^4}{4} + \frac{a x^2}{2} + b l \left(1 + \frac{x}{c}\right),$$

si l'on a

$$z = x^3 \quad \text{et} \quad y = a + \frac{b}{x^2 + cx},$$

au lieu que l'intégrale partielle deviendrait par la substitution de ces valeurs,

$$x^4 + \frac{a x^2}{2} + \frac{bx}{2(x + c)}.$$

Je distinguerai donc d'abord deux sortes de quantités arbitraires dans les intégrales primitives des équations aux différentielles partielles, les fonctions arbitraires dégagées de tout signe d'intégration, ou qui ne se trouvent sous un tel signe qu'avec des constantes, la quantité dont elles sont composées et la différentielle de cette quantité, ce qui ne constitue pas une intégrale partielle, parce que ces intégrales doivent alors être prises sans regarder comme constante aucune quantité réellement variable d'après la nature de la question qui a conduit à l'équation donnée, et les intégrales partielles contenant des fonctions arbitraires. Ces deux sortes de quantités arbitraires se subdivisent chacune en deux autres : on doit distinguer,

1.° Les fonctions arbitraires que je nommerai *explicites*, et qui sont composées d'une quantité dont la valeur est donnée en fonctions des variables x, y, z, contenues dans l'intégrale primitive;

Digitized by Google

2.° Les fonctions arbitraires que je nommerai *implicites*, et qui sont composées de quantités dont la valeur en fonction de x, y, z, varie avec la forme qu'on donne à volonté à la fonction arbitraire. On sait, par exemple, que le système des deux équations

$$z = (x + a)(y + \varphi a),$$

et

$$y + \varphi a + (x + a)\varphi' a = 0,$$

représente l'intégrale de l'équation

$$z = pq;$$

et il est évident que si l'on prend, par exemple, $\varphi a = a$, ce qui donne pour l'intégrale particulière correspondante,

$$z = -\frac{(y-x)^2}{4},$$

la valeur de a sera $a = -\frac{y+x}{2}$, et que si l'on fait $\varphi a = \frac{1}{a}$, ce qui change l'intégrale en

$$z = (1 + \sqrt{xy})^2,$$

on aura

$$a = \sqrt{\frac{x}{y}},$$

valeur absolument différente de la précédente.

3.° Les intégrales partielles indéfinies qui ne contiennent sous le signe $\int$ que des fonctions explicites ou implicites de x, y, z.

4.° Les intégrales partielles définies où les mêmes variables se trouvent combinées sous le signe $\int$ avec une autre variable indépendante, dont la différentielle multiplie tout ce qui se trouve sous ce signe, qui est considéré comme seule variable dans l'intégration qu'il indique, et dont les valeurs en x, y, z, ou en constantes déterminées, sont données seulement aux deux limites de l'intégrale.

Digitized by Google

On peut diviser les intégrales primitives en plusieurs classes, suivant qu'elles ne renferment qu'une seule de ces différentes espèces de quantités arbitraires, ou qu'elles en renferment de plusieurs espèces. Celles où il ne se trouve pas d'intégrales partielles, de quelque nature que soient d'ailleurs les fonctions arbitraires et les fonctions qui en dérivent par voie de différenciation ou d'intégration non partielle, jouissent de propriétés particulières : et devant, sous plusieurs rapports, être considérées à part, je les réunirai dans une classe, et je les désignerai sous le nom d'*intégrales de la première classe.* Il existe entre les fonctions arbitraires qui ne sont point comprises sous des signes d'intégrations partielles et celles qui en sont affectées, une différence bien remarquable, savoir que, dans le premier cas, une différenciation faite dans l'hypothèse que la quantité dont se compose une fonction arbitraire est constante, ne peut introduire dans le calcul aucune nouvelle arbitraire dérivée de cette fonction; mais que la même opération en introduit au contraire de nouvelles, quand cette fonction est comprise dans une intégrale partielle, parce que les dérivées d'une telle intégrale relativement aux variables qui y sont considérées comme constantes, sont autant d'arbitraires qu'il faut éliminer séparément. Nous verrons dans la suite de ces recherches combien cette différence en met entre les intégrales de la première classe et celles qui contiennent des intégrales partielles. Pour rendre plus simples les considérations qui vont suivre, il faut voir d'abord comment on peut réduire à une même forme les intégrales de différentes espèces, pour que les raisonnemens et les démonstrations relatifs à cette forme s'appliquent indistinctement à toutes les intégrales des équations aux différentielles partielles.

Lorsqu'elles ne contiennent point l'intégrale partielle, on les ramène avec la plus grande facilité à une forme commune qui est celle d'un système d'autant d'équations plus une qu'il y a de quantités différentes dont les fonctions arbitraires de ces intégrales sont composées; c'est sous cette forme que se présentent les intégrales à fonctions implicites, et on y ramène les intégrales à fonctions explicites, en substituant aux

Digitized by Google

quantités dont se composent les fonctions arbitraires des lettres telles que α, β, γ, &c., afin de n'avoir plus qu'une seule lettre sous chaque signe de fonction, et en joignant à l'intégrale, après qu'on y a fait cette substitution, les équations qui donnent les valeurs de ces lettres en fonctions de x, y, z.

C'est ainsi, par exemple, que pour mettre l'intégrale de l'équation

$$r - t - \frac{2p}{x} = 0,$$

qui est, comme on sait,

$$z = \varphi(y+x) - x\varphi'(y+x) + \downarrow(y-x) + x\downarrow'(y-x),$$

sous la forme générale dont nous venons de parler, il suffit de la représenter par le système des trois équations

$$z = \varphi\alpha - x\varphi'\alpha + \downarrow\beta + x\downarrow'\beta,$$
$$y = \frac{\alpha+\beta}{2},$$
$$x = \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Cette forme est sans doute moins simple que celle de la même intégrale représentée par une seule équation; mais elle a l'avantage d'être commune aux intégrales de la première classe, de quelque espèce qu'elles soient; c'est pourquoi je supposerai que toutes les intégrales de cette classe y ont été ramenées, lorsque j'aurai à les considérer d'une manière générale.

On peut aussi donner une forme commune à toutes les intégrales partielles: il faut pour cela, lorsqu'elles sont indéfinies, y introduire une nouvelle quantité u, telle qu'il ne reste plus d'autres différentielles sous le signe $\int$ que celle de cette quantité. L'intégration est alors relative à u seul; mais on ne peut plus la regarder comme indéfinie, parce que u ayant été substitué à une fonction déterminée de x, y, z, doit reprendre au commencement et à la fin de l'intégrale les valeurs

Digitized by Google

que doit y avoir cette fonction, valeurs qui se trouvent ainsi les deux limites de l'intégrale définie relative à u, par laquelle on a remplacé l'intégrale indéfinie.

Avant d'éclaircir cette dernière considération par un exemple, je crois devoir prévenir que j'accompagnerai toute équation où entrera une intégrale définie, de l'indication entre deux crochets, des limites dans lesquelles cette intégrale doit être prise; en sorte que, si l'on a, par exemple,

$$z = F(x, y, u, \int V du),$$

où V peut contenir x, y, u, et que l'intégrale $\int V du$ doive être prise depuis $u = \alpha$ jusqu'à $u = \beta$, j'écrirai cette équation ainsi

$$z = F(x, y, u, \int V du), \quad [u = \alpha, u = \beta].$$

(Je me servirai dans tout ce mémoire, comme on le fait ordinairement, des lettres F, f, f, pour désigner les fonctions déterminées, et je réserverai les lettres grecques φ, χ, ψ, ω, pour l'indication des fonctions arbitraires.)

Il m'a semblé aussi que les calculs qui vont suivre exigeaient que je rappelasse ici, et que je misse sous la forme la plus convenable à ces calculs, une formule sur laquelle repose la différenciation des intégrales partielles.

Si l'on substitue $x + h$ à x dans $\int V du$, $[u = \alpha, u = \beta]$, cette quantité deviendra

$$\int V du + h \int \frac{dV}{dx} du + \frac{h^2}{2} \int \frac{d^2 V}{dx^2} du + \&c.,$$

$$\left[u = \alpha + \frac{d\alpha}{dx} h + \frac{d^2\alpha}{dx^2} \cdot \frac{h}{2} + \&c., \; u = \beta + \frac{d\beta}{dx} h + \frac{d^2\beta}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{2} + \&c.\right]$$

Pour connaître le changement qu'éprouve $\int V du$, $[u = a, u = \beta]$, en devenant

$$\int V du, \left[u = \alpha + \frac{d\alpha}{dx} h + \&c., \quad u = \beta + \frac{d\beta}{dx} h + \&c.,\right]$$

premier

premier terme de cette valeur, on remarquera que si l'on représente $\int V du$ considérée comme indéfinie par $f(x, y, u)$, la première intégrale définie $\int V du$, $[u = \alpha, u = \beta]$, sera représentée par

$$f(x, y, \beta) - f(x, y, \alpha),$$

la seconde par

$$f\left(x, y, \beta + \frac{d\beta}{dx} h + \&c.\right) - f\left(x, y, \alpha + \frac{d\alpha}{dx} h + \&c.\right)$$

$$= f(x, y, \beta) - f(x, y, \alpha) + \frac{df(x, y, \beta)}{d\beta} \cdot \frac{d\beta}{dx} h - \frac{df(x, y, \alpha)}{d\alpha}$$

$$\frac{d\alpha}{dx} h + \&c. = \int V du + V_\beta \frac{d\beta}{dx} h - V_\alpha \frac{d\alpha}{dx} h + \&c. [u = \alpha, u = \beta];$$

en désignant par V_α et V_β ce que devient $V = \frac{df(x, y, u)}{du}$; quand on y met successivement α et β à la place de u; on aura donc pour la valeur que prend $\int V du$ $[u = \alpha, u = \beta]$, quand x devient $x + h$,

$$\int V du + h\left(V_\beta \frac{d\beta}{dx} - V_\alpha \frac{d\alpha}{dx}\right) + \&c. + h \int \frac{dV}{dx} du$$

$$+ h^2 \left(\frac{dV_\beta}{dx} \cdot \frac{d\beta}{dx} - \frac{dV_\alpha}{dx} \cdot \frac{d\alpha}{dx}\right) + \&c. [u = \alpha, u = \beta],$$

et pour le coefficient $\frac{df V du, [u = \alpha, u = \beta]}{dx}$ de h dans cette valeur,

$$\frac{df V du}{dx} = V_\beta \frac{d\beta}{dx} - V_\alpha \frac{d\alpha}{dx} + \int \frac{dV}{dx} du, [u = \alpha, u = \beta];$$

on démontrera de même que

$$\frac{df V du}{dy} = V_\beta \frac{d\beta}{dy} - V_\alpha \frac{d\alpha}{dy} + \int \frac{dV}{dy} du, [u = \alpha, u = \beta].$$

Si nous prenons maintenant pour exemple de la transformation dont nous avons parlé tout-à-l'heure, l'intégrale de

Digitized by Google

$$r - t + \frac{4p}{x+y} = 0,$$

telle qu'on la trouve dans le *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral* de M. *Lacroix*, art. 757, et que nous y écrivions,

$$2\Phi(a - 2x) \quad \text{au lieu de} \quad \Phi(a - 2x),$$

pour éviter les fractions, nous aurons

$$z = e^{-\frac{2x}{a}}\left(\int e^{\frac{2x}{a}} \frac{2dx}{a} \Phi(a - 2x) + \downarrow a\right),$$

où a est une constante pendant l'intégration, qu'il faut, après cette opération, remplacer par $x+y$.

Pour exprimer cette condition, d'après la notation dont nous sommes convenus, on fera $u = \frac{2x}{a}$; d'où

$$du = \frac{2dx}{a} \quad \text{et} \quad a - 2x = a(1 - u),$$

ce qui la changera en

$$z = e^{-\frac{2x}{a}}\left(\int e^{u} du \Phi[a(1-u)] + \downarrow a\right),$$

où l'on peut remplacer a par $x+y$, en considérant le signe $\int$ de cette intégrale comme se rapportant à u, ainsi qu'on le suppose toujours dans les intégrales partielles, puisque c'est la différentielle du qui est sous ce signe: on aura donc

$$z = e^{-\frac{2x}{x+y}}\left(\int e^{u} du \Phi[(x+y)(1-u)] + \downarrow (x+y)\right).$$

La limite supérieure de cette intégrale est $u = \frac{2x}{x+y}$; quant à la limite inférieure, pour qu'il n'en résulte aucun terme dans les dérivées de z qui l'empêche de satisfaire à l'équation donnée, il faut qu'elle soit constante dans l'hypothèse de relation entre x et y, d'après laquelle l'intégrale a été prise: toute fonction de $x+y$ satisfera à cette condition; en sorte que les limites seront

Digitized by Google

$$u = \varpi(x+y) \quad \text{et} \quad u = \frac{2x}{x+y}.$$

Si l'on représente, pour un moment,

$$\int e^u du\, \Phi[(x+y)(1-u)] \quad \text{par} \quad F(x+y, U),$$

où F est une fonction en partie déterminée, lorsque cette intégration est prise, par exemple, de $u = 0$ à $u = U$, on aura

$$F\left(x+y, \frac{2x}{x+y}\right) - F\left(x+y, \varpi(x+y)\right)$$

pour la valeur de cette intégrale prise entre les limites $\varpi(x+y)$ et $\frac{2x}{x+y}$; le second terme de cette valeur sera une fonction entièrement arbitraire de $x+y$, puisque ϖ en est une : la quantité $\Phi(x+y)$, qui est ajoutée à

$$\int e^u du\, \Phi[(x+y)(1-u)],$$

pourra donc être comprise dans $F(x+y, \varpi(x+y))$, en laissant ϖ arbitraire. On conservera ainsi à l'intégrale précédente toute sa généralité, en supprimant le terme $\varphi(x+y)$, et en écrivant les limites comme il suit, d'après la notation dont nous sommes convenus,

$$z = e^{-\frac{2x}{x+y}} \int e^u du\, \Phi[(x+y)(1-u)], \left[u = \varpi(x+y),\ u = \frac{2x}{x+y}\right].$$

Pour vérifier cette intégrale, on aura recours aux valeurs que nous avons trouvées pour $\frac{d\int V du}{dx}$, $[u = \alpha,\ u = \beta]$; en la représentant donc par

$$z = e^{-\frac{2x}{x+y}} \int V du, \left[u = \varpi(x+y),\ u = \frac{2x}{x+y}\right],$$

on aura à la première limite ou $\alpha = \varpi(x+y)$,

$$(x+y)(1-\alpha) = \chi(x+y),$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = \varpi'(x+y), \quad \frac{d\alpha}{dy} = \varpi'(x+y),$$

Digitized by Google

et à la seconde ou $\beta = \frac{2x}{x+y}$;

$$(x+y)(1-\beta) = y - x;$$

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{2y}{(x+y)^2}; \quad \frac{d\beta}{dy} = -\frac{2x}{(x+y)^2}.$$

On trouvera ainsi

$$\frac{d\int V du}{dx} = e^{\frac{2x}{x+y}} \frac{2y}{(x+y)^2} \Phi(y-x) - e^{u(x+y)} \chi(x+y)\, \varpi'(x+y) + \int e^u du\,(1-u)\,\Phi'[(x+y)(1-u)],$$

$$\left[u = \varpi(x+y), \quad u = \frac{2x}{x+y}\right],$$

et

$$\frac{d\int V du}{dy} = -e^{\frac{2x}{x+y}} \frac{2x}{(x+y)^2} \Phi(y-x) - e^{u(x+y)} \chi(x+y)\, \varpi'(x+y) + \int e^u du\,(1-u)\,\Phi'[(x+y)(1-u)],$$

$$\left[u = \varpi(x+y), \quad u = \frac{2x}{x+y}\right];$$

mais la valeur de z donne

$$p = -e^{-\frac{2x}{x+y}} \frac{2y}{(x+y)^2} \int V du + e^{-\frac{2x}{x+y}} \frac{d\int V du}{dx};$$

$$q = e^{-\frac{2x}{x+y}} \frac{2x}{(x+y)^2} \int V du + e^{-\frac{2x}{x+y}} \frac{d\int V du}{dy};$$

on aura donc, à cause de $e^{-\frac{2x}{x+y}} \int V du = z$, et en supprimant l'indication des limites, pour abréger,

$$p = -\frac{2yz}{(x+y)^2} + \frac{2y}{(x+y)^2} \Phi(y-x) - e^{\varpi(x+y)} - \frac{2x}{x+y},$$

$$\chi(x+y)\, \varpi'(x+y) + \int e^u du\,(1-u)\,\Phi'[(x+y)(1-u)],$$

Digitized by Google

$$q = \frac{2xz}{(x+y)^2} + \frac{2x}{(x+y)^2}\Phi(y-x) - e^{\gamma}(x-y) - \frac{2x}{x+y},$$
$$\gamma'(x+y) + \int e^{u}\,du(1-u)\,\Phi'[(x+y)(1-u)].$$

En éliminant l'intégrale définie contenue dans ces valeurs, les fonctions arbitraires de $x+y$ disparaîtront en même temps, et l'on aura

$$p + q - \frac{2z}{x+y} = \frac{2\Phi(y-x)}{x+y},$$

d'où l'on tirera immédiatement l'équation donnée

$$r - t + \frac{4p}{x+y} = 0,$$

puisque celle que nous venons d'obtenir en est l'intégrale première, telle qu'elle se trouve dans l'ouvrage cité, au coefficient près, que nous avions ajouté à la fonction arbitraire désignée par Φ, dans la vue de simplifier un peu le calcul.

Au reste, on regarde avec raison la forme d'intégrale indéfinie sous laquelle nous avions l'intégrale de l'équation

$$r - t + \frac{4p}{x+y} = 0,$$

comme plus simple que celle que nous venons de lui donner. Mais cette dernière est la seule sous laquelle on puisse comprendre toutes les intégrales partielles, et cette considération conduit à reconnaître la forme générale qui réunit toutes celles que peuvent affecter les intégrales des équations aux différentielles partielles, connues jusqu'à présent, à l'exception des intégrales en série, dont nous ne nous occupons point dans ces recherches.

Pour se faire une idée nette de cette forme générale, on supposera, 1.° qu'on a représenté par des lettres telles que α, β, γ, &c. les quantités dont se composent les fonctions arbitraires dégagées de signes d'intégration partielle, quantités dont nous supposerons que k désigne le nombre; en sorte que k sera nul, quand il n'y aura dans

Digitized by Google

l'intégrale des fonctions arbitraires que sous des signes d'intégrations partielles ; 2.° qu'on représente par d'autres lettres, par exemple, par u, v, w, &c. les quantités auxquelles se rapportent les signes d'intégration des intégrales partielles $\int U du$, $\int V dv$, &c., soit que ces intégrales soient définies ou indéfinies. Je désignerai le nombre de ces quantités, ou, ce qui est la même chose, le nombre des intégrales partielles indépendantes entre elles, contenu dans l'intégrale primitive, par k'. Il est évident qu'alors l'intégrale primitive sera composée, 1.° de $k+1$ équations, entre lesquelles doivent être éliminées les k quantités α, β, γ, &c., après que les fonctions arbitraires ont été déterminées, et qu'on a exécuté les intégrations partielles ; j'appellerai ces $k'+1$ équations les équations principales de l'intégrale : 2.° de $2k'$ équations donnant pour les k' quantités u, v, w, &c. les deux valeurs que chacune d'elles a aux deux limites de l'intégrale partielle correspondante. Ces $2k'$ équations, que j'écrirai à la suite des premières entre deux crochets d'après la notation convenue, seront désignées dans ce mémoire sous le nom d'*équations accessoires de l'intégrale*. C'est à cette forme générale que je supposerais ramenées toutes les intégrales dans les recherches qui vont suivre.

Parmi les équations principales d'une intégrale primitive, il peut se trouver des équations aux différentielles ordinaires, ramenées par l'élimination à ne contenir que deux variables, et leurs dérivées mutuelles avec une troisième variable qui doit être regardée comme constante pendant l'intégration de ces équations, intégration qui ne peut alors s'effectuer qu'après une détermination particulière des fonctions arbitraires. Dans ce cas, les constantes arbitraires qu'introduira cette intégration doivent être comptées pour autant de fonctions arbitraires de la troisième variable. Au reste, cette circonstance n'apporte aux considérations dont nous allons nous occuper, que des modifications si légères et si faciles à suppléer, que je ne crois pas devoir m'y arrêter.

Digitized by Google

§. II.

Considérations sur la manière dont les Différenciations successives introduisent dans le Calcul de Nouvelles arbitraires dérivées des Fonctions arbitraires contenues dans une Intégrale quelconque, lorsque ces Fonctions n'y entrent point sous des signes d'Intégration partielle.

En partant d'un système de $k+1$ équations principales, composant une intégrale primitive, et en passant aux dérivées du premier ordre, on aura $2(k+1)$ équations de cet ordre, dans lesquelles, outre les quantités contenues dans l'intégrale, se trouveront p, q et $2k$, quantités telles que

$$\frac{d\alpha}{dx}, \quad \frac{d\alpha}{dy}, \quad \frac{d\beta}{dy}, \quad \frac{d\beta}{dx}, \quad \&c. ;$$

en sorte qu'après avoir éliminé ces quantités, il restera deux équations qui donneront les valeurs de p et de q. Les équations dérivées du second ordre seront au nombre de $3(k+1)$, et contiendront en outre r, s, t et $3k$ quantités telles que

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2}, \quad \frac{d^2\alpha}{dx\,dy}, \quad \frac{d^2\alpha}{dy^2}, \quad \frac{d^2\beta}{dx^2}, \quad \frac{d^2\beta}{dx\,dy}, \quad \frac{d^2\beta}{dy^2}, \quad \&c. ;$$

en sorte qu'après les avoir éliminées et avoir remplacé

$$p, \; q, \; \frac{d\alpha}{dx}, \quad \frac{d\alpha}{dy}, \quad \frac{d\beta}{dx}, \quad \frac{d\beta}{dy}, \quad \&c. ,$$

par les valeurs déjà trouvées pour ces quantités, on aura trois équations qui donneront celles de r, s, t.

En continuant ces opérations jusqu'à l'ordre quelconque n, on déterminera des valeurs de toutes les dérivées de z jusqu'à cet ordre, qui ne renfermeront que les quantités contenues dans l'intégrale, à l'exception des nouvelles fonctions arbitraires dérivées de celles de l'intégrale.

Digitized by Google

Il est évident qu'en continuant suffisamment les différenciations, il s'en présentera nécessairement dans les dérivées de z; et sans cela d'ailleurs les intégrales, d'après ce que nous avons dit, ne pourraient pas plus être générales que si elles ne contenaient qu'un nombre fini de constantes arbitraires : mais cette introduction de nouvelles fonctions arbitraires peut n'avoir pas lieu dans les valeurs des premières dérivées de z, parce que l'élimination de

$$\frac{d\alpha}{dx}, \frac{d\alpha}{dy}, \frac{d\beta}{dx}, \frac{d\beta}{dy}, \text{ \&c. } \frac{d^2\alpha}{dx^2}, \frac{d^2\alpha}{dx\,dy}, \frac{d^2\alpha}{dx^2}, \frac{d^2\beta}{dx^2}, \text{ \&c.;}$$

peut faire disparaître celles qui résulteraient des premières différenciations.

Si l'on a, par exemple, le système de ces deux équations,

$$z = \alpha\sqrt{(x^2 - b^2)} + (2\Phi\alpha - \alpha\Phi'\alpha)\,x,$$

$$y = \frac{\sqrt{(x^2 - b^2)} + x\varphi'\alpha}{\alpha},$$

on en tirera

$$p = \frac{\alpha x}{\sqrt{(x^2-b^2)}} + 2\Phi\alpha - \alpha\Phi'\alpha + [\sqrt{(x^2-b^2)} + (\Phi'\alpha - \alpha\Phi''\alpha)x]\frac{d\alpha}{dx};$$

$$q = [\sqrt{(x^2 - b^2)} + (\Phi'\alpha - \alpha\Phi'')\,x]\frac{d\alpha}{dy};$$

$$0 = \frac{x}{\alpha\sqrt{(x^2-b^2)}} + \frac{\varphi'\alpha}{\alpha} + \frac{\alpha x\varphi''\alpha - \sqrt{(x^2 - b^2)} - x\varphi'\alpha}{\alpha^2} \cdot \frac{d\alpha}{dx},$$

$$1 = \frac{\alpha x\varphi''\alpha - \sqrt{(x^2 - b^2)} - x\varphi'\alpha}{\alpha^2} \cdot \frac{d\alpha}{dy};$$

ainsi,

$$\frac{d\alpha}{dx} \frac{\frac{\alpha x}{\sqrt{(x^2 - b^2)}} + \alpha\varphi'\alpha}{\sqrt{(x^2 - b^2)} + x(\varphi'\alpha - \alpha\varphi''\alpha)};$$

$$\frac{d\alpha}{dy} = -\frac{\alpha^2}{\sqrt{(x^2 - b^2)} + x(\varphi'\alpha - \alpha\varphi''\alpha)},$$

p

$$p = \frac{2\alpha x}{\sqrt{(x^2 - b^2)}} + 2\Phi\alpha,$$

$$q = -\alpha^2,$$

où les valeurs de p et de q ne contiennent aucune nouvelle fonction arbitraire.

A l'égard du système de deux équations que nous avons pris pour exemple, il est évident que c'est l'intégrale complète de l'équation du premier ordre qu'on obtiendrait en éliminant α, $\Phi\alpha$ et $\Phi'\alpha$ entre les quatre équations qui fournissent les valeurs de y, z, p, q.

Il est facile, dans cet exemple, de transformer ce système en un autre dont une équation soit la dérivée de l'autre relativement à α seul; on trouverait

$$z + \alpha^2 y = 2\alpha\sqrt{(x^2 - b^2)} + 2x\Phi\alpha,$$

$$\alpha y = \sqrt{(x^2 - b^2)} + x\Phi'\alpha;$$

mais ce n'est pas ici le lieu de montrer comment on doit s'y prendre pour faire en général cette transformation de la manière la plus simple, et d'examiner si elle est toujours possible. Nous reviendrons sur cette question dans un des paragraphes suivans.

Pour résoudre toutes les questions qu'on peut se proposer sur la manière dont les nouvelles fonctions arbitraires naissent des différenciations, nous nommerons α la quantité dont une des fonctions arbitraires est composée, et nous supposerons que α ne dépend ni de x seul, ni de y seul, nous réservant d'examiner ensuite le cas où l'intégrale contient une ou plusieurs fonctions de x seul, ou de y seul; alors nous pourrons prendre α pour l'une des deux variables indépendantes, l'autre étant l'une des deux qui l'étaient auparavant, x ou y: si c'est, par exemple, x que nous prenions avec α pour les deux variables indépendantes, y sera, comme toutes les autres quantités qui entrent dans l'intégrale primitive, une fonction de x et de α, le nombre des autres quantités, β, γ, &c. dont se composent

Digitized by Google

les fonctions arbitraires étant $k-1$. En y joignant y et z, on aura $k+1$ fonctions de x et de α; et comme l'intégrale se compose de $k+1$, et donne en la différenciant dans cette hypothèse, $2(k+1)$ équations, on pourra tirer de celles-ci les valeurs de

$$\frac{dy}{dx}, \frac{dy}{d\alpha}, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{d\alpha}, \frac{d\beta}{dx}, \frac{d\beta}{d\alpha}, \frac{d\gamma}{dx}, \frac{d\gamma}{d\alpha}, \text{ \&c.}$$

On pourait aussi, en différenciant dans la même hypothèse les valeurs de p, q, r, s, &c. dont nous venons de parler, et en éliminant

$$\frac{dy}{dx}, \frac{dy}{d\alpha}, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{d\alpha}, \frac{d\beta}{dx}, \frac{d\beta}{d\alpha}, \frac{d\gamma}{dx}, \frac{d\gamma}{d\alpha}, \text{ \&c.},$$

trouver les valeurs de

$$\frac{dp}{dx}, \frac{dp}{d\alpha}, \frac{dq}{dx}, \frac{dq}{d\alpha}, \frac{dr}{dx}, \frac{dr}{d\alpha}, \text{ \&c.}$$

Ces dérivées relatives à x et α, auront avec celles de z, par rapport à x et y, dont elles sont déduites, des relations dont nous allons nous occuper; mais comme elles se trouveront souvent mêlées, dans le cours de ce mémoire, avec des dérivées prises dans d'autres hypothèses, je me suis vu forcé d'adopter une notation, à l'aide de laquelle je pusse distinguer les dérivées prises dans différentes hypothèses de différenciation; si u est une des quantités qui entrent dans l'intégrale ou dans ses dérivées, $\frac{du}{dx(\alpha}$ et $\frac{du}{d\alpha(x}$ (*) exprimeront les dérivées de u relatives à x et α; et $\frac{du}{dx(y}$, $\frac{du}{dy(x}$, les dérivées de u, quand x et y sont les variables indépendantes.

(*) Je pouvais d'autant moins me passer de cette distinction entre les deux dérivées que je représente par $\frac{du}{dx(\alpha}$ et $\frac{du}{dx(y}$, que, d'après la notation ordinaire, elles sont exprimées par le même signe, quoique de valeurs différentes, et que j'aurai souvent à écrire dans ce mémoire des équations où des dérivées de ce genre entrent à-la-fois. A l'égard des différentielles prises en considérant comme indépendantes toutes les quantités qui entrent dans une expression algébrique, je les désignerai en en renfermant l'expression entre deux pa-

Digitized by Google

Cette notation convenue, supposons qu'une nouvelle fonction de α, produite par les différenciations successives de l'intégrale primitive, commence à paraître pour la première fois dans une des dérivées de z de l'ordre n; nommons u et v les deux dérivées correspondantes de l'ordre immédiatement inférieur $n-1$, en sorte que cette dérivée soit également représentée par $\frac{du}{dx(y}$ et par $\frac{dv}{dx(y}$; je dis que cette nouvelle fonction se trouvera aussi dans les valeurs des deux dérivées de l'ordre n, dont l'une la précède et l'autre la suit, et qui sont représentées, la première par $\frac{du}{dx(y}$, la seconde par $\frac{dv}{dy(x}$.

Pour le démontrer, je remarquerai,

1.° Que, puisqu'on suppose que cette nouvelle fonction n'a point paru dans les équations qu'on a dérivées successivement de l'intégrale jusqu'à l'ordre $n-1$, ni à plus forte raison dans celle dont se compose cette intégrale, elle n'entrera ni dans les valeurs de u et de v tirées des premières, ni dans celles de y tirées des secondes, ni par conséquent

---

renthèses; en sorte que si v est par exemple une fonction de x, y, z, a et $\varphi\alpha$, l'expression de $\frac{dv}{dx(\alpha}$ représentera la quantité

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right)\frac{dy}{dx(\alpha} + \left(\frac{dv}{dz}\right)\frac{dz}{dx(\alpha},$$

$\frac{dv}{d\alpha(x}$ la quantité

$$\left(\frac{dv}{dy}\right)\frac{dy}{d\alpha(x} + \left(\frac{dv}{dz}\right)\frac{dz}{d\alpha(x} + \left(\frac{dv}{d\alpha}\right) + \left(\frac{dv}{d\varphi}\right)\varphi'\alpha,$$

tandis que $\frac{dv}{dx(y}$ représentera

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dz}\right)\frac{dz}{dx(y} + \left[\left(\frac{dv}{d\alpha}\right) + \left(\frac{dv}{d\varphi}\right)\varphi'\alpha\right]\frac{d\alpha}{dx(y},$$

et $\frac{dv}{dy(x}$ la quantité

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dv}{dz}\right)\frac{dz}{dy(x} + \left[\left(\frac{dv}{d\alpha}\right) + \left(\frac{dv}{d\varphi}\right)\varphi'\alpha\right]\frac{d\alpha}{dy(x}.$$

Digitized by Google

dans les valeurs de $\frac{du}{dx\,(\alpha}$, $\frac{dv}{dx\,(\alpha}$, $\frac{dy}{dx\,(\alpha}$, puisqu'elles résultent de différenciations où α est considéré comme constant, et où toutes les fonctions de cette quantité se comportent, par conséquent, comme des constantes ;

2.° Que la dérivée $\frac{dy}{dx\,(\alpha}$ ne pourra être ni nulle ni infinie; car si elle était nulle, on aurait $y = \varphi\alpha$, et toute fonction arbitraire de α le serait aussi de y seul, ce qui est contre la supposition ; et si elle était infinie, on aurait, à cause que $\frac{dy}{dx\,(\alpha} = \frac{1}{\frac{dx}{dy\,(\alpha}}$, y et α étant considérées dans cette dernière dérivée comme les deux variables indépendantes, l'équation $\frac{dx}{dy\,(\alpha} = 0$, d'où l'on tirerait $x = \downarrow\alpha$; en sorte que toute fonction de α le serait de x seul, ce qui est encore contraire à la supposition.

Cela posé, la différentielle totale de u étant également représentée par

$$\frac{du}{dx\,(\alpha}\,dx + \frac{du}{d\alpha\,(x}\,d\alpha$$

et par

$$\frac{du}{dx\,(y}\,dx + \frac{du}{dy\,(x}\left(\frac{dy}{dx\,(\alpha}\,dx + \frac{dy}{d\alpha\,(x}\,d\alpha\right);$$

ces deux expressions seront égales; et comme on sait par la théorie des différenciations où l'on ne suppose qu'une variable indépendante, que

$$\frac{du}{d\alpha\,(x} = \frac{du}{dy\,(x} \cdot \frac{dy}{d\alpha\,(x},$$

on aura l'équation

$$\frac{du}{dx\,(y} = \frac{du}{dx\,(\alpha} - \frac{du}{dy\,(x} \cdot \frac{dy}{dx\,(\alpha}.$$

Puisque $\frac{dy}{dx\,(\alpha}$ ne peut être nul, et que la nouvelle fonction qu'on suppose se trouver dans la valeur de $\frac{du}{dy\,(x}$, n'entre ni dans $\frac{du}{dx\,(\alpha}$

Digitized by Google

ni dans $\frac{dy}{dx(\alpha}$, il faudra nécessairement, en vertu de cette équation, qu'elle soit contenue dans la valeur de $\frac{du}{dx(y}$.

On trouvera de la même manière une équation toute semblable à l'égard de v, d'où l'on conclura que

$$\frac{dv}{dy(x} = \frac{1}{\frac{dy}{dx(\alpha}}\left[\frac{dv}{dx(\alpha} \quad \frac{dv}{dx(y}\right],$$

et puisque $\frac{dy}{dx(\alpha}$ ne peut être ni nulle ni infinie, la nouvelle fonction de α qui entre dans la valeur de $\frac{dv}{d\alpha(x}$, et non dans celle de $\frac{dv}{dx(\alpha}$ et de $\frac{dy}{dx(\alpha}$, entrera nécessairement dans la valeur de $\frac{dv}{dy(x}$.

Puisqu'une nouvelle fonction de α non contenue dans les valeurs des dérivées de z d'ordres inférieurs à $\frac{du}{dy(x} = \frac{dv}{dx(y}$, ne peut entrer dans cette dernière, sans se trouver aussi dans la valeur de la dérivée de z du même ordre qui la précède immédiatement $\frac{du}{dx(y}$, on démontrera de même successivement qu'elle se trouve encore dans toutes celles de l'ordre u qui précèdent celle-ci jusqu'à $\frac{d^n z}{dx^n(y}$; et puisqu'elle se trouve aussi nécessairement dans la dérivée suivante $\frac{dv}{dy(x}$, elle se trouvera également dans toutes celles du même ordre n qui suivent cette dernière jusqu'à $\frac{d^n z}{dy^n(x}$.

Il suit de là que toutes les fois qu'une intégrale primitive contient une fonction arbitraire d'une quantité qui ne dépend ni de x seul ni de y seul, une nouvelle fonction dérivée de celle-là ne peut commencer à paraître dans la valeur d'une des dérivées de z, sans s'être montrée dans les dérivées des ordres précédens, à moins qu'elle n'entre aussi dans les valeurs de toutes les autres dérivées de z du même ordre. D'où résulte la nécessité de la proposition réciproque, que si la valeur d'une

Digitized by Google

dérivée de z d'un certain ordre ne contient que les mêmes fonctions de α qui se trouvent dans les dérivées des ordres inférieurs, toutes les dérivées de z de cet ordre ne contiendront aussi que les mêmes fonctions de α.

Voyons dans quelle circonstance le passage des dérivées de l'ordre $n-1$ à celles de l'ordre z peut avoir lieu sans que les valeurs des dérivées de z de l'ordre n contiennent une nouvelle fonction de α qui ne se trouve pas dans celles des dérivées de l'ordre $n-1$.

En supposant toujours que α ne dépend ni de x seul ni de y seul, $\frac{dy}{d\alpha(x}$ ne peut être ni nul ni infini, puisque $\frac{dy}{d\alpha(x} = 0$ donnerait $y = \gamma x$, ce qui est absurde, et que $\frac{dy}{d\alpha(x} = \frac{1}{0}$, ou $\frac{d\alpha}{dy(x} = 0$, donnerait $\alpha = \downarrow x$, ce qui est contre la supposition. Or, on tire de l'équation $\frac{du}{d\alpha(x} = \frac{du}{dy(x} \cdot \frac{dy}{d\alpha(x}$ cette valeur $\frac{du}{dy(x} = \frac{\frac{du}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}$; et il est évident que les valeurs de $\frac{du}{d\alpha(x}$ et de $\frac{dy}{d\alpha(x}$, déduites de l'intégrale, contiennent chacune une fonction de α qui ne se trouve pas dans les valeurs de u et de y, tirées de la même intégrale; d'où il suit que $\frac{du}{dy(x}$ en contient nécessairement une qui ne se trouve pas dans u, à moins que la nouvelle fonction de α que présentent $\frac{du}{d\alpha(x}$ et $\frac{dy}{d\alpha(x}$, étant la même dans ces deux quantités, n'y entre que dans un facteur commun qui disparaisse de la fraction $\frac{\frac{du}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}$ par la suppression de ce facteur dans son numérateur et dans son dénominateur.

En rapprochant ce résultat de ce que nous avons déjà démontré sur la nécessité que la nouvelle fonction de α, quand α varie à-la-fois avec x et avec y, se présente en même temps dans toutes les dérivées

Digitized by Google

de z de l'ordre n, ou ne se présente dans aucune, on voit qu'il faut nécessairement, pour que les valeurs de ces dérivées ne contiennent que les mêmes fonctions de α qui ont déjà paru dans les précédentes, que les valeurs de toutes les dérivées de z de l'ordre immédiatement inférieur $n-1$, soient telles que les coefficiens de $d\alpha$, dans leurs différentielles prises en regardant x et α comme les deux variables indépendantes, aient un facteur commun avec $\frac{dy}{d\alpha(x}$, où se trouve exclusivement la nouvelle fonction de α, que cette différenciation relative à α introduit nécessairement dans les valeurs de ces coefficiens. Il est aisé, au reste, de démontrer que, si un des coefficiens de $d\alpha$ a un facteur de ce genre commun avec $\frac{dy}{d\alpha(x}$, ce facteur le sera aussi à tous les autres; car il suffit de prouver pour cela que u et v étant toujours deux dérivées consécutives de z de l'ordre $n-1$, tout facteur commun à $\frac{dv}{d\alpha(x}$, qui contient une fonction de α qui ne se trouve ni dans v ni dans y, divise aussi la valeur de $\frac{du}{d\alpha(x}$, et que réciproquement, si ce facteur est commun à $\frac{du}{dx(\alpha}$ et à $\frac{dy}{dx(\alpha}$, il le sera aussi à $\frac{dv}{dx(\alpha}$.

En effet, la fonction de α qui entre dans ce facteur ne se trouvant ni dans v ni dans y, ne pourra entrer non plus dans les valeurs de $\frac{dv}{dx(\alpha}$ et de $\frac{dy}{dx(\alpha}$; ces dernières quantités ne pourront donc contenir ce facteur, ni comme multiplicateur, ni comme dénominateur. Or, comme il résulte des valeurs trouvées précédemment pour

$$\frac{du}{dx(y} \text{ et } \frac{du}{dy(x}, \text{ que } \frac{du}{dy(x} = \frac{\frac{du}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}} \text{ et que}$$

$$\frac{dv}{dx(y} = \frac{dv}{dx(\alpha} - \frac{dv}{dy(x} \cdot \frac{dy}{dx(\alpha} = \frac{dv}{dx(\alpha} - \frac{\frac{dv}{d\alpha(x} \cdot \frac{dy}{dx(\alpha}}{\frac{dy}{d\alpha(x}},$$

Digitized by Google

on a, à cause de $\frac{du}{dy(x} = \frac{dv}{dx(y}$, les équations

$$\frac{du}{d\alpha(x} = \frac{dv}{dx(\alpha} \cdot \frac{dy}{d\alpha(x} - \frac{dv}{d\alpha(x} \cdot \frac{dy}{dx(\alpha},$$

et

$$\frac{dv}{\ldots} = \frac{\frac{dv}{dx(\alpha}}{\frac{dy}{dx(\alpha}} \cdot \frac{dy}{\ldots} - \frac{1}{\frac{dy}{dx(\alpha}} \cdot \frac{du}{d\alpha(x};$$

qui montrent évidemment : la première, que si le facteur dont nous parlons est commun à $\frac{dy}{d\alpha(x}$ et à $\frac{dv}{d\alpha(x}$, il l'est aussi à $\frac{du}{d\alpha(x}$; et la seconde, que s'il est commun à $\frac{dy}{d\alpha(x}$ et à $\frac{du}{d\alpha(x}$, il divisera aussi $\frac{dv}{d\alpha(x}$.

Je ferai dans ce mémoire un usage fréquent de la formule

$$\frac{du}{d\alpha(x} = \frac{dv}{dx(\alpha} \cdot \frac{dy}{d\alpha(x} - \frac{dv}{d\alpha(x} \cdot \frac{dy}{dx(\alpha},$$

qui a toujours lieu entre deux dérivées consécutives de z d'un même ordre, représentées ici par u et v, en y substituant à la place de ces deux lettres, soit p et q, soit r et s, soit s et t, &c.

Lorsque $\frac{du}{d\alpha(x}$ contient ainsi un facteur qui divise aussi $\frac{dy}{d\alpha(x}$; et où se trouve une fonction de α qui n'est contenue ni dans la valeur de u, ni dans celle de y, ni dans celles des dérivées de z jusqu'à l'ordre de u, non-seulement tous les coefficiens de $d\alpha$ dans les différentielles des dérivées de z, du même ordre que u, prises en considérant x et α comme les deux variables indépendantes, sont divisibles (*) exactement par ce facteur ; mais les coefficiens de $d\alpha$ dans

(*) J'entends par-là que le quotient où peuvent d'ailleurs se trouver d'autres fractions, n'en contient point où le diviseur se trouve en dénominateur, et en général ne contient d'aucune manière la nouvelle fonction de α qui se trouve dans ce diviseur.

les

Digitized by Google

les différentielles prises de la même manière des dérivées de z d'ordres inférieurs à celui de u, et de z lui-même, sont aussi nécessairement divisibles par ce facteur.

Il suffit de faire voir, pour cela, que si cette circonstance a lieu, comme nous venons de le démontrer, pour toutes les dérivées de l'ordre $n-1$ qui est celui de u, quand elle a lieu pour n, elle aura aussi nécessairement lieu pour toutes les dérivées de z de l'ordre précédent $n-2$; car n étant indéterminé, le même raisonnement appliqué aux dérivées de z de l'ordre $n-2$ servira à démontrer la même chose de celles de l'ordre $n-3$, et ainsi de suite jusqu'à z.

Soit donc w une dérivée de z de l'ordre $n-2$, $\frac{dw}{dy\,(x}$ en sera une de l'ordre $n-1$, et ne contiendra point, d'après la supposition, la nouvelle fonction de α qui entre dans le facteur supposé commun à $\frac{d\left(\frac{dw}{dy\,(x}\right)}{d\alpha\,(x}$ et à $\frac{dy}{d\alpha\,(x}$; mais on aura

$$\frac{dw}{d\alpha\,(x} = \frac{dw}{dy\,(x} \cdot \frac{dy}{d\alpha\,(x},$$

valeur dans laquelle $\frac{dy}{d\alpha\,(x}$ est divisible par ce facteur; et $\frac{dw}{dy\,(x}$ en est indépendant, puisqu'il ne contient pas la nouvelle fonction de α qui y entre : le produit de ces deux quantités, qui est la valeur de $\frac{dw}{d\alpha\,(x}$, sera donc aussi divisible par le même facteur, et donnera un quotient qui ne pourra contenir la nouvelle fonction de α qui caractérise ce facteur.

Une fois qu'il s'est manifesté dans les dérivées de z de l'ordre n, une fonction de α qui ne se trouve dans aucune des équations composant l'intégrale primitive, et qui dérive par la différenciation d'une de celles que ces équations contiennent, il en vient infailliblement une nouvelle dans les dérivées de l'ordre suivant $n+1$, une nouvelle dans celles de l'ordre $n+2$, et ainsi de suite à l'infini ; la dernière de ces nouvelles

Digitized by Google

fonctions ne pouvant se trouver que dans les dérivées du dernier ordre de ζ, et entrant nécessairement dans toutes celles de cet ordre, d'après ce qui a été démontré précédemment.

En effet, dès qu'on suppose dans u une fonction de α qui n'est contenue dans aucune des équations composant l'intégrale, ni par conséquent dans la valeur de y tirée de cette intégrale, la dérivée de ζ de l'ordre suivant, prise par rapport à y et représentée par

$$\frac{du}{dy\,(x} = \frac{\frac{du}{d\alpha\,(x}}{\frac{dy}{d\alpha\,(x}},$$

contiendra dans son numérateur une nouvelle fonction de α qui sera dérivée par la différenciation de celle qui est dans u, et qui ne pourra se trouver dans le dénominateur, parce que, pour qu'elle fût contenue dans $\frac{dy}{d\alpha\,(x}$, il faudrait que celle dont elle dérive par une différenciation, se trouvât dans y, ce qui est contre la supposition.

Cette nouvelle fonction restera donc nécessairement dans la valeur de $\frac{du}{dy\,(x}$, et en produira par conséquent une autre nouvelle dans

$$\frac{d^2u}{dy^2\,(x} = \frac{\frac{d\left(\frac{du}{dy\,(x}\right)}{d\alpha\,(x}}{\frac{dy}{d\alpha\,(x}},$$

qui ne pourra s'évanouir par la même raison, puisque celle dont elle dérive ne se trouve pas dans la valeur de y.

J'appellerai dérivées homogènes à l'intégrale relativement à α, celles qui ne renferment que des fonctions de α qui se trouvent aussi dans l'intégrale; et dérivées hétérogènes à l'intégrale relativement à α, les dérivées de ζ qui contiennent des fonctions de α qui n'entrent dans aucune des équations de l'intégrale. Observez que, pour que des dérivées soient ce que j'appelle homogènes à l'intégrale, il n'est pas né-

Digitized by Google

cessaire qu'elles contiennent toutes les fonctions de α qui sont dans l'intégrale, mais seulement qu'elles n'en contiennent point qui ne s'y trouvent pas.

Il est aisé de voir, d'après cette définition et les diverses propositions qui viennent d'être démontrées,

1.° Que si $\frac{dz}{dx(y}$, et par conséquent aussi $\frac{dz}{dy(x}$, ne sont pas homogènes à l'intégrale, aucune des dérivées de z ne peut l'être,

2.° Que si une dérivée u de z de l'ordre n, tirée d'une intégrale primitive, est homogène à l'intégrale, toutes les dérivées de z du même ordre et toutes celles des ordres précédens le seront aussi ;

3.° Que quand on est arrivé aux différenciations qui introduisent dans les valeurs des dérivées de z des fonctions de α étrangères aux équations dont se compose l'intégrale, chacune de ces fonctions se présente à-la-fois dans toutes les dérivées de z de l'ordre où elle commence à paraître ;

4.° Qu'alors il y a une nouvelle fonction produite à chaque passage d'un ordre à l'ordre suivant ; en sorte que les dérivées de z hétérogènes à l'intégrale peuvent bien être homogènes entre elles dans un même ordre, mais qu'elles sont nécessairement hétérogènes aux dérivées de l'ordre immédiatement inférieur, puisqu'elles contiennent une fonction de α qui ne peut se trouver dans celles-ci, et à plus forte raison hétérogènes aux dérivées de z des autres ordres précédens.

Je crois devoir remarquer en passant que les premières dérivées de z hétérogènes à l'intégrale présentent dans leur dénominateur $\frac{dy}{d\alpha(x}$ la nouvelle fonction d'où résulte cette hétérogénéité, et qui est précisément celle contenue dans le facteur commun, dont la suppression en haut et en bas la faisait disparaître des valeurs des dérivées homogènes à l'intégrale ; mais une fois que cette nouvelle fonction s'est introduite dans les valeurs des dérivées de z, c'est dans les numérateurs de

Digitized by Google

ces valeurs que se présentent les nouvelles fonctions de α qui rendent les dérivées de chaque ordre hétérogènes aux dérivées de tous les ordres précédens.

Une équation aux différentielles partielles étant donnée, on doit d'abord chercher si elle est susceptible d'avoir une intégrale primitive de la première classe, et commencer par examiner si, dans le cas où elle le serait en effet, les dérivées contenues dans cette équation sont homogenes ou hétérogènes à l'intégrale. C'est à l'égard des dérivées de l'ordre le plus élevé, c'est-à-dire de l'ordre même de l'équation donnée, qu'il convient de faire cette recherche, puisqu'il suit de ce qui vient d'être démontré, que si l'on prouve qu'elles sont nécessairement homogènes à l'intégrale, relativement à quelques-unes des fonctions qui entrent dans cette intégrale, on sera certain que toutes les autres dérivées contenues dans l'équation donnée sont aussi homogènes à l'intégrale relativement aux mêmes fonctions arbitraires. Nous verrons bientôt que l'on peut toujours déterminer par un simple calcul d'élimination exécutée sur une équation aux différentielles partielles donnée, quel doit être, si elle est susceptible d'avoir une intégrale primitive de la première classe, le nombre des fonctions arbitraires contenues dans cette intégrale relativement auxquelles toutes les dérivées contenues dans l'équation donnée sont homogènes à l'intégrale. La distinction de ces deux genres de fonctions arbitraires, et le procédé que nous ferons connaître pour les déterminer séparément par des calculs exécutés sur l'équation donnée, nous sera d'un grand secours dans la recherche des intégrales.

Nous n'avons considéré, dans tout ce que nous venons de dire, que les fonctions composées de quantités qui variaient à-la-fois avec x et avec y, et nous avons vu que, relativement à ces fonctions, les dérivées d'un même ordre étaient nécessairement ou toutes homogènes ou toutes hétérogènes à l'intégrale : il n'en est pas de même quand l'intégrale primitive contient une ou plusieurs fonctions arbitraires formées

Digitized by Google

de qualités qui dépendent de x seul ou de y seul. Relativement à ces fonctions, tout ce que nous venons de démontrer sur la nécessité que les nouvelles fonctions arbitraires commencent à paraître à-la-fois dans toutes les dérivées d'un même ordre, cesse évidemment d'avoir lieu; mais pour qu'il ne reste aucun nuage sur les démonstrations précédentes, il est bon de voir comment cela résulte des formules mêmes sur lesquelles ces démonstrations sont fondées. Supposons donc d'abord que l'intégrale primitive contienne une fonction arbitraire formée d'une quantité qui ne dépende que de y, et représentons-la par $\Phi(fy)$ (*); on pourra faire dans ces formules $\alpha = fy$, ce qui donne

$$y = F\alpha; \quad \frac{dy}{dx(\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dy}{d\alpha(x} = F'\alpha.$$

L'équation

$$\frac{du}{dx(y} = \frac{du}{dx(\alpha} - \frac{du}{dy(x} \cdot \frac{dy}{dx(\alpha},$$

se réduit donc à

$$\frac{du}{dx(y} = \frac{du}{dx(\alpha};$$

qui montre que $\frac{du}{dx(y}$ ne peut contenir la nouvelle fonction arbitraire qui, comme nous l'avons vu, ne peut entrer dans $\frac{du}{dx(\alpha}$; et l'équation

$$\frac{du}{dx(y} = \frac{\frac{du}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}};$$

qui devient

$$\frac{du}{dy(x} = \frac{\frac{du}{d\alpha(x}}{F'\alpha};$$

(*) fy représentant une fonction déterminée de y, et φ étant le signe d'une fonction arbitraire, il est clair que $\varphi(fy)$ est la même chose que ψy; j'ai employé $\varphi(fy)$, parce que le raisonnement est absolument le même qu'en se servant de ψy, et que d'ailleurs si l'équation primitive renfermait $\varphi'(fy)$, $\varphi''(fy)$, &c., la substitution de ψy à $\varphi(fy)$ exigerait des transformations qui pourraient la rendre plus compliquée.

Digitized by Google

montre que cette nouvelle fonction contenue dans $\frac{du}{d\alpha(x}$ reste nécessairement dans $\frac{du}{dy(x}$, puisqu'elle ne peut entrer dans le dénominateur $F'\alpha$, qui est une fonction déterminée de α, ni par conséquent s'évanouir par la suppression d'un facteur commun au numérateur et au dénominateur.

On voit donc par ces formules, comme il est d'ailleurs aisé de s'en assurer sans y avoir recours, que dans le cas que nous examinons ici, $\frac{du}{dx(y}$ ne contient que les mêmes fonctions arbitraires de y qui se trouvent dans u, et que $\frac{du}{dy(x}$ en contient nécessairement une nouvelle.

En supposant que u représente successivement z, p, q, r, s, &c., on en conclura que p, r et toutes les dérivées de z relatives à x seul, ne contiennent que les mêmes fonctions arbitraires de y qui se trouvent dans z; que q en contient une nouvelle, la seule qui puisse entrer dans s et dans toutes les dérivées de z où il n'y a qu'une différenciation relative à y; en sorte que les dérivées résultant des différenciations relatives à x seul, sont toutes homogènes à l'intégrale relativement aux fonctions arbitraires de y seul; qu'aucune autre dérivée de z ne peut l'être; mais que celles où il y a un même nombre de différenciations relatives à y, sont homogènes entre elles à l'égard de ces fonctions.

Si l'on suppose que l'on ait pris x au lieu de y, et y au lieu de x, dans le cas où il y a dans l'intégrale primitive une ou plusieurs fonctions de x seul, on verra sur-le-champ que ce que nous venons de dire des dérivées de z relatives à une de ces deux variables, aura lieu pour celles qui se rapportent à l'autre, et réciproquement.

Les fonctions arbitraires de x seul et de y seul forment ainsi une troisième sorte de fonctions arbitraires; mais nous verrons qu'on les détermine de la même manière que les autres fonctions relativement auxquelles il y a dans l'équation donnée des dérivées de z hétérogènes à l'intégrale.

Digitized by Google

§. III.

Considérations sur le nombre des Fonctions arbitraires qui doivent entrer dans les Intégrales primitives pour qu'elles puissent être générales.

La détermination du nombre des fonctions arbitraires indépendantes entre elles que doivent renfermer les intégrales des équations aux différences partielles, repose, ainsi que nous l'avons déjà dit, sur ce principe, que quand on a h équations qui ne rentrent point les unes dans les autres, et qu'on sait qu'elles n'en doivent pas donner plus de h' par l'élimination des arbitraires, le nombre de ces arbitraires peut bien être plus grand que $h-h'$, parce que plusieurs arbitraires peuvent s'en aller en même temps; mais qu'il ne saurait être moindre, puisque l'élimination de ces arbitraires laisserait alors plus de h' équations. Supposons d'abord que l'intégrale de l'équation donnée appartienne à la première classe. En représentant toujours par h le nombre des équations déduites de l'intégrale primitive par des différenciations successives jusqu'à l'ordre n, et par h' le nombre des équations entre x, y, z, et les mêmes dérivées de z, qu'on tire de l'équation donnée, en la différenciant $n-m$ fois, il est clair que les h équations résultant de la première opération ne peuvent rentrer les unes dans les autres, à l'égard des équations dérivées d'une même équation de l'intégrale primitive, parce que chacune de ces équations contient une dérivée de z qui ne se trouve dans aucune des autres, et à l'égard de celles qui sont dérivées de différentes équations de l'intégrale, parce qu'elles ne pourraient rentrer les unes dans les autres, sans que la même chose n'arrivât aux équations dont elles dérivent.

Pour que l'intégrale primitive n'établisse entre x, y, z et les dérivées de z jusqu'à celles de l'ordre quelconque n, que les relations qu'expriment l'équation donnée et ses dérivées, il faudra donc que le nombre des arbitraires contenues dans les dérivées de l'intégrale primitive ne puisse jamais être plus petit que $h-h'$.

Digitized by Google

Or, en supposant que k désigne toujours le nombre des quantités réellement différentes entre elles, dont les fonctions arbitraires sont composées, il est évident qu'après avoir différencié l'intégrale jusqu'aux dérivées de l'ordre n, relativement à x et à y, on aura

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}(k+1) \text{ équations,}$$

qui contiendront deux sortes de quantités arbitraires à éliminer; savoir:

1.° Les quantités

$$\alpha; \qquad \beta, \qquad \&c.,$$

$$\frac{d\alpha}{dx}, \quad \frac{dy}{dy}; \quad \frac{d\beta}{dx}; \quad \frac{d\beta}{dy}; \qquad \&c.,$$

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2}, \quad \frac{d^2\alpha}{dx\,dy}, \quad \frac{d^2\alpha}{dy^2}; \quad \frac{d^2\beta}{dx^2}, \quad \frac{d^2\beta}{dx\,dy}, \quad \frac{d^2\beta}{dy^2}; \quad \&c.,$$

$$\&c. \qquad \&c.,$$

dont le nombre est $\frac{(n+1)(n+2)}{2}k$;

2.° Les fonctions arbitraires et leurs dérivées : pour en exprimer le nombre de la manière la plus générale, je représenterai par g le nombre des fonctions arbitraires indépendantes entre elles, et par g' celui des fonctions qui en sont dérivées par voie de différenciation ou d'intégration, qui entrent dans l'intégrale, ou qui sont produites par les premières différenciations dans l'intervalle que pourraient laisser entre elles les dérivées de fonctions arbitraires qui s'y trouvent, telles que seraient, par exemple, $\Phi'\alpha$, si l'intégrale contenait $\Phi\alpha$ et $\Phi''\alpha$, ou $\int f(\alpha, \Phi\alpha)d\alpha$, si elle contenait $\iint f(\alpha, \Phi\alpha)d\alpha^2$ et $\Phi\alpha$. Je supposerai enfin, dans le cas où les premières différenciations n'introduisent aucunes nouvelles fonctions arbitraires dérivées, soit de $\Phi\alpha$, soit de $\downarrow\beta$, &c. qu'on désigne par $l+1$ l'ordre des dérivées qui commencent à être hétérogènes à l'intégrale relativement aux fonctions de α, par $l'+1$ l'ordre de celles qui commencent à l'être relativement à celles de β, et ainsi de suite;

en

Digitized by Google

en sorte que $l = 0$, quand p et q sont hétérogènes à l'intégrale relativement à $\varphi\alpha$; $l' = 0$, quand p et q le sont relativement à $\downarrow\beta$, &c. Cela posé, nous avons vu que dès que les différenciations ont introduit dans le calcul une nouvelle arbitraire dérivée de $\varphi\alpha$, par exemple, il s'en produit nécessairement une nouvelle, dérivée aussi de $\varphi\alpha$, chaque fois qu'on passe d'un ordre de différenciations à l'ordre suivant. Il est d'ailleurs évident qu'à l'exception de celles que nous avons comprises dans g', chaque fonction arbitraire indépendante n'en peut produire qu'une pour chaque ordre de différenciations; le nombre de celles qui s'introduiront de cette manière dans le calcul sera donc $n - l$ pour $\varphi\alpha$, $n - l'$ pour $\downarrow\beta$, et ainsi de suite: la somme de ces différens nombres est $gn - l - l' -$ &c. Il faut y ajouter $g + g'$ et le nombre $\frac{(n+1)(n+2)}{2} k$ qui est celui des quantités à éliminer autres que les fonctions arbitraires; on aura ainsi

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} k + g(n+1) + g' - l + l' -$$ &c., quantités

à éliminer entre

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}(k+1)$$ équations.

Il restera donc après cette élimination au moins

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - g(n+1) - g' + l + l' +$$ &c. équations;

et ce nombre ne devra jamais surpasser, quelque grand que soit n, le nombre

$$h = \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - m(n+1) + \frac{m^2 - m}{2},$$

des équations qu'établit entre x, y, z, et les dérivées de z jusqu'à l'ordre n, une équation donnée de l'ordre m; il faut pour cela que

$$g(n+1) + g' - l - l' -$$ &c.

ne soit pas plus petit que

$$m(n+1) - \frac{m(m-1)}{2},$$

Digitized by Google

quel que soit n, c'est-à-dire que l'intégrale primitive ne peut être générale qu'autant que g n'est pas plus petit que

$$m - \frac{\frac{m(m-1)}{2} + g' - l - l' - \&c.}{n+1};$$

ce qui donne $g = m$; car si g était seulement égal à $m - 1$, il suffirait de prendre

$$\frac{m(m-1)}{2} + g' - l - l' - \&c.$$

pour que cette condition ne fût plus satisfaite.

Les intégrales primitives générales de la première classe appartenant à des équations aux différentielles partielles de l'ordre m, exigent donc nécessairement m fonctions arbitraires indépendantes les unes des autres.

En faisant $g = m$, on aura pour le nombre des quantités à éliminer

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} k + m(n+1) + g' - l - l' - \&c.$$

entre $\frac{(n+1)(n+2)}{2}(k+1)$ équations;

mais l'équation donnée, et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n, doivent résulter nécessairement du système qu'on suppose être l'intégrale primitive de cette équation : d'où il suit qu'après l'élimination il doit rester

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - m(n+1) + \frac{m(m-1)}{2} \text{ équations;}$$

ce qui suppose qu'un nombre d'arbitraires égal à

$$\frac{m(m-1)}{2} + g' - l - l' - \&c.$$

disparaissent d'elles-mêmes dans les opérations qu'on exécute pour éliminer les autres. Or ce nombre est toujours nul relativement aux intégrales des équations du premier ordre, parce qu'alors $\frac{m(m-1)}{2} = 0$; que dans le cas où l'équation donnée est linéaire, on a $g = 0$, et que dans celui où elle ne l'est pas et où $\Phi'\alpha$ entre avec $\Phi\alpha$ dans l'intégrale, ce

Digitized by Google

qui donne $g'=1$, on a toujours $l=1$, c'est-à-dire que la première différenciation n'introduit dans le calcul aucune nouvelle fonction arbitraire, comme nous le ferons voir lorsque nous examinerons en particulier les intégrales des équations du premier ordre.

En rendant compte, comme nous venons de le faire, de la nécessité d'admettre dans l'intégrale d'une équation aux différentielles partielles autant de fonctions arbitraires indépendantes les unes des autres qu'il y a d'unités dans l'ordre de cette équation, on voit pourquoi cette condition n'est plus indispensable quand l'intégrale est représentée par une série contenant une infinité de fonctions arbitraires dérivées les unes des autres, qui peuvent suffire à l'élimination, sans qu'il en résulte entre x, y, z et les dérivées de z, plus d'équations qu'il ne faut; on voit aussi pourquoi il peut en être de même quand les fonctions arbitraires se trouvent sous un signe d'intégration partielle. En effet, quand on différencie une intégrale partielle par rapport à x et à y, il en résulte de nouvelles intégrales partielles qui sont en général toutes indépendantes les unes des autres; en sorte que quand elles ne disparaissent pas à-la-fois par quelques circonstances particulières, comme il arrive lorsque les intégrales partielles de l'équation primitive sont indéfinies, elles ne peuvent être éliminées qu'en vertu des relations qui existent entre les valeurs qu'elles prennent à leurs limites.

Le nombre des fonctions arbitraires peut donc alors être moindre que celui qui exprime l'ordre de l'équation donnée, sans que l'intégrale cesse d'être générale; c'est ainsi que

$$z=\int e^{-u^2}\,du\,\varphi(x+2u\sqrt{y}),\ [u=-\infty,\ u=\infty],$$

satisfait à l'équation $r=q$ et à toutes ses dérivées, sans établir entre les dérivées de z aucune autre relation, quelque loin qu'on pousse les différenciations. Quoiqu'elle ne contienne qu'une fonction arbitraire, le nombre des arbitraires qu'il faut éliminer séparément augmente de deux unités, chaque fois qu'on passe d'un ordre de différenciation à l'ordre suivant, précisément comme s'il y avait deux fonctions arbi-

Digitized by Google

traires. Ce nombre augmenterait même davantage, et serait trop grand pour qu'on pût éliminer les arbitraires, si l'intégration par partie ne le réduisait de manière à rendre l'élimination possible, à cause que les termes dégagés du signe $\int$ par cette opération sont nuls aux deux limites de l'intégrale définie.

On a, en effet,

$$p = \int e^{-u^2} du\, \Phi'(x + 2u\sqrt{y}),$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{y}} \int e^{-u^2} u\, du\, \Phi'(x + 2u\sqrt{y}),$$

$$r = \int e^{-u^2} du\, \Phi''(x + 2u\sqrt{y}),$$

$$s = \frac{1}{\sqrt{y}} \int e^{-u^2} u\, du\, \Phi''(x + 2u\sqrt{y}),$$

$$t = -\frac{1}{2y^{\frac{1}{2}}} \int e^{-u^2} u\, du\, \Phi'(x+2u\sqrt{y}) + \frac{1}{y} \int e^{-u^2} u^2 du\, \Phi''(x+2u\sqrt{y}),$$

&c. &c.

où chaque dérivée de z semble au premier coup-d'œil contenir une arbitraire indépendante des autres, ce qui rendrait toute élimination impossible : mais, au moyen des intégrations par partie, et en négligeant les termes qu'elles produisent hors du signe $\int$ comme nuls aux limites, on a

$$p = \int e^{-u^2} du\, \Phi'(x + 2u\sqrt{y}),$$

$$q = \int e^{-u^2} du\, \Phi''(x + 2u\sqrt{y}),$$

$$r = \int e^{-u^2} du\, \Phi''(x + 2u\sqrt{y}),$$

$$s = \int e^{-u^2} du\, \Phi'''(x + 2u\sqrt{y}),$$

$$t = \int e^{-u^2} du\, \Phi^{IV}(x + 2u\sqrt{y}),$$

$$\frac{d^3 z}{dx^3} = \int e^{-u^2} du\, \Phi'''(x + 2u\sqrt{y}),$$

$$\frac{d^3 z}{dx^2\, dy} = \int e^{-u^2} du\, \Phi^{IV}(x + 2u\sqrt{y}),$$

Digitized by Google

et ainsi de suite; ce qui donne $r = q$ et toutes les équations qui en dérivent,

$$\frac{d^3 z}{dx^3} = s, \quad \frac{d^3 z}{dx^2 dy} = t, \quad \&c.,$$

sans pouvoir donner aucune autre relation, puisqu'il est aisé de voir par la forme des valeurs de p, q, r, s, &c. qu'après qu'on a fait subir n différenciations à l'intégrale, on a, dans les $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ équations qui en résultent, un nombre $2n+1$ de quantités à éliminer : cela suffit pour qu'il ne reste que

$$\frac{n^2+3n+2}{2} - 2n - 1 = \frac{n(n-1)}{2} \text{ équations;}$$

ce qui est précisément le nombre $\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2}$ des équations déduites de la proposée par des différenciations poussées jusqu'à l'ordre n, quand on fait $m = 2$, pour exprimer que cette équation est du second ordre. Nous verrons, dans la suite de ces recherches, qu'un grand nombre d'équations de cet ordre ont ainsi des intégrales générales où il n'y a qu'une fonction arbitraire sous un signe d'intégration partielle, et qui fournissent dans les équations dérivées de ces intégrales, quelque loin qu'on pousse la différenciation, précisément autant d'arbitraires à éliminer qu'il en faut pour que ces intégrales soient générales; c'est-à-dire, $2n+1$ arbitraires, lorsqu'il s'agit des équations du second ordre.

Mais ces intégrales ne sont susceptibles de cette généralité qu'à cause que la fonction arbitraire est sous un signe d'intégration partielle. Ainsi, quoique l'intégrale primitive de l'équation du second ordre,

$$r^2 - 2\left(p - \frac{z}{1+x}\right) q r + \left(p - \frac{z}{1+x}\right) y = 0 \text{ (*)},$$

exprimée en intégrale définie, puisse être générale avec une seule fonction arbitraire, l'équation

(*) Voy. le Mémoire sur les *Solutions particulières* par M. *Poisson*, inséré dans le 13.e Cahier de ce Journal, *page 113*.

Digitized by Google

$$z = (1 + x)\,\varphi(y)$$

qui y satisfait avec une fonction arbitraire, n'en est cependant qu'une solution particulière, parce qu'outre la relation entre x, y, p, q, r, exprimée par l'équation du second ordre, elle donne une infinité d'autres relations entre les dérivées de z, telle que celle-ci $z = (1 + x)p$, et toutes celles qu'on en peut tirer par la différenciation. A l'égard des intégrales exprimées par des séries, il est évident qu'on ne peut déterminer *à priori*, par des considérations analogues aux précédentes, le nombre des fonctions arbitraires indépendantes entre elles qu'elles doivent contenir pour être générales, puisqu'on a alors une infinité d'arbitraires à éliminer, et que ces considérations reposent entièrement sur ce que le nombre de ces arbitraires ne saurait être moindre qu'une certaine limite qui croît avec le nombre des différenciations.

§. IV.

Conditions auxquelles doivent satisfaire les Quantités dont se composent les Fonctions arbitraires qui ne sont point comprises dans les Intégrales sous des signes d'Intégrations partielles.

Cette partie de nos recherches est fondée sur les formules par lesquelles on exprime les dérivées de z d'un ordre quelconque n, en fonction des coefficiens de dx et de $d\alpha$ dans les différentielles des dérivées de z de l'ordre $n-1$. Ces formules, qu'il m'a semblé indispensable de rappeler et de démontrer ici, sont indépendantes de la supposition que α est une des quantités dont se composent les fonctions arbitraires de l'intégrale primitive. On peut y regarder α comme une quantité quelconque, fonction explicite ou implicite, ainsi que z, de x et de y. Nous verrons bientôt, lorsqu'on veut prendre pour α dans ces formules une des quantités dont se composent les fonctions arbitraires, comment on doit exprimer cette condition dans le calcul.

α étant une fonction quelconque des deux variables indépendantes

Digitized by Google

x et y, on peut prendre x et α pour indépendantes; et alors y et toutes les autres quantités qui entrent dans le calcul, deviennent, comme nous l'avons déjà remarqué, des fonctions de x et de α. Représentons, pour abréger, les dérivées de z relatives à x et à y :

Dans le premier ordre, par ..... $p, q,$

Dans le second, par ..... $r, s, t,$

Dans l'ordre quelconque $n-1$, par .... $\zeta, \ldots, \theta \ldots, \lambda \ldots, \nu.$

Et dans l'ordre suivant n, par ... $\xi, \pi, \rho, \sigma \ldots \tau, \upsilon, \omega.$

Nous aurons d'abord cette suite d'équations :

$$\omega = \frac{\frac{d\nu}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}, \quad \upsilon = \frac{\frac{d\mu}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}, \quad \tau = \frac{\frac{d\lambda}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}, \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \rho = \frac{\frac{d\eta}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}, \quad \pi = \frac{\frac{d\zeta}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}};$$

quant à ξ, il sera égal à

$$\frac{d\zeta}{dx(\alpha} - \pi \frac{dy}{dx(\alpha}.$$

Si l'on établit maintenant l'équation

$$\frac{du}{d\alpha(x} = \frac{dv}{dx(\alpha} \cdot \frac{dy}{d\alpha(x} - \frac{dv}{d\alpha(x} \cdot \frac{dy}{dx(\alpha},$$

entre toutes les dérivées consécutives de l'ordre $n-1$, considérées deux à deux, on aura

$$\frac{d\mu}{d\alpha(x} = \frac{d\nu}{dx(\alpha} \cdot \frac{dy}{d\alpha(x} - \frac{d\nu}{d\alpha(x} \cdot \frac{dy}{dx(\alpha},$$

$$\frac{d\lambda}{d\alpha(x} = \frac{d\mu}{dx(\alpha} \cdot \frac{dy}{d\alpha(x} - \frac{d\mu}{d\alpha(x} \cdot \frac{dy}{dx(\alpha},$$

Digitized by Google

$$\frac{dx}{d\alpha(x} = \frac{d\lambda}{dx(\alpha} \cdot \frac{dy}{d\alpha(x} - \frac{d\lambda}{d\alpha(x} \cdot \frac{dy}{dx(\alpha},$$

.....

$$\frac{d\zeta}{d\alpha(x} = \frac{d\eta}{dx(\alpha} \cdot \frac{dy}{d\alpha(x} - \frac{d\eta}{d\alpha(x} \cdot \frac{dy}{dx(\alpha},$$

d'où l'on tire cette suite d'équations dont la loi est évidente,

$$\frac{d\mu}{d\alpha(x} = \frac{d\nu}{dx(\alpha} \cdot \frac{dy}{d\alpha(x} - \frac{dy}{dx(\alpha} \cdot \frac{d\nu}{d\alpha(x},$$

$$\frac{d\pi}{d\alpha(x} = \left[\frac{d\varpi}{dx(\alpha} - \frac{d\omega}{dx(\alpha} \cdot \frac{dy}{dx(\alpha}\right] \frac{dy}{d\alpha(x} + \left(\frac{dy}{dx(\alpha}\right)^2 \frac{d\nu}{d\alpha(x},$$

$$\frac{dx}{d\alpha(x} = \left[\frac{d\lambda}{dx(\alpha} - \frac{d\mu}{dx(\alpha} \cdot \frac{dy}{dx(\alpha} + \frac{d\nu}{dx(\alpha} \cdot \left(\frac{dy}{dx(\alpha}\right)^2\right] \frac{dy}{d\alpha(x} + \left(\frac{dy}{dx(\alpha}\right)^3 \frac{d\nu}{d\alpha(x},$$

.....

$$\frac{d\zeta}{d\alpha(x} = \left[\frac{d\eta}{dx(\alpha} - \frac{d\theta}{dx(\alpha} \cdot \frac{dy}{dx(\alpha} + \frac{d\iota}{dx(\alpha} \cdot \left(\frac{dy}{dx(\alpha}\right)^2 - \ldots \pm \frac{d\nu}{dx(\alpha} \cdot \left(\frac{dy}{dx(\alpha}\right)^{n-2}\right] \frac{dy}{d\alpha(x} + \left(\frac{dy}{dx(\alpha}\right)^{n-1} \frac{d\nu}{d\alpha(x};$$

et si l'on substitue ces valeurs dans celles de υ, τ, σ.... ρ, π, ξ, la division par leur dénominateur commun $\frac{dy}{d\alpha(x}$ se fera exactement sur tous les termes de chaque valeur, excepté sur le dernier; en sorte qu'il ne restera de dérivées relatives à α que dans ce dernier terme: on aura ainsi

$$\omega = \frac{\frac{d\nu}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}},$$

$$\upsilon = \frac{d\nu}{dx(\alpha} - \frac{dy}{dx(\alpha} \cdot \frac{\frac{d\nu}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}},$$

$$\tau = \frac{d\mu}{dx(\alpha} - \frac{d\nu}{dx(\alpha} \cdot \frac{dy}{dx(\alpha} + \left(\frac{dy}{dx(\alpha}\right)^2 \frac{\frac{d\nu}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}},$$

.....

π

Digitized by Google

$$\pi = \frac{d\eta}{dx(\alpha} - \frac{d\theta}{dx(\alpha} \cdot \frac{dy}{dx(\alpha} + \frac{d\iota}{dx(\alpha} \left(\frac{dy}{dx(\alpha}\right)^2 - \ldots \pm \frac{d\nu}{dx(\alpha} \left(\frac{dy}{dx(\alpha}\right)^{n-2}$$

$$\mp \left(\frac{dy}{dx(\alpha}\right)^{n-1} \frac{\frac{d\nu}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{d\zeta}{dx(\alpha} - \pi \frac{dy}{dx(\alpha}$$

$$= \frac{d\zeta}{dx(\alpha} - \frac{d\eta}{dx(\alpha} \cdot \frac{dy}{dx(\alpha} + \frac{d\theta}{dx(\alpha} \left(\frac{dy}{dx(\alpha}\right)^2 - \ldots\ldots$$

$$\mp \frac{d\nu}{dx(\alpha} \left(\frac{dy}{dx(\alpha}\right)^{n-1} \pm \left(\frac{dy}{dx(\alpha}\right)^n \frac{\frac{d\nu}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}.$$

Si, après avoir débarrassé l'équation donnée de fractions et de radicaux, on y substitue à la place des dérivées de z de l'ordre le plus élevé, c'est-à-dire de l'ordre même de cette équation, leurs valeurs tirées des formules précédentes, où ξ, π, ρ ..... τ, υ, ω, représentent ces dérivées, et ζ, η, θ ..... λ, μ, ν, celles de l'ordre immédiatement inférieur, et qu'on ordonne l'équation résultante relativement aux puissances ascendantes de $\frac{\frac{d\nu}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}$, on aura une transformée de la forme

$$P + Q \frac{\frac{d\nu}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}} + R \left\{\frac{\frac{d\nu}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}\right\}^2 + \&c. = 0,$$

que les valeurs des dérivées de z jusqu'à l'ordre immédiatement inférieur à celui de l'équation donnée, tirées de l'intégrale, rendront nécessairement identique, comme elles rendent identique cette équation elle-même. Cette circonstance est indépendante de la valeur de la fonction de x et de y, désignée par α; mais lorsque α est pris à volonté, les fonctions arbitraires se trouvant indifféremment dans toutes les quantités qui

Digitized by Google

entrent dans la transformée, on ne peut tirer aucune conséquence de cette considération : si, au contraire, α est une des quantités dont se composent les fonctions arbitraires de l'intégrale primitive, alors il faudra distinguer deux cas, celui où l'intégrale primitive contient une fonction arbitraire composée de α, de manière que parmi les dérivées de ζ qui entrent dans l'équation donnée, il y en a d'hétérogènes à l'intégrale relativement à cette fonction, et celui où elles lui sont toutes homogènes relativement à la même fonction.

Dans le premier cas, les dérivées de l'ordre le plus élevé qui se trouvent dans l'équation donnée, contiendront exclusivement, d'après ce qui a été démontré précédemment, une fonction de α qui ne pourra se trouver dans aucune des dérivées de ζ des ordres précédens, ni dans les quantités

$$\frac{d\zeta}{dx(\alpha}, \quad \frac{d\eta}{dx(\alpha}, \quad \frac{d\theta}{dx(\alpha} \ldots\ldots \frac{d\lambda}{dx(\alpha}, \quad \frac{d\mu}{dx(\alpha}, \quad \frac{d\nu}{dx(\alpha},$$

qui dérivent de celles de l'ordre immédiatement inférieur par une différenciation où α est considéré comme constant, et qui ne peut par conséquent introduire aucune nouvelle fonction de α dans ces quantités; mais puisqu'on suppose que les dérivées de ζ ne sont pas homogènes à l'intégrale relativement à cette fonction, celles de l'ordre le plus élevé parmi lesquelles se trouve $\omega = \frac{\frac{d\nu}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}$, contiendront toutes la nouvelle fonction produite par les différenciations relatives à α, et qui ne peut disparaître de cette valeur de ω par la suppression d'un facteur commun à son numérateur et à son dénominateur, puisque nous considérons le cas où il y a dans l'équation donnée des dérivées de ζ hétérogènes à l'intégrale.

Il suit de la manière même dont nous avons obtenu la transformée,

Digitized by Google

$$P + Q\,\frac{\frac{dr}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}} + R\left\{\frac{\frac{dr}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}\right\}^2 + \&c. = 0 :$$

que $\frac{\frac{dr}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}$ contiendra nécessairement, dans ce cas, une fonction de α qui ne pourra se trouver dans les valeurs d'aucune des quantités qui entrent dans P, Q, R, &c., et qu'ainsi les valeurs des dérivées de z, tirées de l'intégrale, ne pourront la rendre identique, la fonction de α de l'intégrale primitive restant arbitraire, à moins qu'on n'ait séparément

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \quad \&c.$$

Au contraire, dans le cas où toutes les dérivées de z, jusqu'à celles de l'ordre de la proposée inclusivement, sont homogènes à l'intégrale relativement à la fonction arbitraire de α, toutes ces dérivées, et par conséquent $\omega = \frac{\frac{dr}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}$, après la suppression du facteur commun à $\frac{dr}{d\alpha(x}$ et à $\frac{dy}{d\alpha(x}$, ne contiendront que les mêmes fonctions de α qui se trouvent dans l'intégrale, et par conséquent dans P, Q, R, &c.; en sorte que les valeurs des dérivées de z pourront rendre la transformée identique, sans que P, Q, R, &c. soient nuls séparément. On peut, d'après cette considération, déterminer en général, lorsqu'une équation donnée est susceptible d'une intégrale primitive de la première classe, combien cette intégrale doit renfermer de fonctions arbitraires de chacun des trois genres définis ci-dessus, savoir, les fonctions arbitraires qui ne dépendent que de x seul ou de y seul, celles qui sont composées de quantités qui varient à-la-fois avec x et avec y, et par rapport auxquelles il y a dans l'équation donnée des dérivées hétérogènes à l'intégrale, et celles à l'égard desquelles il n'y en a dans cette équation que d'homogènes à l'intégrale.

Digitized by Google

Il suffira, en effet, pour savoir si l'intégrale supposée de la première classe d'une équation donnée aux différentielles partielles, peut, sans en restreindre la généralité, contenir des fonctions arbitraires relativement auxquelles les dérivées de ζ de l'ordre le plus élevé soient hétérogènes à cette intégrale, ou s'il faut nécessairement qu'elles lui soient toutes homogènes, de poser les équations

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \quad \&c.,$$

et d'y remplacer les quantités

$$\frac{d\zeta}{dx(\alpha}, \quad \frac{d\eta}{dx(\beta} \ldots\ldots\ldots \frac{d\lambda}{dx(\alpha}, \quad \frac{d\mu}{dx(\alpha}, \quad \frac{d\nu}{dx(\alpha},$$

par leurs valeurs

$$\xi + \pi\frac{dy}{dx(\alpha}, \quad \pi + \rho\frac{dy}{dx(\alpha} \ldots\ldots\ldots \sigma + \tau\frac{dy}{dx(\alpha},$$

$$\tau + \upsilon\frac{dy}{dx(\alpha}, \quad \upsilon + \omega\frac{dy}{dx(\alpha};$$

dès-lors ces équations, dont je représenterai le nombre par m, ne contiendront plus que $x, y, \zeta, p, q, r \ldots \xi, \pi, \rho \ldots \tau, \upsilon, \omega$, et la quantité $\frac{dy}{dx(\alpha}$; si l'on tire d'une de ces équations ou d'une combinaison quelconque des mêmes équations la valeur de cette dernière quantité, et qu'on la substitue dans toutes les autres, on aura $m - 1$ équations entre x, y, ζ et les dérivées de ζ jusqu'à celles de l'ordre de l'équation donnée inclusivement.

Lorsque les relations ainsi obtenues entre ces quantités sont toutes identiques entre elles et avec l'équation donnée, cette valeur de $\frac{d\nu}{dx(\alpha}$ détermine pour α une valeur telle, qu'une fonction arbitraire de cette quantité peut entrer d'une manière quelconque dans une intégrale de la première classe de l'équation donnée, sans que cette intégrale cesse d'être générale ; mais s'il résultait de cette substitution des relations entre $x, y, \zeta, p, q, r \ldots \xi, \pi, \rho \ldots \tau, \upsilon, \omega$, étrangères à l'équation donnée, l'existence dans l'intégrale primitive d'une fonction de α par

Digitized by Google

rapport à laquelle des dérivées contenues dans l'équation donnée seraient hétérogènes à cette intégrale, entraînerait nécessairement l'existence de ces relations, ce qui est contraire à l'idée que nous nous sommes faite d'une intégrale générale. Un système d'équation contenant cette fonction arbitraire et un nombre fini de ses dérivées, ne pourrait donc être alors qu'une solution ou intégrale particulière de l'équation donnée; c'est ce qui arrive quand on peut satisfaire aux équations

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \quad \&c.,$$

au moyen d'une seule relation entre x, y, z. Il est évident d'ailleurs que si l'on ne pouvait y satisfaire que par plusieurs relations entre x, y, z; x et y ne seraient plus indépendantes, et qu'il n'y aurait plus lieu à l'existence des différentielles partielles dont se compose l'équation donnée. Après qu'on aura tiré d'une des équations

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \quad \&c.$$

toutes les valeurs de $\frac{dy}{dx}(\alpha$ qui en rendent le premier membre nul, et qu'on aura vu s'il y en a, et quelles sont celles qui satisfont aux autres équations, sans supposer entre x, y, z et les dérivées de z, d'autres relations que l'équation donnée et ses dérivées, on saura s'il peut y avoir et combien il peut y avoir dans son intégrale, si elle est susceptible d'en avoir une de la première classe, de fonctions arbitraires qui donnent pour les dérivées des valeurs hétérogènes à cette intégrale; en sorte qu'on sera certain, s'il y a une intégrale de cette sorte qui contienne d'autres fonctions arbitraires, que, par rapport à ces dernières, toutes les dérivées de z sont homogènes à l'intégrale.

On voit par-là que, par de simples calculs d'élimination exécutés sur l'équation donnée, on peut non-seulement savoir combien son intégrale, supposée de la première classe, peut contenir de fonctions arbitraires par rapport auxquelles il y ait dans l'équation donnée des dérivées de z hétérogènes à l'intégrale, mais encore déterminer en fonctions de x, y, z et des dérivées de z jusqu'à l'ordre n, les valeurs que prend

Digitized by Google

$\frac{dy}{dx\,(\alpha}$, quand on représente successivement par α les quantités dont se composent ces fonctions arbitraires. Nous allons montrer que l'on peut également déterminer de la même manière et en fonctions des mêmes quantités les valeurs que prend nécessairement $\frac{dy}{dx\,(\alpha}$, lorsque l'intégrale est générale et de la première classe, et que α représente une des quantités dont se composent les fonctions arbitraires relativement auxquelles toutes les dérivées de z qui entrent dans l'équation donnée, sont homogènes à l'intégrale ; mais nous remarquons auparavant,

1.° Que dès que le rapport $\frac{dy}{dx\,(\alpha}$ est déterminé en x, y, z, p, q, r . . . . ξ, π, ρ . . . . τ, υ, ω, et par conséquent en fonction implicite de x et de y, α l'est aussi de la même manière, au moyen d'une équation aux différentielles partielles du premier ordre à laquelle satisfont également et exclusivement α et toutes les fonctions de α; ce qu'il était facile de prévoir, puisque α entrant dans l'intégrale sous une fonction arbitraire, peut être remplacé par l'une quelconque de ses fonctions, et ne peut par conséquent être déterminé que par une équation à laquelle ces fonctions satisfassent également.

On a, en effet, en considérant α comme une fonction de x et de y,

$$\frac{\frac{d\alpha}{dx\,(y}}{\frac{d\alpha}{dy\,(x} = -\frac{dy}{dx\,(\alpha};$$

d'où il suit que quand on a la valeur de $\frac{dy}{dx\,(\alpha}$, on a aussi, en en changeant les signes, celle du rapport $\frac{\frac{d\alpha}{dx\,(y}}{\frac{d\alpha}{dy\,(x}}$ des dérivées de α par rapport à x et à y, ce qui donne pour la détermination de α une équation aux différentielles partielles du premier ordre, à laquelle satisfont toutes les fonctions de α, parce que

Digitized by Google

$$\frac{\frac{df\alpha}{dx(y}}{\frac{df\alpha}{dy(x}} = \frac{\frac{d\alpha}{dx(y}f'\alpha}{\frac{d\alpha}{dy(x}f'\alpha} = \frac{\frac{d\alpha}{dx(y}}{\frac{d\alpha}{dy(x},$$

et qui ne peut être satisfaite que par des fonctions de α, parce que si

$$\frac{\frac{d\beta}{dx(y}}{\frac{d\beta}{dy(x}} = \frac{\frac{d\alpha}{dx(y}}{\frac{d\alpha}{dy(x}} = -\frac{dy}{dx(\alpha},$$

on a, en faisant évanouir la fraction,

$$\frac{d\beta}{dx(y} + \frac{d\beta}{dy(x} \cdot \frac{dy}{dx(\alpha} = 0,$$

équation dont le premier membre est précisément la valeur de $\frac{d\beta}{dx(\alpha}$, comme on le voit en faisant $u = \beta$, dans une formule trouvée précédemment : ainsi $\frac{d\beta}{dx(\alpha} = 0$ et $\beta = \varphi\alpha$.

2.° Que quand les dérivées de l'ordre le plus élevé de la proposée n'y sont multipliées ni par elles-mêmes ni entre elles, les valeurs de $\frac{dy}{dx(\alpha}$, et par conséquent celles de $\frac{\frac{d\alpha}{dx(y}}{\frac{d\alpha}{dy(x}}$, ne contiennent que x, y, z et les dérivées de z, jusqu'à l'ordre inférieur d'une unité à celui de la proposée, parce qu'alors la transformée, comme on le voit à l'inspection des valeurs que nous avons trouvées pour ξ, $\pi \ldots \tau$, u, ω, est nécessairement de la forme

$$P + Q\frac{\frac{dv}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}} = 0,$$

dans laquelle Q renferme seulement les quantités qui multipliaient ξ, $\pi \ldots\ldots \tau$, u, ω avec $\frac{dy}{dx(\alpha}$; d'où il suit qu'en tirant $\frac{dy}{dx(\alpha}$ de

Digitized by Google

l'équation $Q = 0$, on aura des valeurs qui ne pourront contenir que ces mêmes quantités.

3.° Que si ces mêmes dérivées de l'ordre le plus élevé ne sont multipliées que par des fonctions de x et de y, comme il arrive dans les équations linéaires et dans une infinité d'autres, les valeurs de $\frac{dy}{dx(\alpha}$ tirées de l'équation $Q = 0$, ne contiendront que x et y; en sorte que l'on aura pour déterminer α une équation aux différentielles partielles du premier ordre entre x, y et α, qui, lorsqu'on y considérera x et α comme variables indépendantes, ne contiendra que x, y et la dérivée de y par rapport à x; en sorte qu'on pourra l'intégrer comme une équation aux différentielles ordinaires entre elles deux variables x et y, pourvu qu'on remplace la constante arbitraire par une fonction de α, ou plutôt par α lui-même, ce qui reviendrait au même; on aurait donc ainsi toutes les valeurs de α en fonctions de x et de y.

Nous venons de voir que lorsque les équations

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \quad \&c.$$

sont telles qu'en se servant de l'une pour éliminer $\frac{dy}{dx(\alpha}$ de toutes les autres, celles-ci ne deviennent pas identiques à la proposée; une intégrale générale ne peut contenir que des fonctions arbitraires relativement auxquelles toutes les dérivées de z qui entrent dans l'équation donnée soient homogènes à l'intégrale, et qui soient telles, par conséquent, que la nouvelle fonction produite par les différenciations relatives à α disparaisse de la fraction $\frac{\frac{dr}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}$, lorsqu'on la réduit à sa plus simple expression. Démontrons maintenant que dans ce cas, comme dans le précédent, le rapport $\frac{\frac{d\alpha}{dx(y}}{\frac{d\alpha}{dy(x}} = -\frac{dy}{dx(\alpha}$, est nécessairement

déterminé

Digitized by Google

déterminé en fonctions de x, y, z, et des dérivées de z qui ne passent pas l'ordre de la proposée.

Soit

$$V = F(x, y, z, p, q \ldots \xi, \pi \ldots \tau, \upsilon, \omega) = 0$$

l'équation proposée : l'intégrale, quelle qu'elle soit, doit satisfaire non-seulement à cette équation, mais encore à toutes ses dérivées prises, soit par rapport à x, soit par rapport à y. Prenons ces dérivées relativement à y, en marquant par des indices les dérivées de ξ, $\pi \ldots \tau$, υ, ω par rapport à y, nous aurons successivement

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right)\xi' + \left(\frac{dV}{d\pi}\right)\pi' + \ldots\ldots + \left(\frac{dV}{d\omega}\right)\omega' +$$
$$f(x, y, z, p, q \ldots\ldots \xi, \pi \ldots\ldots \tau, \upsilon, \omega) = 0,$$

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right)\xi'' + \left(\frac{dV}{d\pi}\right)\pi'' + \ldots\ldots + \left(\frac{dV}{d\omega}\right)\omega'' +$$
$$f(x, y, z, p, q \ldots\ldots \xi', \pi' \ldots\ldots \tau', \upsilon', \omega') = 0, \text{ \&c. \&c.;}$$

en sorte que, dans chacune de ces équations, les dérivées de l'ordre le plus élevé ne seront multipliées que par les quantités

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right), \quad \left(\frac{dV}{d\pi}\right) \ldots\ldots \left(\frac{dV}{d\omega}\right);$$

qui ne contiennent, comme V, que x, y, z, p, $q \ldots \xi$, $\pi \ldots \omega$; et comme les équations qui nous ont donné les valeurs de ξ, $\pi \ldots \omega$, en fonctions de

$$\frac{dy}{dx(\alpha}, \quad \frac{dz}{dx(\alpha}; \quad \frac{dn}{dx(\alpha} \ldots\ldots \frac{dr}{dx(\alpha};$$

et de la fraction $\dfrac{\dfrac{dr}{da(x}}{\dfrac{dy}{da(x}}$, ont lieu également pour tous les ordres, et donnent par conséquent les valeurs de $\xi^{(r)}$, $\pi^{(r)} \ldots \tau^{(r)}$, $\upsilon^{(r)}$, $\omega^{(r)}$,

Digitized by Google

en fonctions de $\xi^{(r-1)}$, $\pi^{(r-1)}\ldots\ldots\tau^{(r-1)}$, $\upsilon^{(r-1)}$, $\omega^{(r-1)}$, en y écrivant seulement ces dernières quantités à la place de ζ, $\pi\ldots\ldots\lambda$, μ, ν, il est évident, à la seule inspection de ces valeurs, que dans toutes les transformées déduites des dérivées de la proposée par rapport à y, où on les aura substituées, les fractions

$$\frac{\frac{d\omega}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}, \quad \frac{\frac{d\omega'}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}, \quad \frac{\frac{d\omega''}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}, \quad \&c.$$

seront toutes multipliées, chacune dans la transformée où elle se trouvera, par la même quantité

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right)\left(\frac{dy}{dx(\alpha}\right)^n + \left(\frac{dV}{d\pi}\right)\left(\frac{dy}{dx(\alpha}\right)^{n-1} + \ldots + \left(\frac{dV}{d\omega}\right);$$

et pour que ces transformées aient lieu indépendamment des valeurs de

$$\frac{\frac{d\omega}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}, \quad \frac{\frac{d\omega'}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}, \quad \frac{\frac{d\omega''}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}, \quad \&c.,$$

il faudra, par conséquent, qu'on ait séparément

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right)\left(\frac{dy}{dx(\alpha}\right)^n + \left(\frac{dV}{d\pi}\right)\left(\frac{dy}{dx(\alpha}\right)^{n-1} + \ldots + \left(\frac{dV}{d\omega}\right) = 0. \quad (A)$$

Or, pour que ces transformées pussent avoir lieu sans cette condition, il faudrait qu'il ne parût aucune nouvelle dérivée dans les numérateurs des fractions

$$\frac{\frac{d\omega}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}, \quad \frac{\frac{d\omega'}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}, \quad \frac{\frac{d\omega''}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}, \quad \&c.,$$

qui ne disparût en vertu d'un facteur commun à $\frac{dy}{d\alpha(x}$; et l'on voit d'ailleurs que cette dernière quantité ne change point en passant d'un ordre

Digitized by Google

de dérivation à un autre, tandis qu'à chaque différenciation il s'introduit une nouvelle fonction arbitraire dans les numérateurs correspondans. Il s'ensuit donc qu'on arrivera nécessairement à une transformée où une nouvelle fraction arbitraire entrera seulement dans la fonction $\frac{\frac{d\omega^{(r)}}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}$, et où l'équation (A) sera nécessairement satisfaite.

Cette équation donnera des valeurs déterminées de $\frac{dy}{dx(\alpha}$, en fonctions de $x, y, z, p, q \ldots\ldots \xi, \pi \ldots\ldots \omega$, et dont il suffira de changer le signe pour avoir celles de $\frac{\frac{d\alpha}{dx(y}}{\frac{d\alpha}{dy(x}}$:

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right)\xi' + \left(\frac{dV}{d\pi}\right)\pi' + \ldots\ldots + \left(\frac{dV}{d\omega}\right)\omega' +$$
$$f(x, y, z, p, q \ldots\ldots \xi, \pi \ldots\ldots \omega) = 0,$$

représentant toujours l'équation qui résulte de la différenciation de la proposée par rapport à y, si l'on y substitue à $\xi', \pi' \ldots \omega'$, les valeurs dont nous venons de parler, et qu'on égale séparément à zéro les termes de l'équation ainsi obtenus, qui seront multipliés par $\frac{\frac{d\omega}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}$, il est évident qu'il restera une équation de laquelle on pourra tirer une autre valeur de $\frac{dy}{dx(\alpha}$ ou de $\frac{\frac{d\alpha}{dx(y}}{\frac{d}{dy(x}}$. Cette valeur sera nécessairement égale à la première en vertu de l'équation donnée; mais elle contiendra les dérivées de l'ordre immédiatement supérieur à celui de la proposée, ce qui n'empêchera pas que cette équation ne soit souvent d'un grand secours pour la détermination de son intégrale.

Digitized by Google

On voit donc que, de quelque manière qu'une fonction arbitraire entre dans une intégrale générale, où cette fonction n'est ni en série infinie, ni sous un signe d'intégration partielle, il faut nécessairement que la quantité dont elle est composée, loin de pouvoir être prise à volonté, soit telle que le rapport de ses dérivées relatives à x et à y, ait une valeur déterminée en fonction de x, y, z, et des dérivées de z jusqu'à l'ordre de l'équation donnée. On voit en même temps que cette condition détermine ces quantités, autant qu'elles sont susceptibles de l'être, puisqu'elle ne peut avoir lieu que relativement à ces quantités et à leurs fonctions qui peuvent toujours leur être substituées. L'équation

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right)\left(\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right)^n + \left(\frac{dV}{d\pi}\right)\left(\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right)^{n-1} + \ldots + \left(\frac{dV}{d\omega}\right) = 0$$

est du degré n, et donne en général n valeurs de $\frac{dy}{dx\,(\alpha}$; ces valeurs, dont aucune ne peut être nulle ou infinie, quand l'équation donnée $V = 0$ contient les deux dérivées extrêmes,

$$\xi = \frac{d^n z}{dx^n} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{d^n z}{dy^n},$$

sont celles de $\frac{\frac{d\alpha}{dx\,(y}}{\frac{d\alpha}{dy\,(x}}$ pour les n quantités représentées par α, dont les fonctions arbitraires de l'intégrale primitive sont nécessairement composées, lorsque l'équation donnée peut en avoir une appartenant à la première classe.

Si parmi les n racines de l'équation dont nous venons de parler, il s'en trouve d'égales, l'équation donnée ne pourra avoir une intégrale de la première classe qui contienne un nombre suffisant de fonctions arbitraires pour être générale, à moins qu'il n'y ait dans cette intégrale autant de fonctions arbitraires indépendantes entre elles, composées d'une même valeur de α, correspondantes à ces racines égales.

Digitized by Google

Lorsque ω manquera dans l'équation donnée, une des n valeurs de $\frac{dy}{dx(\alpha}$ sera égale à zéro; ce qui donnera

$$y = fa \quad \text{et} \quad \alpha = Fy,$$

ou simplement $\alpha = y$, puisqu'une fonction de α peut toujours être substituée à α; il ne pourra donc y avoir une intégrale primitive de la première classe avec n fonctions arbitraires, à moins qu'elle ne contienne une ~~fonction arbitraire de y~~.

Par la même raison, si, outre ω, l'équation donnée manque de quelques-unes des dérivées de z de l'ordre n qui précèdent immédiatement ω, on aura autant de valeurs de $\frac{dy}{dx(\alpha}$ égales à zéro, et l'intégrale primitive ne pourra par conséquent être générale qu'autant qu'elle renfermera un même nombre de fonctions arbitraires de y, indépendantes entre elles.

Il suit de ce qui a été dit au commencement de ce mémoire sur la manière dont s'introduisent dans le calcul les nouvelles fonctions dérivées des fonctions arbitraires contenues dans l'intégrale primitive, que quand cette intégrale en contient qui soient composées de y seul, ω en renferme une nouvelle qui ne peut se trouver dans aucune des autres dérivées de z jusqu'à l'ordre n. Cela suffit pour démontrer que ω ne saurait entrer dans une équation aux différentielles partielles qui a une intégrale de la première classe où entre une fonction de y seul. Il suit encore des mêmes considérations, qu'il y a dans dans le même cas une autre arbitraire qui ne peut se trouver que dans v, v et ω; en sorte que si v et ω manquent dans l'équation donnée, v ne saurait y entrer, tant qu'il y a une intégrale primitive de la première classe. Une équation qui contiendrait v et où v et ω n'entreraient pas, ne peut donc avoir une intégrale primitive de cette classe; mais cela n'empêcherait pas qu'elle ne pût avoir une intégrale intermédiaire de la même forme que les intégrales primitives dont nous avons formé la première classe : car, pour n'en citer que l'exemple le plus simple, il est évident qu'en

Digitized by Google

nommant ε la dérivée $\frac{d^{n-2}\zeta}{dy^{n-2}}$ de ζ de l'ordre $n-2$ relative à y seul, l'équation $\lambda = \varepsilon + \Phi x$ est l'intégrale première de l'équation $\tau = \nu$, où υ et ω manquent, quoiqu'elle contienne ν.

Si, au lieu de $\tilde{\omega}$ et des dérivées de ζ de l'ordre n qui précèdent immédiatement ω, c'étaient ξ et les dérivées π, ρ, &c. qui suivent immédiatement ξ, dont il manquât un certain nombre i dans l'équation donnée, l'équation

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right)\left(\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right)^n + \left(\frac{dV}{d\pi}\right)\left(\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right)^{n-1} + \&c. = 0$$

ne serait plus que du degré $n-i$, et ne donnerait que $n-i$ déterminations pour α; mais en changeant alors x en y et y en x, on verrait, par ce que nous venons de dire, que l'équation donnée ne pourrait avoir une intégrale générale de la première classe qu'autant que cette intégrale renfermerait i fonctions arbitraires indépendantes entre elles, composées de x seul, et dans le cas où l'équation donnée ne contiendrait ni ξ ni π qu'autant que ζ y manquerait aussi.

L'équation

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right)\left(\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right)^n + \left(\frac{dV}{d\pi}\right)\left(\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right)^{n-1} + \&c. = 0$$

donnera donc toujours les valeurs de $\frac{dy}{dx\,(\alpha}$ ou de $-\frac{\frac{d\alpha}{dx\,(y}}{\frac{d\alpha}{dy\,(x}}$ correspondantes à toutes les fonctions arbitraires qui peuvent entrer dans une intégrale générale primitive de la première classe, si l'équation donnée peut en avoir une; elle fera connaître en même temps si, parmi ces fonctions arbitraires, il peut y en avoir et combien il peut y en avoir qui soient composées de x seul ou de y seul : c'est ce qu'on savait déjà, quoiqu'on ne l'eût peut-être pas démontré complètement, et qu'on eût négligé de faire voir d'où venaient les modifications qu'apporte, dans la généralité de cette proposition, la forme d'intégrales

Digitized by Google

partielles ou de séries infinies des intégrales dont se composent les autres classes. Mais les considérations précédentes, en complétant cette théorie, conduisent à un résultat nouveau, et dont je ferai dans la suite de ces recherches un usage fréquent; c'est le moyen de distinguer parmi les valeurs de $\frac{dy}{dx\,(\alpha}$, celles qui correspondent à des fonctions arbitraires relativement auxquelles il peut y avoir dans l'équation donnée des dérivées de z hétérogènes à l'intégrale, et celles qui correspondent aux fonctions arbitraires pour lesquelles toutes les dérivées de z jusqu'à l'ordre de l'équation donnée sont nécessairement homogènes à l'intégrale.

Nous avons vu comment on pouvait trouver les premières par un simple calcul d'élimination exécuté sur l'équation donnée, et nous venons de voir que l'équation

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right)\left(\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right)^n + \left(\frac{dV}{d\pi}\right)\left(\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right)^{n-1} + \&c. = 0$$

donne à-la-fois les unes et les autres. Après avoir déterminé les premières comme nous l'avons dit, il pourra arriver trois cas : ou elles seront en nombre n, et alors l'équation du degré n qui ne ferait que les donner de nouveau devient inutile ; dans ce cas les dérivées de z contenues dans l'équation donnée peuvent être hétérogènes à l'intégrale relativement à toutes les fonctions arbitraires de l'intégrale primitive : ou il n'y en aura aucune, et il faudra que les dérivées de z jusqu'à l'ordre n soient homogènes à l'intégrale relativement aux mêmes fonctions arbitraires, d'où il suit qu'on ne pourra tirer les valeurs correspondantes de $\frac{dy}{dx\,(\alpha}$ que de l'équation

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right)\left(\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right)^n + \left(\frac{dV}{d\pi}\right)\left(\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right)^{n-1} + \&c. = 0\,;$$

ou enfin on en aura un nombre moindre que n, qui répondront aux fonctions arbitraires de l'intégrale primitive pour lesquelles il peut y avoir dans l'équation donnée des dérivées de z hétérogènes à l'inté-

Digitized by Google

grale; et en divisant l'équation dont nous venons de parler par le produit de tous les facteurs correspondans à ces valeurs, on aura, en égalant le quotient à zéro, une équation qui donnera seulement les valeurs de $\frac{dy}{dx\,(\alpha}$ relatives aux fonctions arbitraires de l'intégrale primitive pour lesquelles toutes les dérivées de z jusqu'à l'ordre n sont nécessairement homogènes à cette intégrale.

Soit, par exemple

$$st + x(rt - s^2)^2 = 0.$$

Si l'on y substitue $\frac{dq}{dx\,(\alpha} - t\frac{dy}{dx\,(\alpha}$ au lieu de s, et

$$\frac{dp}{dx\,(\alpha} - \frac{dq}{dx\,(\alpha}\frac{dy}{dx\,(\alpha} + t\left(\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right)^2 \text{ au lieu de } r,$$

t étant égal à $\frac{\frac{dq}{d\alpha\,(x}}{\frac{dy}{d\alpha\,(x}}$; elle deviendra

$$x\left(\frac{dq}{dx\,(\alpha}\right)^4 + t\left[\frac{dq}{dx\,(\alpha} - 2x\left(\frac{dq}{dx\,(\alpha}\right)^2\left(\frac{dp}{dx\,(\alpha} + \frac{dq}{dx\,(\alpha}\cdot\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right)\right]$$
$$+ t^2\left[x\left(\frac{dp}{dx\,(\alpha} + \frac{dq}{dx\,(\alpha}\cdot\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right)^2 - \frac{dy}{dx\,(\alpha}\right] = 0;$$

en sorte que

$$P = x\left(\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right)^4;$$

$$Q = \frac{dq}{dx\,(\alpha}\left[1 - 2x\left(\frac{dq}{dx\,(\alpha}\right)\left(\frac{dp}{dx\,(\alpha} + \frac{dq}{dx\,(\alpha}\cdot\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right)\right];$$

$$R = x\left(\frac{dp}{dx\,(\alpha} + \frac{dq}{dx\,(\alpha}\right)^2 - \frac{dy}{dx\,(\alpha}.$$

En égalant ces trois quantités à zéro, on a d'abord $\frac{dq}{dx\,(\alpha} = 0$; et les trois équations qui résultent de cette opération se réduisent, par conséquent, aux deux suivantes :

$s+t$

Digitized by Google

$$s + t\frac{dy}{dx\,(\alpha} = 0,$$

$$x\left(r + s\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right)^2 - \frac{dy}{dx\,(\alpha} = 0,$$

la valeur $\frac{dy}{dx\,(\alpha} = -\frac{s}{t}$, tirée de la première, change la seconde en

$$x\left(r - \frac{s^2}{t}\right)^2 + \frac{s}{t} = 0,$$

ou

$$x\,(rt - s^2)^2 + st = 0;$$

qui est précisément l'équation donnée. La valeur $\frac{dy}{dx\,(\alpha} = -\frac{s}{t}$ répond donc à une fonction arbitraire de α, relativement à laquelle il peut y avoir, dans l'équation donnée, des dérivées hétérogènes à l'intégrale. L'équation

$$\left(\frac{dV}{dr}\right)\left(\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right)^2 - \left(\frac{dV}{ds}\right)\frac{dy}{dx\,(\alpha} + \left(\frac{dV}{dt}\right) = 0$$

devient ici

$$2xt(rt-s^2)\left(\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right)^2 + [4xs(rt-s^2)-t]\frac{dy}{dx\,(\alpha} + 2xr(rt-s^2) + s = 0;$$

en la divisant par $\frac{dy}{dx\,(\alpha} + \frac{s}{t}$, on a pour reste

$$2x(rt - s^2)\left(r - \frac{s^2}{t}\right) + 2s$$

qui est nul en vertu de l'équation donnée, et pour quotient

$$2xt(rt - s^2)\frac{dy}{dx(\alpha} + 2xs(rt - s^2) - t;$$

en égalant ce quotient à zéro, on trouve

$$\frac{dy}{dx\,(\alpha} = \frac{1}{2x(rt-s^2)} - \frac{s}{t},$$

Digitized by Google

valeur de $\frac{\frac{d\alpha}{dx(\alpha}}{\frac{d\alpha}{dy(x}}$, correspondante à une fonction arbitraire qui ne peut entrer dans une intégrale de l'équation donnée qui appartiendrait à la premiere classe, que sous la condition d'y être contenue de manière que toutes les dérivées de z du premier et du second ordre soient, relativement à cette fonction, homogènes à l'intégrale.

Soit maintenant proposée l'équation

$$rt - b^2x^2t^2 + py - qs = 0;$$

on aura, en y faisant les mêmes substitutions, et laissant toujours, pour abréger, t à la place de $\frac{\frac{dq}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}$,

$$py - q\frac{dq}{dx(\alpha} + \left(\frac{dp}{dx(\alpha} - \frac{dq}{dx(\alpha}\cdot\frac{dy}{dx(\alpha} + q\frac{dy}{dx(\alpha}\right)t + \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - b^2x^2\right]t^2 = 0.$$

Posant séparément les trois équations $P=0$, $Q=0$, $R=0$, et remplaçant $\frac{dp}{dx(\alpha}$ par $r + s\frac{dy}{dx(\alpha}$ et $\frac{dq}{dx(\alpha} = s + t\frac{dy}{dx(\alpha}$, on a

$$py - qs - qt\frac{dy}{dx(\alpha} = 0,$$

$$r - t\left(\frac{dy}{dx(\alpha}\right)^2 + q\frac{dy}{dx(\alpha} = 0,$$

$$\frac{dy}{dx(\alpha} = \pm bx;$$

en éliminant $\frac{dy}{d\alpha(x}$, il vient

$$py - qs \mp bxqt = 0,$$

$$r - b^2x^2t \pm bxq = 0,$$

d'où l'on tire à-la-fois

Digitized by Google

$$rt - b^2 x^2 t^2 + py - qs = 0,$$

qui est l'équation donnée, et

$$(py - qs)^2 = b^2 x^2 q^2 t^2.$$

Ainsi une équation primitive, de quelque nature qu'elle soit, ne peut jamais être l'intégrale générale de la proposée, dès qu'elle contient une fonction arbitraire dégagée de tout signe d'intégration partielle, relativement à laquelle les valeurs des dérivées de z du premier et du second ordre ne sont pas homogènes à l'intégrale, puisque toute équation primitive qui tomberait dans ce cas, et satisferait à la proposée

$$rt - b^2 x^2 t^2 + py - qs = 0,$$

donnerait en même temps

$$(py - qs)^2 = b^2 x^2 q^2 t^2,$$

et ne pourrait par conséquent représenter la proposée que dans le cas particulier où l'on aurait cette dernière équation en même temps que l'équation

$$rt - b^2 x^2 t^2 + py - qs = 0.$$

Le Mémoire d'où ces Considérations générales sont tirées, contenait deux autres paragraphes où elles étaient appliquées à l'intégration des équations aux différentielles partielles du premier et du second ordre. Ces deux paragraphes ne se trouvent point ici, parce qu'il a paru plus convenable de les réunir aux autres Mémoires sur le même sujet que l'auteur a présentés depuis à l'Institut.

Digitized by Google

SUITE DU MÉMOIRE SUR LES INTÉGRALES DÉFINIES,

Imprimé dans le volume précédent de ce Journal;

Par M. POISSON.

(On continuera, dans cette addition, l'ordre des articles du Mémoire, qui se terminent au n.° [11].)

[12.] JE vais considérer maintenant une espèce d'intégrales définies, différentes de celles dont il a été question dans le mémoire, et qui nous conduiront à quelques nouveaux résultats.

Soit

$$y = \int \frac{\sin.^p x \,.\, dx}{(1 - 2a.\cos. x + a^2)^n},$$

l'intégrale étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 200° = \pi$; a désignant une constante indéterminée, et p et n des exposans qui peuvent être positifs ou négatifs : il faut seulement que si p est négatif, $p+1$ soit positif, sans quoi la valeur de l'intégrale deviendrait infinie.

En différenciant deux fois par rapport à a, on a

$$\frac{dy}{da} = 2n \cdot \int \frac{(\cos. x - a) \,.\, \sin.^p x \,.\, dx}{(1 - 2a \,.\, \cos. x + a^2)^{n+1}},$$

$$\frac{d^2 y}{da^2} = 4n(n+1) \cdot \int \frac{(\cos. x - a)^2 \,.\, \sin.^p x \,.\, dx}{(1 - 2a \,.\, \cos. x + a^2)^{n+2}}$$

$$- 2n \cdot \int \frac{\sin.^p x \,.\, dx}{(1 - 2a \,.\, \cos. x + a^2)^{n+1}};$$

Digitized by Google

l'intégration par parties donne

$$\int \frac{\cos.\, x\,.\,\sin.^p x\,.\,dx}{(1-2a.\cos.\, x+a^2)^{n+1}} = \frac{1}{p+1}\cdot\frac{\sin.^{p+1} x}{(1-2a.\cos.\, x+a^2)^{n+1}} + \frac{2(n+1)a}{p+1}\cdot\int \frac{\sin.^{p+2} x\,.\,dx}{(1-2a.\cos.\, x+a^2)^{n+2}};$$

et à cause que le terme en dehors du signe $\int$ est nul aux deux limites $x=0$ et $x=\pi$, il en résulte

$$\frac{dy}{da} = \frac{4n(n+1)a}{p+1}\cdot\int \frac{\sin.^{p+1} x\,.\,dx}{(1-2a.\cos.x+a^2)^{n+2}} - 2na\cdot\int \frac{\sin.^p x\,.\,dx}{(1-2a.\cos.x+a^2)^{n+1}}.$$

Multipliant cette valeur de $\frac{dy}{dx}$ par $\frac{p+1}{a}$, et l'ajoutant ensuite à celle de $\frac{d^2y}{dx^2}$, l'une des deux intégrales disparaît, et il vient

$$\frac{d^2y}{da^2} + \frac{p+1}{a}\cdot\frac{dy}{da} = 2n(2n-p)\cdot\int \frac{\sin.^p x\,.\,dx}{(1-2a.\cos.\, x+a^2)^{n+1}};$$

Maintenant, la première valeur de $\frac{dy}{dx}$, combinée avec celle de y, donne

$$a\,\frac{dy}{da} + ny = n(1-a^2)\cdot\int \frac{\sin.^p x\,.\,dx}{(1-2a.\cos.\, x+a^2)^{n+1}};$$

éliminant donc, entre cette équation et la précédente, l'intégrale qu'elles renferment, on aura

$$(1-a^2)\,\frac{d^2y}{da^2} + \left(\frac{p+1}{a} - (4n+1-p)\,a\right)\frac{dy}{da} - 2n(2n-p)\,y = 0, \qquad (1)$$

pour l'équation différentielle dont dépend l'intégrale définie que nous considérons; de sorte que sa valeur s'exprimera sous forme finie par rapport à a, toutes les fois que cette équation pourra s'intégrer pour les méthodes connues. Il se présente immédiatement un cas d'intégrabilité que nous allons d'abord considérer.

Digitized by Google

[13.] Ce cas est celui où l'on a $p = 2n$, ce qui fait disparaître le dernier terme de l'équation (1) ; divisant en outre par $1 - a^2$, elle se réduit à

$$\frac{d^2y}{da^2} + \frac{2n+1}{a} \cdot \frac{dy}{da} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$y = C + C'a^{-2n},$$

C et C' désignant les deux constantes arbitraires.

Leurs valeurs sont différentes selon que a est une quantité plus petite ou plus grande que l'unité. Si l'on a $a < 1$, l'intégrale que y représente se développe en une série convergente, ordonnée suivant les puissances entières et positives de a; et comme l'exposant $-2n = -p$ est ou négatif ou une fraction moindre que l'unité, il s'ensuit que le terme $C'a^{-2n}$ ne doit pas entrer dans la valeur de y; par conséquent, il faut qu'on ait $C' = 0$, et simplement $y = C$. D'ailleurs, quand $a = 0$, on a

$$y = \int \sin.^{2n} x \, . \, dx :$$

cette intégrale est donc la valeur de la constante C, et l'on aura, pour toutes les valeurs de a plus petites que l'unité,

$$\int \frac{\sin.^{2n} x \, . \, dx}{(1 - 2a \, . \cos. x + a^2)^n} = \int \sin.^{2n} x \, . \, dx. \qquad (2)$$

Si, au contraire, a surpasse l'unité, notre intégrale définie se développe en une série convergente, ordonnée suivant les puissances décroissantes de a, dont les exposans sont $-2n$, $-2n-1$, $-2n-2$, $-2n-3$, &c. : aucun d'eux ne pouvant être zéro, il en résulte que le terme C doit disparaître dans la valeur de y; on aura donc $C = 0$, et par conséquent,

Digitized by Google

$$y = \int \frac{\sin.^{2n} x . dx}{(1 - 2a . \cos. x + a^2)^n} = C' a^{-2n},$$

Multipliant par a^{2n}, et faisant ensuite $a = \frac{1}{0}$, il vient pour la valeur de C',

$$\int \sin.^{2n} x . dx = C';$$

donc, pour les valeurs de a plus grandes que l'unité, on aura

$$\int \frac{\sin.^{2n} x . dx}{(1 - 2a . \cos. x + a^2)^n} = a^{-2n} . \int \sin.^{2n} x . dx. \qquad (7)$$

Dans le cas de $a = 1$, ces deux formules coïncident ensemble, et deviennent

$$\int \frac{\sin.^{2n} x . dx}{(2 - 2 . \cos. x)^n} = \int \sin.^{2n} x . dx;$$

ou, ce qui est la même chose,

$$2 . \int \sin.^{2n} z . dz = \int \sin.^{2n} x . dx,$$

en observant que

$$\sin. x = 2 . \sin. \frac{x}{2} . \cos. \frac{x}{2}, \quad 1 - \cos. x = 2 . \cos.^2 \frac{x}{2},$$

et faisant $x = 2z$; de sorte que l'intégrale relative à z doit être prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 100°$, tandis que l'autre a pour limites $x = 0$ et $x = 200°$. Il est évident, en effet, que sin. x ayant les mêmes valeurs dans le second et dans le premier quart de cercle, la seconde intégrale doit être double de la première.

[14.] Les intégrales que nous considérons sont indépendantes du signe de la quantité a, comme il est aisé de le voir d'après leur forme, et en observant qu'elles sont prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 200°$. On pourra donc donner indifféremment à a des valeurs positives ou négatives; mais dans le cas de a négatif et n fractionnaire, il faudra

Digitized by Google

avoir attention de prendre pour a^{-2n}, dans les formules précédentes, la quantité $\left(\frac{1}{a^2}\right)^n$, qui est la même que si a était positif.

On peut aussi prendre pour a une quantité imaginaire, et la mettre alors sous la forme

$$a = b\,(\cos.\,\alpha + \sin.\,\alpha\,.\,\sqrt{-1}\,);$$

b et l'angle α étant des quantités réelles. Or, dans ce cas, l'intégrale représentée par y se développera en série convergente, ordonnée suivant les puissances ascendantes ou descendantes de b, selon que cette quantité sera plus petite ou plus grande que l'unité; d'où il résulte que sa valeur sera déterminée par l'équation (2), quand on aura $b<1$, et par l'équation (3) dans le cas de $b>1$.

Si l'on avait $b=1$, il en résulterait

$$1-2a.\cos.x+a^2 = 2\,(\cos.\alpha+\sin.\alpha.\sqrt{-1})\,(\cos.\alpha-\cos.x);$$

quantité qui deviendrait nulle pour la valeur $\cos.x=\cos.\alpha$, c'est-à-dire, entre les limites de l'intégration qui s'étend depuis $\cos.x=1$ jusqu'à $\cos.x=-1$: la fonction comprise sous le signe $\int$ passerait donc par l'infini entre ces limites; or, on sait que les intégrales définies qui ont cet inconvénient, présentent des difficultés qui tiennent à ce que l'expression analytique de l'intégrale ne donne plus alors la somme des valeurs de la différentielle, dans l'étendue de l'intégration. Nous n'examinerons point ici ce point d'analyse; et quand la valeur de a sera imaginaire et mise sous la forme précédente, nous supposerons que la quantité b est différente de l'unité.

Observons encore que l'on peut toujours ramener le cas de $a>1$ à celui de $a<1$, ou *vice versâ;* car, en faisant $\frac{1}{a}=a'$, on a identiquement

$$a^n\,.\int\frac{\sin.^p x\,.\,dx}{(1-2a.\cos.x+a^2)^n} = \int\frac{\sin.^p x\,.\,dx}{(1-2a'.\cos.x+a'^2)^n};$$

de sorte qu'en multipliant par a^n une intégrale dans laquelle a surpasse l'unité.

Digitized by Google

l'unité, on la change en une autre où cette quantité est remplacée par a' ou $\frac{1}{a}$, qui est alors plus petite que un. Par ce moyen, on passera facilement de l'équation (2) à l'équation (3); mais pour ne laisser aucun doute sur notre analyse, il était bon de montrer qu'elle conduit à-la-fois à ces deux formules.

[15.] En différenciant ou en intégrant, soit par rapport à a, soit relativement à n, les formules que nous venons de trouver, on en conclura une infinité d'autres, parmi lesquelles nous formerons seulement celle que l'on obtient en différenciant par rapport à n, et faisant ensuite $n = 0$: l'équation (2) donne de cette manière

$$\int \log.(1 - 2a.\cos.x + a^2)\,dx = 0, \qquad (4)$$

pour toutes les valeurs de a plus petites que l'unité, et l'on tire de l'équation (3),

$$\int \log.(1 - 2a.\cos.x + a^2)\,dx = \pi.\log.a^2, \qquad (5)$$

pour les valeurs de a plus grandes que un.

Ces résultats fort simples vont nous servir à déterminer les valeurs d'une classe nombreuse d'intégrales définies qui n'ont pas encore été considérées par les géomètres; mais auparavant je remarquerai qu'on peut les vérifier aisément par la réduction en série.

En effet, soit

$$u = \log.(1 - 2a.\cos.x + a^2);$$

d'où l'on tire

$$-a.\frac{du}{da} = \frac{1 - a^2}{1 - 2a.\cos.x + a^2} - 1.$$

Pour fixer les idées, supposons $a < 1$; nous aurons, en série convergente,

$$\frac{1 - a^2}{1 - 2a.\cos.x + a^2} = 1 + a.\cos.x + a^2.\cos.2x + a^3.\cos.3x + \&c.;$$

Digitized by Google

et par conséquent,

$$-\frac{du}{da} = \cos.x + a.\cos.2x + a^2.\cos.3x + a^3.\cos.4x + \&c.$$

Intégrant par rapport à a, et observant que u est nul en même temps que a, il vient

$$-u = a.\cos.x + \frac{a^2}{2}.\cos.2x + \frac{a^3}{3}.\cos.3x + \frac{a^4}{4}\cos.4x + \&c.;$$

d'où l'on conclut

$$\int u\,dx = \int \log.(1 - 2a.\cos.x + a^2)\,dx = 0;$$

l'intégrale étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$. Cette équation étant vérifiée pour le cas de $a<1$, si l'on fait, comme plus haut, $\frac{1}{a} = a'$, on aura d'abord,

$$\log.(1-2a.\cos.x+a^2) = \log.(1-2a'.\cos.x+a'^2) - \log.a'^2,$$

et ensuite,

$$\int \log.(1 - 2a'.\cos.x + a'^2) - \pi.\log.a'^2 = 0,$$

ce qui coïncide avec l'équation (5).

[16.] L'intégration par parties donne en général,

$$\int \log.(1 - 2a.\cos.x + a^2)\,dx = x.\log.(1 - 2a.\cos.x + a^2) - 2a.\int \frac{x.\sin.x.dx}{1-2a.\cos.x+a^2};$$

si donc on intègre depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, on aura, en vertu des équations (4) et (5),

$$\int \frac{x.\sin.x.dx}{1-2a.\cos.x+a^2} = \frac{\pi}{a}.\log.(1+a). \qquad (6)$$

dans le cas de $a<1$, et

Digitized by Google

$$\int \frac{x \cdot \sin. x \cdot dx}{1-2a \cdot \cos. x+a^2} = \frac{\pi}{a} \cdot \log. \left(1+\frac{1}{a}\right), \qquad (7)$$

quand a surpasse l'unité.

Si l'on a $a=1$, ces deux formules coïncident et donnent un résultat connu, savoir,

$$\int \frac{x \cdot \sin. x \cdot dx}{2(1-\cos. x)} = \pi \cdot \log. 2;$$

ou bien, en faisant $x=2z$, et réduisant

$$\int \frac{z \cdot \cos. z \cdot dz}{\sin. z} = \frac{\pi}{2} \cdot \log. 2,$$

l'intégrale étant prise depuis $z=0$ jusqu'à $z=\frac{\pi}{2}$.

Ces intégrales ne sont plus indépendantes du signe de a, comme les précédentes, ce qui tient à ce que la variable x s'y trouve hors des signes *sin.* et *cos.* On peut toujours y supposer à a des valeurs imaginaires; et si l'on fait $a=b(\cos. \alpha + \sin. \alpha \sqrt{-1})$, il faudra employer l'équation (6) ou l'équation (7), selon que b sera plus petit ou plus grand que l'unité : nous continuons d'exclure le cas de $b=1$, pour la raison que l'on a donnée plus haut, n.° [14].

Maintenant il est évident qu'on pourra déterminer les valeurs des intégrales prises depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, et comprises sous cette forme :

$$\int \frac{N}{M} x \cdot \sin. x \cdot dx;$$

N et M désignant des fonctions rationnelles et entières de cos. x, dont la seconde ne devient pas nulle entre les limites de l'intégration.

En effet, en décomposant $\frac{N}{M}$ en fractions simples, comme on le pratique pour intégrer les fractions rationnelles, on remplacera cette intégrale par la somme de plusieurs termes de cette forme :

Digitized by Google

$$\gamma \cdot \int \frac{x \,.\, \sin.\, x \,.\, dx}{\beta - \cos.x};$$

β et γ étant des constantes données qui peuvent être réelles ou imaginaires; seulement β ne peut pas être une quantité réelle plus petite que l'unité, sans quoi le facteur $\beta - \cos. x$ de M, deviendrait nul pour une valeur de x comprise entre $x = 0$ et $x = \pi$. Faisant donc $a + \frac{1}{a} = 2\beta$, ou, ce qui est la même chose,

$$a^2 - 2\beta a + 1 = 0, \qquad (8)$$

on aura

$$\gamma \cdot \int \frac{x \,.\, \sin.\, x \,.\, dx}{\beta - \cos. x} = 2a\gamma \cdot \int \frac{x \,.\, \sin.\, x \,.\, dx}{1 - 2a.\cos. x + a^2};$$

où l'on voit que chaque partie de notre intégrale sera donnée par les formules précédentes.

L'équation (8) donnera deux valeurs de a, dont le produit sera égal à l'unité : l'une d'elles sera donc plus petite et l'autre plus grande que un; et si elles sont imaginaires, et qu'on en représente une par $b(\cos. z + \sin. z.\sqrt{-1})$, l'autre sera $\frac{1}{b}(\cos. z - \sin. z \,.\, \sqrt{-1})$;

d'où il suit qu'on pourra faire usage, à volonté, de l'équation (6) ou de l'équation (7), pour déterminer la valeur de chaque partie de l'intégrale proposée. Si l'on s'assujettit à prendre la valeur de a qui tombe au-dessous de l'unité, ou qui répond à $b < 1$ dans le cas de l'imaginaire, il faudra employer l'équation (6), et l'on aura

$$\gamma \cdot \int \frac{x \,.\, \sin.\, x \,.\, dx}{\beta - \cos. x} = 2\pi\gamma.\log.(1+a). \qquad (9)$$

Il pourrait arriver que M eût des facteurs multiples, et alors la décomposition de l'intégrale proposée donnerait des termes de cette forme :

$$\gamma \cdot \int \frac{x \,.\, \sin.\, x \,.\, dx}{(\beta - \cos. x)^i};$$

Digitized by Google

i étant un nombre plus grand que un. Mais en intégrant par parties, on a, quelles que soient les limites,

$$\int \frac{x \cdot \sin. x \cdot dx}{(\beta - \cos. x)^i} = \frac{x}{1-i} \cdot (\beta - \cos. x)^{1-i} - \frac{1}{1-i} \cdot \int \frac{dx}{(\beta - \cos. x)^{i-1}},$$

ce qui réduit l'intégrale cherchée à une autre qui s'obtient par les règles ordinaires.

[17.] Pour éclaircir l'usage de ces formules générales, nous allons en faire l'application à plusieurs exemples.

Soit d'abord

$$\int \frac{x \cdot \sin. x \cdot dx}{2 - \cos. x};$$

l'équation (8) deviendra, dans ce cas, $a^2 - 4a + 1 = 0$, et ses racines seront $2 \pm \sqrt{3}$; prenant pour a celle qui est plus petite que un, savoir, $a = 2 - \sqrt{3}$, et la substituant dans l'équation (9), nous aurons

$$\int \frac{x \cdot \sin. x \cdot dx}{2 - \cos. x} = 2\pi \cdot \log. (3 - \sqrt{3}).$$

Soit, en second lieu,

$$\int \frac{x \cdot \sin. x \cdot dx}{2 + \cos. x};$$

nous aurons alors $\gamma = -1$, $\beta = -2$; et pour l'équation (8), $a^2 + 4a + 1 = 0$, dont la racine plus petite que l'unité, abstraction faite du signe, est $a = -2 + \sqrt{3}$; d'où l'on conclut, d'après l'équation (9),

$$\int \frac{x \cdot \sin. x \cdot dx}{2 + \cos. x} = -2\pi \cdot \log. (\sqrt{3} - 1).$$

Prenons, pour dernier exemple, l'intégrale

$$\int \frac{x \cdot \sin. x \cdot dx}{1 + \cos.^2 x}.$$

Digitized by Google

En la décomposant en deux autres, elle est la même chose que

$$\frac{\sqrt{-1}}{2}\cdot\int\frac{x.\sin.x.dx}{\sqrt{-1}-\cos.x}+\frac{\sqrt{-1}}{2}\cdot\int\frac{x.\sin.x.dx}{\sqrt{-1}+\cos.x};$$

relativement à la première, on a

$$\gamma=\frac{\sqrt{-1}}{2},\quad \beta=\sqrt{-1},$$

et l'équation (8) devient

$$a^2-2\sqrt{-1}.a+1=0;$$

d'où l'on tire

$$a=(1\pm\sqrt{2})\sqrt{-1}.$$

Si l'on compare ces valeurs imaginaires à celle que nous avons supposée plus haut [n.° 14], on voit qu'on aurait, dans ce cas,

$$b=1\pm\sqrt{2};$$

par conséquent, la racine qui répond à la valeur de b plus petite que l'unité, est $a=(1-\sqrt{2})\sqrt{-1}$. Si l'on en fait usage, l'équation (9) donne

$$\frac{\sqrt{-1}}{2}\cdot\int\frac{x.\sin.x.dx}{\sqrt{-1}-\cos.x}=\pi\sqrt{-1}.\log.[1+(1-\sqrt{2})\sqrt{-1}].$$

En changeant le signe de $\sqrt{-1}$, on aura de même

$$\frac{\sqrt{-1}}{2}\cdot\int\frac{x.\sin.x.dx}{\sqrt{-1}+\cos.x}=-\pi\sqrt{-1}.\log.[1-(1-\sqrt{2})\sqrt{-1}];$$

et en ajoutant ces deux résultats, on en conclura

$$\int\frac{x.\sin.x.dx}{1+\cos.^2x}=\pi\sqrt{-1}.\log.\left(\frac{1+(1-\sqrt{2})\sqrt{-1}}{1-(1-\sqrt{2})\sqrt{-1}}\right).$$

Pour faire disparaître les imaginaires dans cette expression, je fais

$$1+(1-\sqrt{2})\sqrt{-1}=r(\cos.\theta-\sin.\theta.\sqrt{-1});$$

Digitized by Google

c'est-à-dire, $r.\cos.\theta = 1$ et $r.\sin.\theta = \sqrt{2}-1$; d'où il suit

$$r^2 = 1+(\sqrt{2}-1)^2 = 4-2\sqrt{2}, \quad \theta = \text{arc}\,(\text{tang.} = \sqrt{2}-1)\,;$$

et par la formule connue, on a

$$\log.[1+(1-\sqrt{2})\sqrt{-1}] = \log. r + \log.(\cos.\theta - \sin.\theta.\sqrt{-1})$$
$$= \log. r - \theta\sqrt{-1}\,;$$

changeant le signe de $\sqrt{-1}$, on aura en même temps

$$\log.[1-(1-\sqrt{2})\sqrt{-1}] = \log. r + \theta\sqrt{+1}\,;$$

au moyen de quoi, la valeur de notre intégrale se réduit à

$$\int \frac{x.\sin.x.dx}{1+\cos.^2 x} = 2\pi\theta = 2\pi.\text{arc}\,(\text{tang.} = \sqrt{2}-1).$$

Il y a une infinité d'arcs qui répondent à la même tangente $\sqrt{2}-1$; le plus petit est égal à $\frac{\pi}{8}$, et les autres s'en déduisent en l'augmentant d'un multiple quelconque de π. C'est l'arc $\frac{\pi}{8}$ qu'il faut employer dans cette formule ; car en en prenant un autre, la valeur de l'intégrale serait plus grande que π, ce qui est impossible. En effet, on a

$$\int \frac{x.\sin.x.dx}{1+\cos.^2 x} < \int x.\sin.x.dx\,,$$

puisque tous les élémens de la première intégrale sont positifs et plus petits que leurs correspondans dans la seconde : or, entre les limites $x = 0$ et $x = \pi$, cette seconde intégrale est égale à π.

Nous aurons donc, d'après cette remarque,

$$\int \frac{x.\sin.x.dx}{1+\cos.^2 x} = \frac{\pi^2}{4}\,;$$

résultat facile à vérifier par la réduction entière. On a, en effet,

$$\frac{1}{1+\cos.^2 x} = 1 - \cos.^2 x + \cos.^4 x - \cos.^6 x + \&c.\,;$$

Digitized by Google

mais, en intégrant par parties, on trouve

$$\int x.\sin.x.\cos.^{i}x.dx = \frac{-x.\cos.^{i+1}x}{i+1} + \frac{1}{i+1}.\int \cos.^{i+1}x.dx;$$

et si i désigne un nombre pair, l'intégrale $\int \cos.^{i+1}x.dx$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, est égale à zéro, parce que ses élémens sont deux à deux égaux et de signes contraires. On aura donc simplement, entre ces limites,

$$\int x.\sin.x.\cos.^{i}x.dx = \frac{\pi}{i+1};$$

d'où l'on conclut

$$\int \frac{x.\sin.x.dx}{1+\cos.^{2}x} = \pi\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\&c.\right) = \frac{\pi^{2}}{4}.$$

[18.] Reprenons maintenant l'équation (1) du n.° [12], et montrons comment elle peut servir à comparer entre elles des intégrales définies qui répondent à des valeurs différentes des exposans p et n, dans les cas mêmes où ces intégrales ne peuvent pas s'exprimer sous forme finie par rapport à a. Cet usage de notre équation est fondé sur ce qu'en faisant

$$y = (1-a^{2})^{k}z,$$

et déterminant l'exposant k d'une manière convenable, l'équation relative à la nouvelle variable z est de la même forme que l'équation (1).

En effet, je substitue cette valeur de y dans l'équation (1), et je divise tous les termes par $(1-a^{2})^{k}$; il vient

$$(1-a^{2})\frac{d^{2}z}{da^{2}} + \left[\frac{p+1}{a} - (4n+1-p+4k)a\right]\frac{dz}{da}$$
$$+\left[\frac{4k(k-1+2n-p)a^{2}}{1-a^{2}} - 2k(p+2) - 2n(2n-p)\right]z = 0.$$

Supposant donc

k

Digitized by Google

$$k = 1 + p - 2n,$$

on aura

$$(1-a^2)\frac{d^2z}{da^2} + \left[\frac{p+1}{a} - (4(1+p-n)+1-p)a\right]\frac{dz}{da} - 2\left[(1+p-2n)(p+2) + n(2n-p)\right]z = 0;$$

or, si l'on fait attention que le dernier terme de cette équation est la même chose que

$$-\left[4(1+p-n)^2 - 2p(1+p-n)\right]z,$$

et si on la compare à l'équation (1), on voit qu'elle en résulte, en y remplaçant la lettre n par la quantité $1+p-n$; d'où il suit que l'on satisfera à cette dernière équation, en faisant

$$z = C.\int \frac{\sin.^p x\,.\,dx}{(1-2a.\cos.x+a^2)^{1+p-n}}:$$

l'intégrale étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, et C désignant une quantité indépendante de a. La valeur correspondante de y sera

$$y = C(1-a^2)^{1+p-2n}.\int \frac{\sin.^p x\,.\,dx}{(1-2a\,.\,\cos.x+a^2)^{1+p-n}};$$

elle doit satisfaire, ainsi que

$$y = \int \frac{\sin.^p x\,.\,dx}{(1-2a.\cos.x+a^2)^n},$$

à l'équation (1) : de plus, ces deux valeurs de y donnent $\frac{dy}{da} = 0$ pour la valeur particulière $a=0$, et elles se réduisent alors à

$$y = \int \sin.^p x\,.\,dx, \quad y = C\int \sin.^p x\,.\,dx;$$

quantités qu'on rend égales en prenant $C=1$. Il suit de là que si l'on développe ces valeurs de y en séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de a, le premier et le second terme seront égaux

Digitized by Google

dans les deux séries; ce qui suffit pour que tous les autres le soient aussi, puisqu'elles satisfont à une même équation différentielle linéaire et du second ordre. Or, la quantité a étant supposée moindre que l'unité, les deux séries seront convergentes, et leur égalité entraîne celle des deux fonctions développées; donc, en faisant $C=1$, on aura

$$\int \frac{\sin.^p x\,.\,dx}{(1-2a.\cos.x+a^2)^n} = (1-a^2)^{1+p-2n}.\int \frac{\sin.^p x\,.\,dx}{(1-2a.\cos.x+a^2)^{1+p-n}}.$$

Cette équation exprime un rapport remarquable entre deux intégrales de la même espèce, qui répondent à un même exposant p et aux exposans n et $1+p-n$. Elle a lieu pour toutes les valeurs de a et de p; mais elle suppose $a<1$; et d'après la remarque que l'on a faite plus haut [n.° 14], il est aisé de voir que le rapport des deux intégrales serait $(a^2-1)^{1+p-2n}$, au lieu de $(1-a^2)^{1+p-2n}$, si l'on avait $a>1$.

Sur quelques Intégrales qui se déduisent de $\int \frac{\cos.ax\,.\,dx}{1+x^2}$, *prise depuis* $x=0$ *jusqu'à* $x=\infty$.

[19.] On a vu, dans le n.° [7] de ce mémoire, comment on déduit de cette intégrale les valeurs d'une infinité d'autres qui en dérivent par des différenciations ou des intégrations relatives à a; mais ce n'est pas le seul moyen que l'on puisse employer, et l'on peut aussi faire usage du développement en série, ainsi que nous allons le montrer dans l'exemple suivant.

Soit

$$y=\int \frac{\sin.\beta x\,.\,\sin.\alpha x}{(1+x^2)(1-2a.\cos.\alpha x+a^2)}\,dx;$$

l'intégrale étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{0}$, et α, β, a désignant des constantes quelconques. Nous supposerons $a<1$, abstraction faite du signe : si l'on avait $a>1$, on ferait, comme plus haut, $\frac{1}{a}=a'$, et l'on changerait l'intégrale en une autre, dans laquelle a

Digitized by Google

serait remplacé par a'. D'après cela, on aura en série convergente

$$\frac{a.\sin.\alpha x}{1-2a.\cos.\alpha x+a^2} = \Sigma a^i.\sin.i\alpha x;$$

le signe Σ indiquant une somme qui s'étend à toutes les valeurs entières et positives de i, depuis $i=1$ jusqu'à $i=\frac{1}{0}$: donc, à cause de

$$2.\sin.\beta x.\sin.i\alpha x = \cos.(i\alpha-\beta)x - \cos.(i\alpha+\beta)x,$$

on aura aussi

$$y = \frac{1}{2a}.\Sigma\int\frac{a^i.\cos.(i\alpha-\beta)x}{1+x^2}.dx - \frac{1}{2a}.\Sigma\int\frac{a^i.\cos.(i\alpha+\beta)x}{1+x^2}.dx.$$

Or, nous pouvons regarder α et β comme des quantités positives; alors $i\alpha+\beta$ sera aussi positive pour toutes les valeurs de i; et d'après la formule du n.° [7], qui exige que l'exponentielle qu'elle renferme ait un exposant positif, nous aurons

$$\int\frac{\cos.(i\alpha+\beta)x}{1+x^2}.dx = \frac{\pi}{2}.e^{-i\alpha-\beta}.$$

On a d'ailleurs

$$\Sigma a^i e^{-i\alpha-\beta} = \frac{ae^{-\beta}}{e^{\alpha}-a};$$

on aura donc

$$\Sigma\int\frac{a^i.\cos.(i\alpha+\beta)x}{1+x^2}.dx = \frac{\pi a e^{-\beta}}{2(e^{\alpha}-a)};$$

Si α surpasse β, la quantité $i\alpha-\beta$ sera aussi positive pour toutes les valeurs de i, et l'on aura, en changeant le signe de β dans l'équation précédente,

$$\Sigma\int\frac{a^i.\cos.(i\alpha-\beta)x}{1+x^2}.dx = \frac{\pi a e^{\beta}}{2(e^{\alpha}-a)};$$

d'où l'on conclut

$$y = \frac{\pi}{4}.\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{e^{\alpha}-a}.$$

Digitized by Google

Si, au contraire, β surpasse α, la quantité $i\alpha - \beta$ sera positive pour une partie des valeurs de i, et négative pour les autres. Afin de distinguer ces valeurs entre elles, soit $\beta = n\alpha + r$, n étant un nombre entier et positif, et r un reste positif plus petit que α; la quantité $i\alpha - \beta$, ou $(i - n)\alpha - r$, sera encore positive pour toutes les valeurs de i plus grandes que n: faisant donc $i = n + i'$, on aura, pour toutes les valeurs de i', depuis $i' = 1$ jusqu'à $i' = \frac{1}{0}$,

$$\Sigma \int \frac{a^i . \cos.(i'\alpha - r)x}{1 + x^2} . dx = \frac{\pi a^{n+1} e^r}{2(e^\alpha - a)} ;$$

Mais, relativement aux autres valeurs de i, $(i - n)\alpha - r$ sera négative; changeant donc le signe du coefficient sous le cosinus, on aura d'abord,

$$\int \frac{\cos.[r - (i - n)\alpha]x}{1 + x^2} . dx = \frac{\pi}{2} . e^{-r - n\alpha + i\alpha} ;$$

Multipliant par a^i, et prenant la somme depuis $i = 1$ jusqu'à $i = n$ inclusivement, il vient

$$\Sigma \int \frac{a^i . \cos.(\beta - i\alpha)x}{1 + x^2} . dx = \frac{\pi a e^{-r}(e^{-n\alpha} - a^n)}{2(e^{-\alpha} - a)} .$$

Maintenant, si l'on réunit les trois parties qui doivent composer la valeur complète de y, dans le cas de $\beta > \alpha$, on trouve

$$y = \frac{\pi}{4} . \left[\frac{a^n e^\beta - e^{-\beta}}{e^\alpha - a} + \frac{e^{-\beta} - a^n e^{-r}}{e^{-\alpha} - a} \right].$$

On peut observer que cette valeur cómprend celle qui se rapporte à $\beta < \alpha$, en y faisant $n = 0$, $r = \beta$: en remettant donc à la place de y l'intégrale qu'elle représente, et au lieu de r sa valeur $\beta - n\alpha$, nous n'aurons qu'une seule formule pour les deux cas, savoir,

$$\int \frac{\sin.\beta x . \sin.\alpha x}{(1 + x^2)(1 - 2a.\cos.\alpha x + a^2)} . dx = \frac{\pi}{4} \left[\frac{a^n e^{\beta - n\alpha} - e^{-\beta}}{e^\alpha - a} + \frac{e^{-\beta}(1 - a^n e^{n\alpha})}{e^\alpha - a} \right];$$

Digitized by Google

où n désigne le plus grand multiple de α compris dans β, lequel est nul quand on a $\beta < \alpha$.

La même analyse fait connaître la valeur d'une autre intégrale analogue à celle-ci, et prise entre les mêmes limites, savoir,

$$\int \frac{\cos.\beta x.(\cos.\alpha x - a)}{(1+x^2)(1-2a.\cos.\alpha x + a^2)}.dx.$$

En effet, a étant moindre que un, on a

$$\frac{a(\cos.\alpha x - a)}{1-2a.\cos.\alpha x + a^2} = \Sigma a^i.\cos.i\alpha x;$$

et à cause de

$$2.\cos.\beta x.\cos.i\alpha x = \cos.(i\alpha - \beta)x + \cos.(i\alpha + \beta)x,$$

cette intégrale est égale à

$$\frac{1}{2a}\left[\Sigma\int\frac{\cos.(i\alpha-\beta)x}{1+x^2}.dx + \Sigma\int\frac{\cos.(i\alpha+\beta)x}{1+x^2}.dx\right];$$

d'où l'on conclut, d'après ce qu'on a trouvé plus haut,

$$\int \frac{\cos.\beta x(\cos.\alpha x - a)}{(1+x^2)(1-2x.\cos.\alpha x+a^2)}.dx = \frac{\pi}{4}\left[\frac{a^n e^{\beta-n\alpha}+e^{-\beta}}{e^{\alpha}-a} + \frac{e^{-\beta}(1-a^n e^{n\alpha})}{e^{-\alpha}-a}\right].$$

Par des intégrations ou des différenciations relatives à a, α ou β, ces deux formules en donneront une infinité d'autres auxquelles nous ne nous arrêterons point. En y faisant β nul ou infiniment petit, on en déduira toutes celles que M. *Legendre* a données à la fin de la 4.e partie de ses *Exercices de Calcul intégral*, et qu'il a obtenues par le même moyen que nous venons d'employer. Généralement, on pourra déterminer les intégrales comprises sous l'une ou l'autre de ces deux formes :

$$\int\frac{P}{Q}\cdot\frac{M}{N}.\cos.\beta x.dx,\quad \int\frac{P}{Q}\cdot\frac{M}{N}.\sin.\alpha x.\sin.\beta x.dx;$$

P et Q étant des polynomes qui ne renferment que des puissances

Digitized by Google

paires de x, M et N des polynomes qui ne contiennent que des puissances entières, paires ou impaires, de cos. αx, et les limites étant toujours $x = 0$ et $x = \frac{1}{0}$. Nous supposerons seulement que les dénominateurs Q et N ne deviennent nuls pour aucune valeur réelle de x; cela étant, on décomposera les fractions $\frac{P}{Q}$, $\frac{M}{N}$, en fractions simples; et ces intégrales seront partagées en plusieurs autres de la forme de celles que nous venons de considérer.

[20.] Voici un moyen de déterminer la valeur de l'intégrale $\int \frac{\cos. x}{a^2 + x^2} . dx$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{0}$, qui se déduit de la méthode même que l'on suivrait pour en vérifier la valeur numérique. Ce qui se présente naturellement pour faire cette vérification, c'est de partager l'intégrale en une infinité de parties, en la prenant successivement depuis zéro jusqu'à 2π, depuis 2π jusqu'à 4π, depuis 4π jusqu'à 6π, &c. Le dénominateur $a^2 + x^2$ croissant continuellement, les valeurs de ces intégrales partielles décroîtront de manière qu'elles formeront une série convergente, qui donnera des valeurs aussi approchées qu'on voudra de l'intégrale totale : or, cette série est facile à sommer, et l'on en peut conclure la valeur exacte de l'intégrale.

En effet, on aura par ce moyen

$$\int \frac{\cos. x}{a^2 + x^2} . dx = \int \Sigma \frac{\cos. \theta}{(\text{sin} + \theta)^2 + a^2} . d\theta;$$

l'intégrale relative à θ étant prise depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = 2\pi$, et la somme désignée par Σ s'étendant à toutes les valeurs entières et positives de i, depuis $i = 0$ jusqu'à $i = \frac{1}{0}$. Or, *Euler* a trouvé, dans l'*Introduction à l'Analyse des infiniment petits*,

$$\frac{e^a - 2.\cos.\theta + e^{-a}}{2(1 - \cos.\theta)} = \left(1 + \frac{a^2}{\theta^2}\right)\left(1 + \frac{a^2}{(2\pi - \theta)^2}\right)\left(1 + \frac{a^2}{(2\pi + \theta)^2}\right)\left(1 + \frac{a^2}{(4\pi - \theta)^2}\right)$$

$$\left(1 + \frac{a^2}{(4\pi + \theta)^2}\right)\left(1 + \frac{a^2}{(6\pi - \theta)^2}\right)\left(1 + \frac{a^2}{(6\pi + \theta)^2}\right) \text{ &c.};$$

Digitized by Google

d'où l'on tire, en prenant les logarithmes des deux membres, et différenciant ensuite par rapport à a,

$$\frac{e^a - e^{-a}}{e^a - 2.\cos.\theta + e^{-a}} = \frac{2a}{\theta^2 + a^2} + \frac{2a}{(2\pi-\theta)^2+a^2} + \frac{2a}{(2\pi+\theta)^2+a^2} + \frac{2a}{(4\pi-\theta)^2+a^2} + \frac{2a}{(4\pi+\theta)^2+a^2} + \&c.,$$

je multiplie par $\cos.\theta.d\theta$, et j'intègre depuis $\theta = o$ jusqu'à $\theta = 2\pi$. J'observe de plus que, pour ces limites, on a, quel que soit i,

$$\int \frac{\cos.\theta.d\theta}{[2(i+1)\pi-\theta]^2+a^2} = \int \frac{\cos.\theta.d\theta}{(2i\pi+\theta)^2+a^2};$$

je conclus donc, de l'équation précédente,

$$\int \frac{(e^a - e^{-a}).\cos.\theta.d\theta}{e^a - 2.\cos.\theta + e^{-a}} = 4a.\int \Sigma \frac{\cos.\theta.d\theta}{(2i\pi+\theta)^2+a^2},$$

et par conséquent,

$$\int \frac{\cos.x}{a^2+x^2}.dx = \frac{1}{4a}.\int \frac{(e^a - e^{-a}).\cos.\theta.d\theta}{e^a - 2.\cos.\theta + e^{-a}};$$

La seconde intégrale peut s'obtenir directement; mais pour les limites $\theta = o$ et $\theta = 2\pi$, il est plus court de la réduire d'abord en série. L'exposant a étant supposé positif, on a, en série convergente,

$$\frac{e^a - e^{-a}}{e^a - 2.\cos.\theta + e^{-a}} = 1 + 2e^{-a}.\cos.\theta + 2e^{-2a}.\cos.2\theta + 2e^{-3a}.\cos.3\theta + \&c.;$$

multipliant par $\cos.\theta.d\theta$, et intégrant entre ces limites, l'intégrale du second terme est la seule qui ne soit pas nulle; et comme $\int \cos^2.\theta.d\theta = \pi$, il en résulte

$$\int \frac{\cos.x.dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{4a}.\int \frac{(e^a - e^{-a}).\cos.\theta.d\theta}{e^a - 2.\cos.\theta + e^{-a}} = \frac{\pi}{2}e^{-a};$$

ce qui est effectivement la valeur connue.

Digitized by Google

*Addition à l'Article du XVI.e Cahier de ce Journal, relatif à l'*Héliostate; *par M.* Hachette.

Description des Échelles (Pl. 8) *qui déterminent, pour une déclinaison donnée du Soleil, la position du centre du Miroir de l'Héliostate.*

On a vu (article 22, *pag. 277*, XVI.e Cahier) que la longueur de l'aiguille qui conduit la queue du miroir étant représentée par la droite PD (*planche 8*, XVII.e cahier), on obtient la position du centre du miroir, correspondante à une déclinaison donnée par exemple 23° 27′, en menant une droite Df' parallèle à PS, qui fait avec la droite DP un angle de 23° 27′. Cette droite coupe l'axe du monde PP' en un point l, par lequel on mène l'horizontale flC; et prenant $lC = lD$, le point C est le centre du miroir. La distance verticale de ce centre à l'horizontale menée par le point P, est Pf. Quant à la distance fC de ce centre à la verticale passant par le point P, on pourra la porter sur le rayon Dlf'; et parce que $Dl = lC$, il suffira de prolonger Dl d'une quantité $lf' = lf$. Décrivant du point l comme centre avec lf pour rayon, un arc de cercle qui coupe la droite Dlf' au point f', on tracera la courbe $f'Pf''$ qui passe par tous les points tels que f'.

On divisera en degrés l'arc de cercle décrit du point D comme centre avec DP pour rayon : les rayons de ce cercle détermineront, dans le méridien,

Digitized by Google

méridien, les directions des rayons solaires correspondantes aux différentes déclinaisons du soleil. Les parties de ces rayons comprises entre le centre D et la courbe $f'Pf''$, donneront les distances du centre du miroir à la verticale passant par le point P; les distances à l'horizontale passant par le même point seront prises sur la verticale ZPZ'.

Les échelles construites sur le papier ou sur un carton sont altérées par le retrait ou l'alongement de ces substances, suivant qu'elles sont plus ou moins hygrométriques. Pour les rendre sensiblement invariables, on les tracera sur une planche de cuivre, dont la dimension peut être réduite au cadre $KLMN$. A l'aide de cette planche, on déterminera sans calcul, pour chaque jour de l'année et à l'heure de midi, la position du centre du miroir.

Note sur le Mémoire de M. Plana. (*Voy.* pag. 373.)

La série désignée par X' au commencement du n.° 15, page 373, doit avoir le signe positif à tous ses termes; mais, par inadvertance, on a écrit cette série avec les signes alternativement positifs et négatifs. En conséquence de cette inexactitude, nous avons fait $X' = \text{sin.}\frac{at}{u}$, au lieu de $X' = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \text{sin.}\frac{tu\sqrt{-1}}{u}$. Mais il est facile de corriger cette faute, en remplaçant a par $a\sqrt{-1}$ dans la valeur de XX', et divisant ensuite ce produit par $\sqrt{-1}$. Ce changement ne nuit en rien aux conséquences de notre analyse; il transforme seulement en exponentielles des fonctions périodiques et réciproquement, sans altérer les fonctions arbitraires qui ne renferment pas la lettre a. On doit en dire autant pour les résultats qui suivent le n.° 24, où l'on a commis la même inadvertance.

Effectuant donc cette substitution de $a\sqrt{-1}$ pour a dans le second membre de l'équation qui donne la valeur de $8\pi ay\sqrt{2}$ (pag. 383), et divisant le résultat par

Digitized by Google

$\sqrt{-1}$, on trouvera que la véritable valeur de y est donnée par l'équation suivante :

$$8\pi a y \sqrt{2} =$$

$$-\int e^{at.\cos.z-\nu' x}\left[\cos\left(at.\sin z+\tfrac{1}{2}z-\nu x\right)\{(1)+(2)\}+\sin\left(at.\sin z+\tfrac{1}{2}z-\nu x\right)\{(1)-(2)\}\right]dz$$

$$+\int e^{-at.\cos.z-\nu' x}\left[\cos\left(at.\sin z-\tfrac{1}{2}z+\nu x\right)\{(1)+(2)\}-\sin\left(at.\sin z-\tfrac{1}{2}z+\nu x\right)\{(1)-(2)\}\right]dz$$

$$+\int e^{at.\cos.z+\nu x}\left[\cos\left(at.\sin z-\tfrac{1}{2}z+\nu' x\right)\{(3)-(4)\}-\sin\left(at.\sin z-\tfrac{1}{2}z+\nu' x\right)\{(3)+(4)\}\right]dz$$

$$-\int e^{-at.\cos.z+\nu x}\left[\cos\left(at.\sin z+\tfrac{1}{2}z-\nu' x\right)\{(3)-(4)\}+\sin\left(at.\sin z+\tfrac{1}{2}z-\nu' x\right)\{(3)+(4)\}\right]dz$$

$$+\int e^{at.\cos.z+\nu' x}\left[\cos\left(at.\sin z+\tfrac{1}{2}z+\nu x\right)\{(5)-(6)\}+\sin\left(at.\sin z+\tfrac{1}{2}z+\nu x\right)\{(5)+(6)\}\right]dz$$

$$-\int e^{-at.\cos.z+\nu' x}\left[\cos\left(at.\sin z-\tfrac{1}{2}z-\nu x\right)\{(5)-(6)\}-\sin\left(at.\sin z-\tfrac{1}{2}z-\nu x\right)\{(5)+(6)\}\right]dz$$

$$+\int e^{at.\cos.z-\nu x}\left[\cos\left(at.\sin z-\tfrac{1}{2}z-\nu' x\right)\{(7)+(8)\}-\sin\left(at.\sin z-\tfrac{1}{2}z-\nu' x\right)\{(7)-(8)\}\right]dz$$

$$-\int e^{-at.\cos.z-\nu x}\left[\cos\left(at.\sin z+\tfrac{1}{2}z+\nu' x\right)\{(7)+(8)\}+\sin\left(at.\sin z+\tfrac{1}{2}z+\nu' x\right)\{(7)-(8)\}\right]dz$$

$$-a\int e^{at.\cos.z-\nu' x}\left[\cos\left(at.\sin z+\tfrac{3}{2}z-\nu x\right)\{[1]+[2]\}+\sin\left(at.\sin z+\tfrac{3}{2}z-\nu x\right)\{[1]-[2]\}\right]dz$$

$$-a\int e^{-at.\cos.z-\nu' x}\left[\cos\left(at.\sin z-\tfrac{3}{2}z+\nu x\right)\{[1]+[2]\}-\sin\left(at.\sin z-\tfrac{3}{2}z+\nu x\right)\{[1]-[2]\}\right]dz$$

$$+a\int e^{at.\cos.z+\nu x}\left[\cos\left(at.\sin z+\tfrac{1}{2}z+\nu' x\right)\{[3]-[4]\}-\sin\left(at.\sin z+\tfrac{1}{2}z+\nu' x\right)\{[3]+[4]\}\right]dz$$

$$+a\int e^{-at.\cos.z+\nu x}\left[\cos\left(at.\sin z-\tfrac{1}{2}z-\nu' x\right)\{[3]-[4]\}+\sin\left(at.\sin z-\tfrac{1}{2}z-\nu' x\right)\{[3]+[4]\}\right]dz$$

$$+a\int e^{at.\cos.z+\nu' x}\left[\cos\left(at.\sin z+\tfrac{3}{2}z+\nu x\right)\{[5]-[6]\}+\sin\left(at.\sin z+\tfrac{3}{2}z+\nu x\right)\{[5]+[6]\}\right]dz$$

$$+a\int e^{-at.\cos.z+\nu' x}\left[\cos\left(at.\sin z-\tfrac{3}{2}z-\nu x\right)\{[5]-[6]\}-\sin\left(at.\sin z-\tfrac{3}{2}z-\nu x\right)\{[5]+[6]\}\right]dz$$

$$+a\int e^{at.\cos.z-\nu x}\left[\cos\left(at.\sin z+\tfrac{1}{2}z-\nu' x\right)\{[7]+[8]\}-\sin\left(at.\sin z+\tfrac{1}{2}z-\nu' x\right)\{[7]-[8]\}\right]dz$$

$$+a\int e^{-at.\cos.z-\nu x}\left[\cos\left(at.\sin z-\tfrac{1}{2}z+\nu' x\right)\{[7]+[8]\}+\sin\left(at.\sin z-\tfrac{1}{2}z+\nu' x\right)\{[7]-[8]\}\right]dz.$$

ANNONCE.

Correspondance sur l'École polytechnique, publiée par M. Hachette, tome III, 1.er Cahier, janvier 1814; le 2.e Cahier, janvier 1815, est *sous presse*.

FIN.

Digitized by Google

TABLE

Des Articles contenus dans le XVII.e Cahier ou Tome X du Journal de l'École polytechnique.

Mémoire sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquérir, lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme; par M. Cauchy..... Page 1 — 28.

Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment; par le même..... 29 — 112.

Sur la détermination analytique d'une sphère tangente à quatre autres; par M. J. Binet..... 113 — 128.

Solution analytique de ce problème : Déterminer le centre et le rayon d'une sphère qui touche quatre sphères données ; par M. Hachette. ..... 129 — 136.

Expériences sur la flexibilité, la force et l'élasticité des bois. Pl. 1 et 2, fig. 1 — 5 ; *par M.* Dupin, *capitaine au corps du génie maritime.* ..... 137 — 211.

Mémoire sur la résolution des équations, contenant une méthode nouvelle pour construire, par des procédés géométriques, les racines réelles des équations de tous les degrés. Pl. 3—4—5, fig. 1—10; *par M.* Corancez. ..... 212 — 262.

Expériences pour déterminer la densité de la terre, par Henry Cavendish; *traduit de l'anglais* (Philosophical transactions, année 1798), *par M.* Chompré. Pl. 6—7, fig. 1—9..... 263 — 320.

Digitized by Google

Mémoire sur la composition des forces et sur la composition des momens; par M. J. Binet..... Page 321 — 348.

Mémoire sur les oscillations des lames élastiques ; par M. Plana, *ancien élève de l'École polytechnique, et professeur d'astronomie à l'université de Turin*..... 349 — 395.

Mémoire où l'on expose une nouvelle Méthode analytique, pour déterminer les effets de l'aberration sur la position des astres ; par M. Puissant. ..... 396 — 417.

Mémoire sur l'expression analytique de l'élasticité et de la raideur des courbes à double courbure ; par M. J. Binet..... 418 — 456.

Mémoire sur la détermination du nombre des racines réelles dans les équations algébriques ; par M. Cauchy..... 457 — 548.

Considérations générales sur les intégrales des équations aux différentielles partielles ; par M. A. M. Ampère..... 549 — 611.

Suite du *Mémoire sur les intégrales définies, imprimé dans le* XVI.^e Cahier *de ce* Journal ; *par M.* Poisson..... 612 — 631.

*Addition à l'article du XVI.^e Cahier de ce Journal, relatif à l'*Héliostate ; *par M.* Hachette. Pl. 8..... 632 — 633.

Note sur le Mémoire de M. Plana..... 633.

Fin de la Table du XVII.^e Cahier.

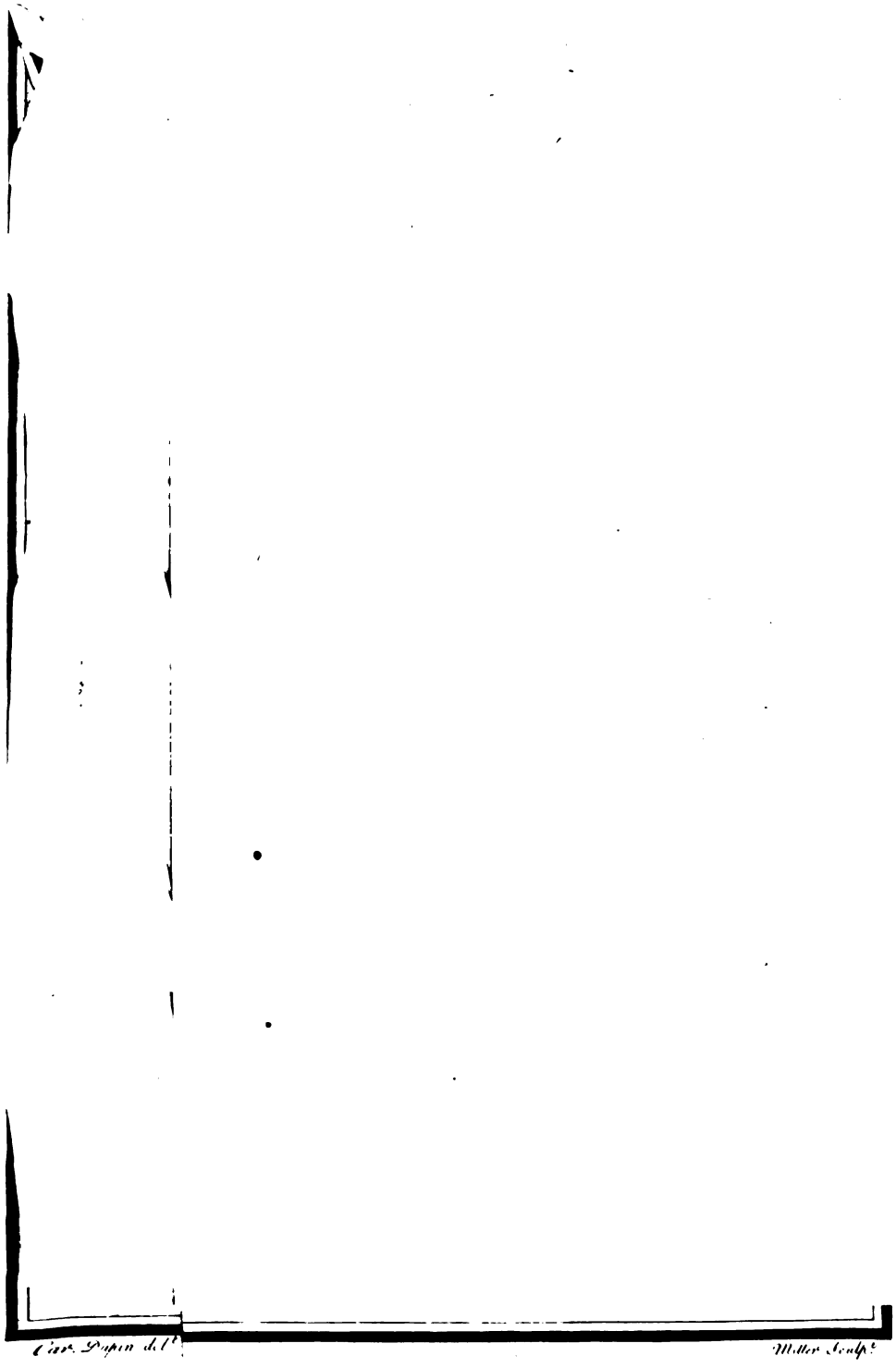
ERRATA.

Page 373, lig. 2, $\frac{-a^2t^3}{1.2.3\,u^3}$; *lisez* $\frac{-a^3t^3}{1.2.3\,u^3}$.

Page 402, lig. 13, $\sqrt{[2\cos.\frac{1}{2}(\nu'-\varpi')]}$; *lisez* $\sqrt{[2\cos.^2\frac{1}{2}(\nu'-\varpi')]}$.

Page 417, lig. 7, $+\frac{0,137}{\cos.\Lambda\,\sin\lambda}$; *lisez* $+\frac{0,137}{\cos.\Lambda\,\cos.\lambda}$

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

Mémoire de M. Cornecon.

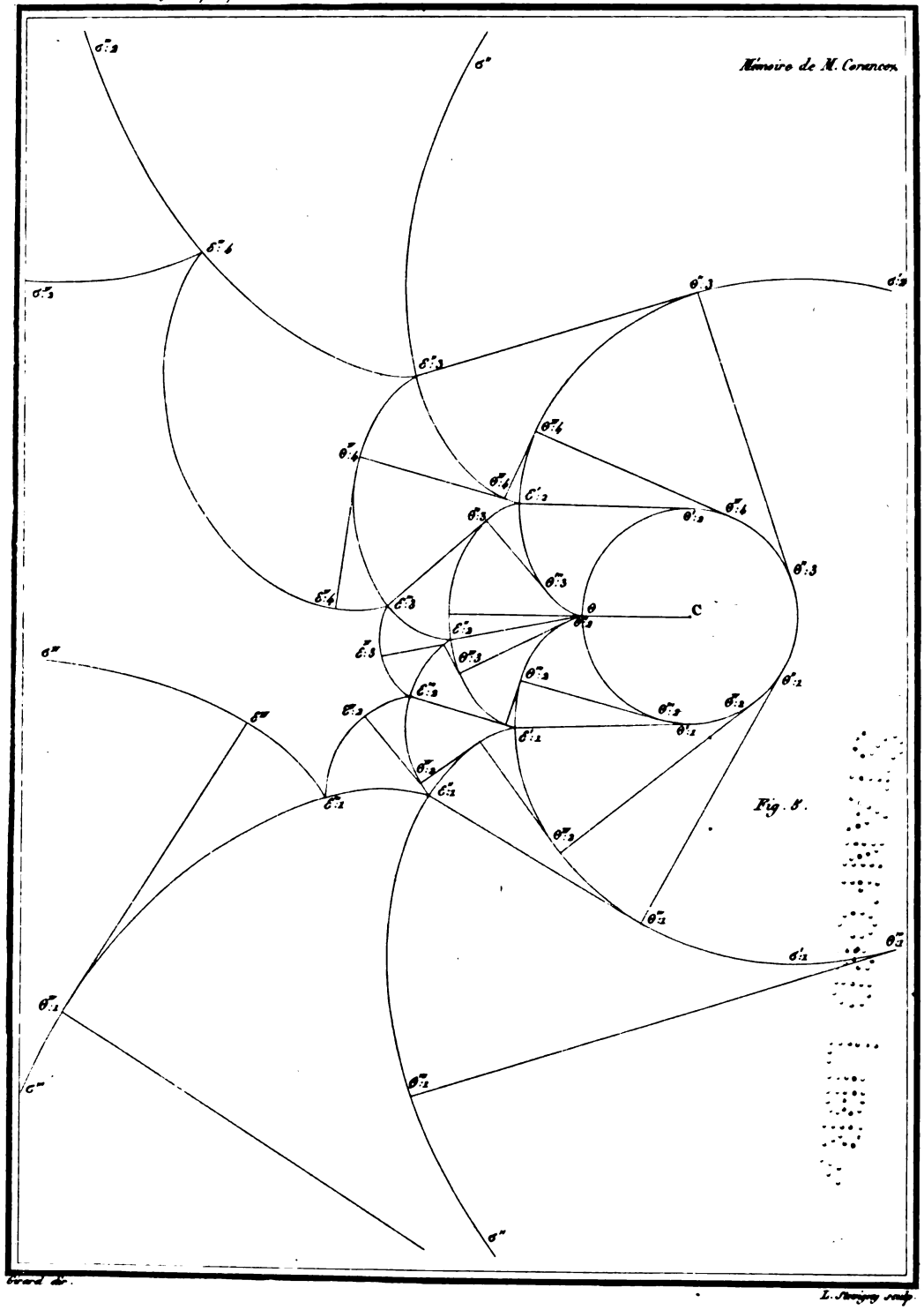


Fig. 8.

Digitized by Google

Digitized by Google

Mémoire de M. Coriolis.

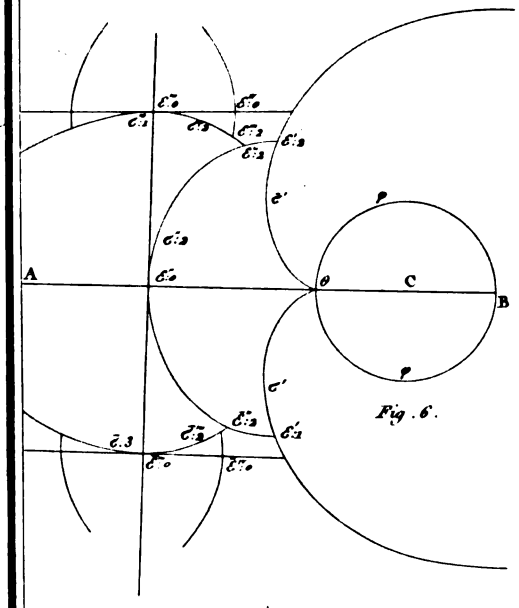


Fig. 6.

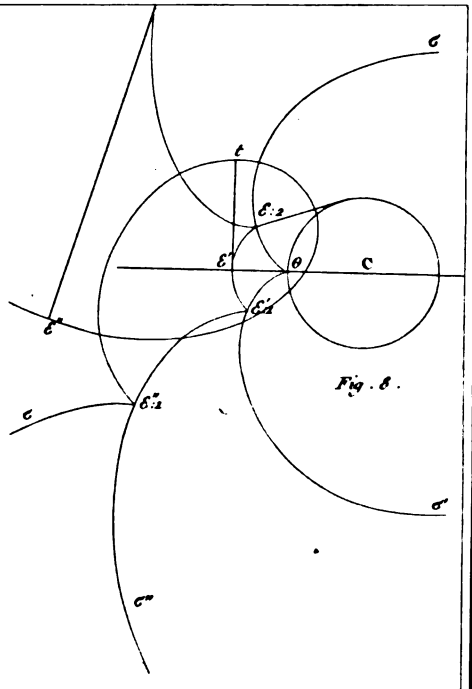


Fig. 8.

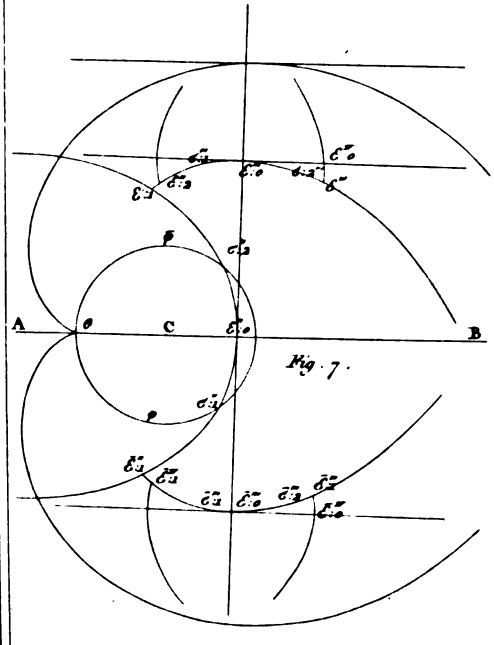


Fig. 7.

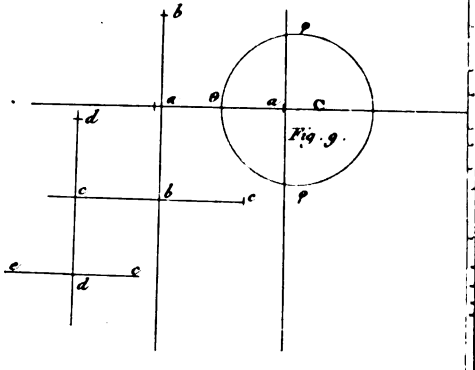


Fig. 9.

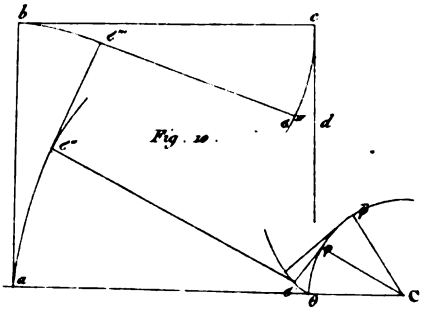
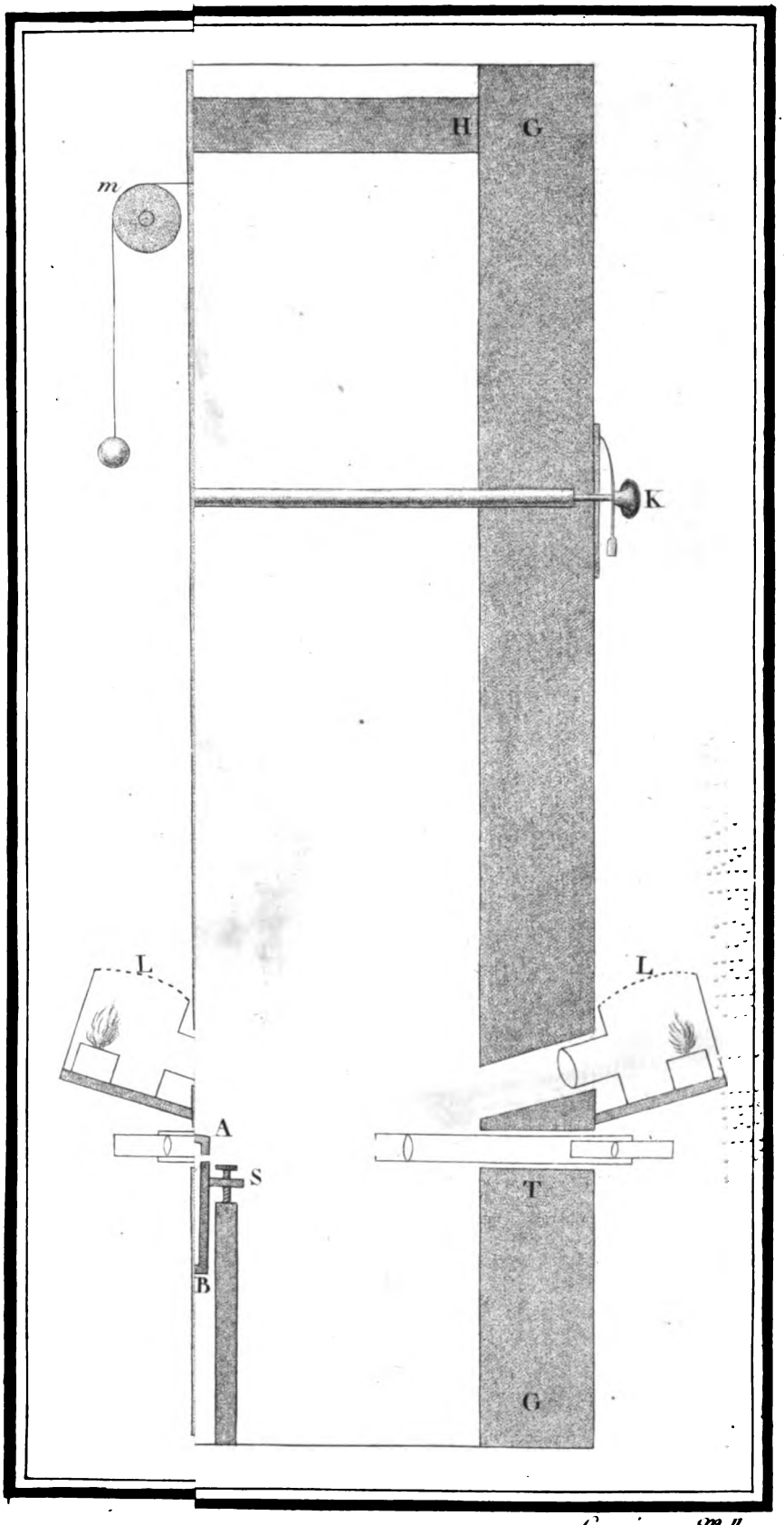


Fig. 10.

Girard dir. L. Stroogny sculp.

Digitized by Google



Gravé par Meller

Digitized by Google

Digitized by Google

Mémoi

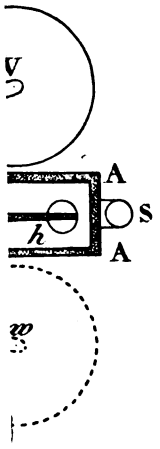


Fig. 5.

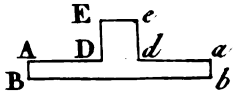
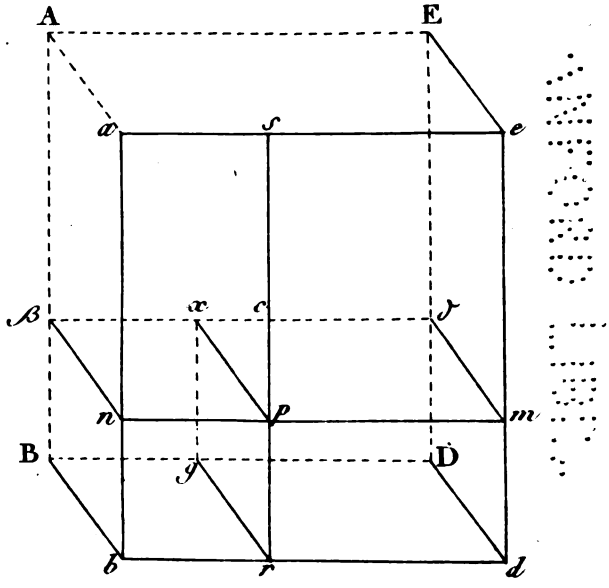


Fig. 9.



Gravé par Miller

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

STORAGE AREA

STORAGE AREA

STECHERT & Co.

Digitized by Google

Digitized by Google